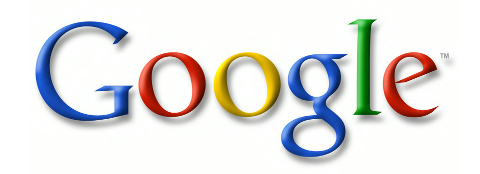
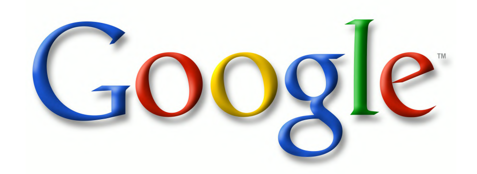
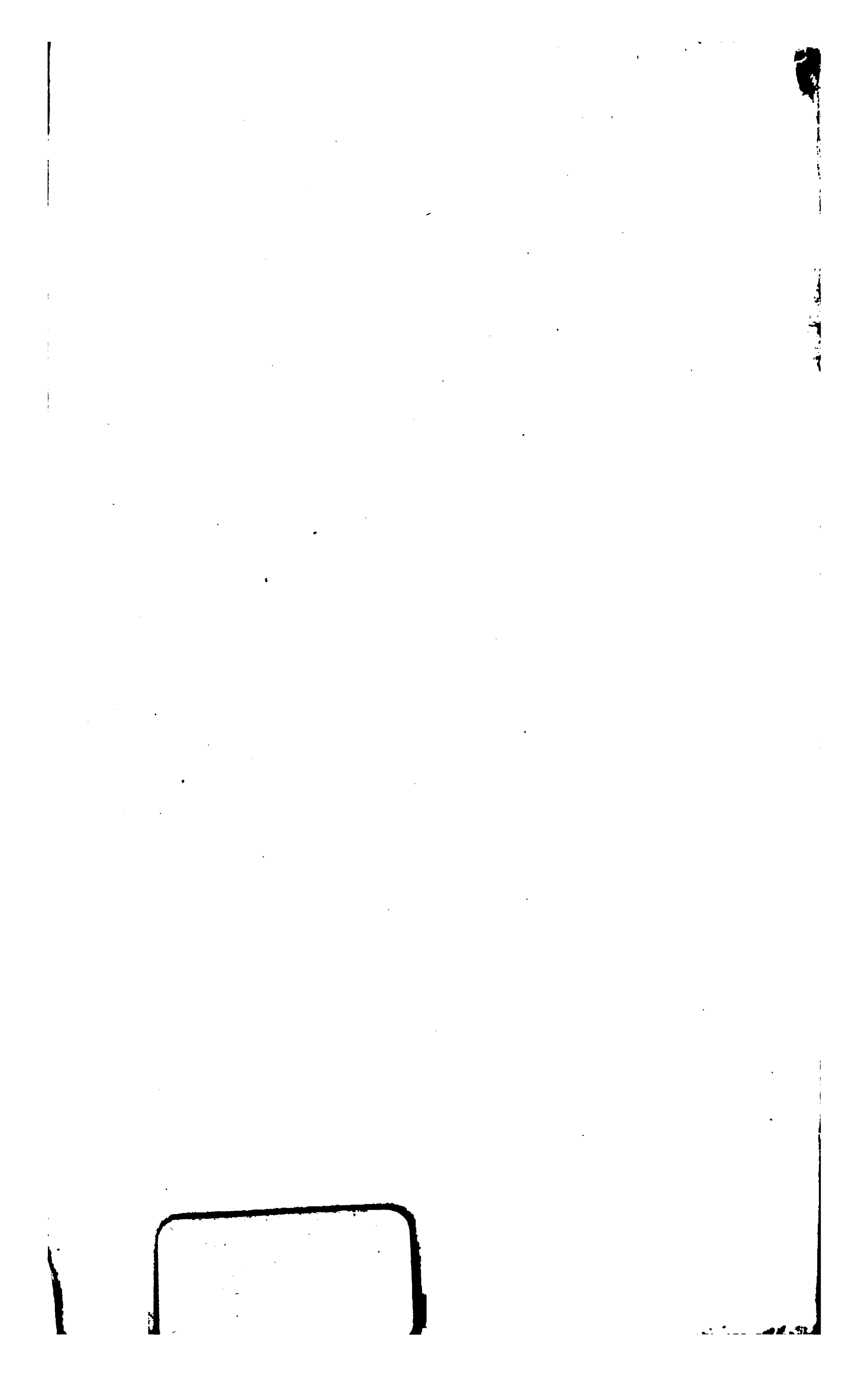
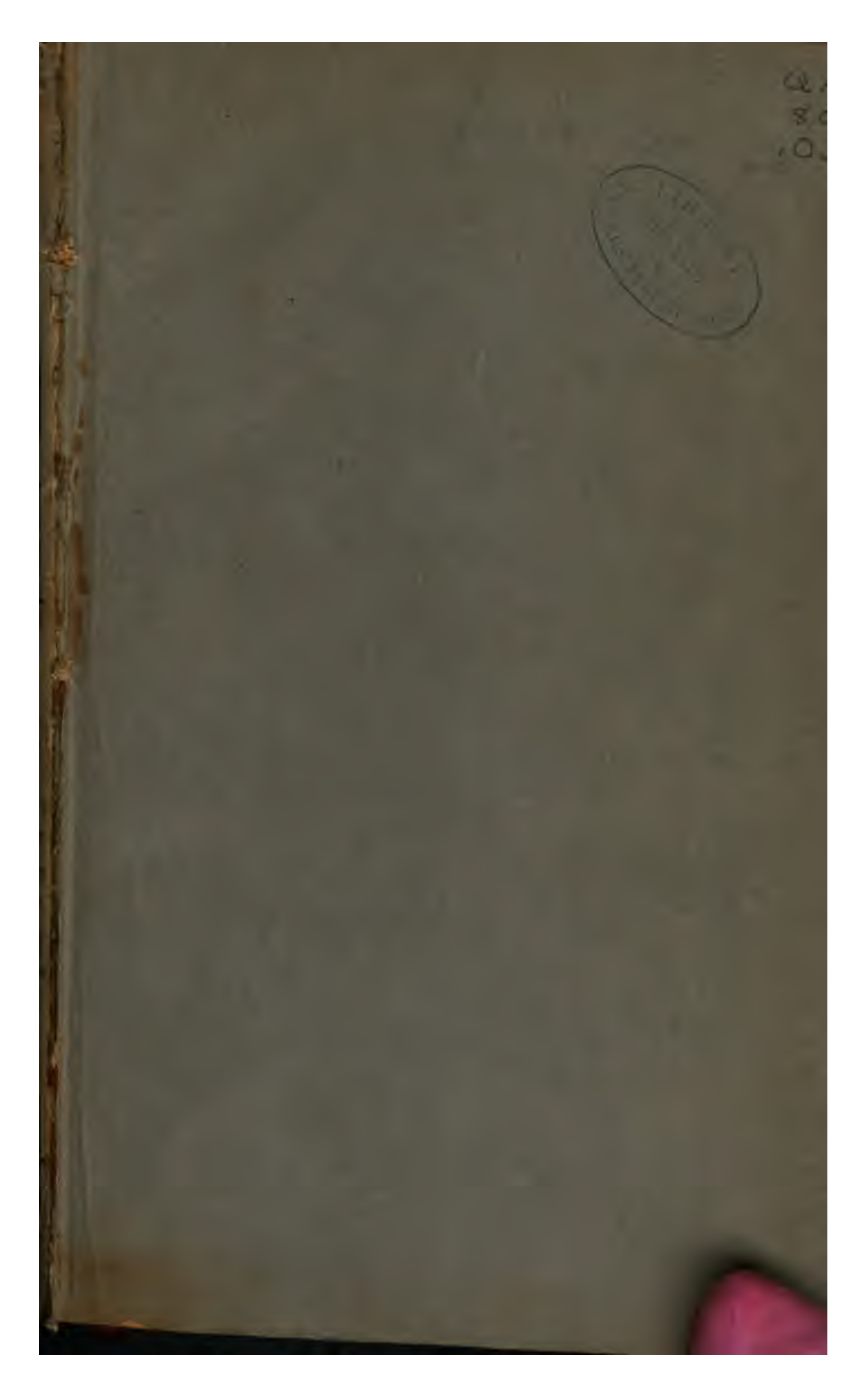
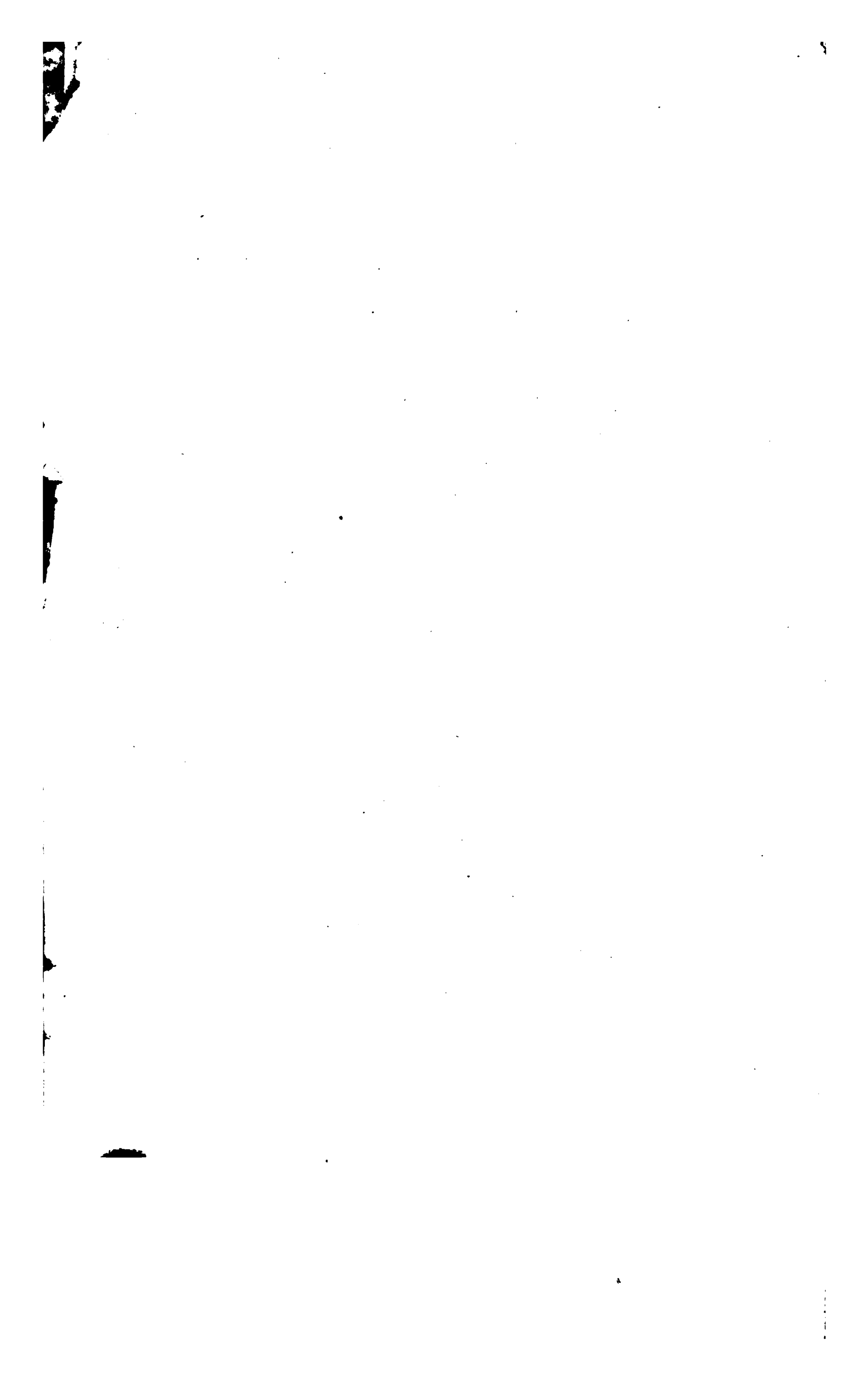










Lehrbuch
der
Mechanik,
zugleich
mit den dazu nöthigen Lehren
der
höhern Analysis und der höhern Geometrie.

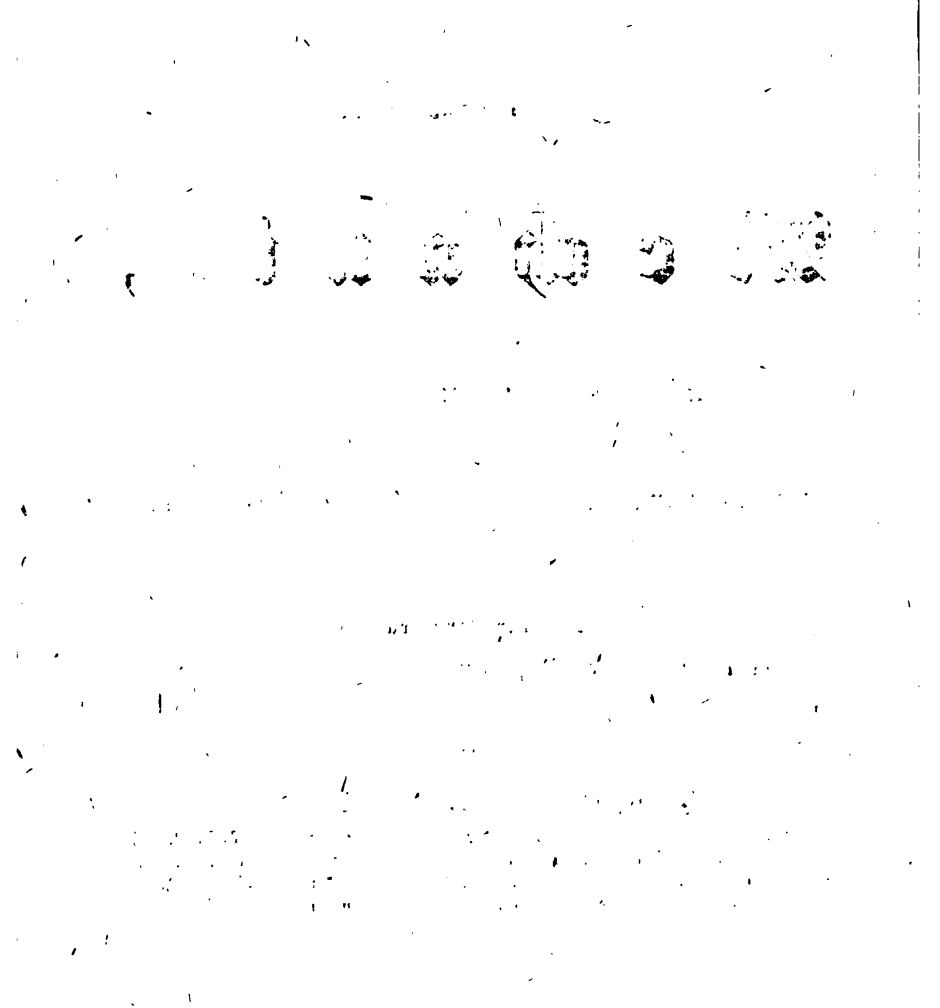
Elementar vorgetragen
und mit sehr vielen Beispielen der Anwendung versehen

vom
Professor Dr. **Martin Ohm,**
an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. Allgemeinen Krieges-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kais. Russ. Akademie der Wiss. zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie d. Wiss. zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Dritter Band.
Dynamik fester Körper.

Mit einer Figuren-Tafel.

Berlin, 1838.
Bei Theod. Chr. Friedr. Enslin.



Vorrede.

Indem ich dem mathematischen Publiko den dritten und letzten Theil der „Mechanik" übergebe, glaube ich die Hoffnung aussprechen zu dürfen, die Zeit und die große Mühe, welche ich bei der Ausarbeitung dieses Werkes verwandt habe, um den größeren Anforderungen der Gegenwart möglichst zu genügen, nicht als unnütz verloren betrachten zu müssen. Eine Recension in der allgemeinen Jenaer Litteratur-Zeitung hat sich zwar über die beiden ersten Theile eben nicht sehr günstig ausgesprochen; allein es ist dies offenbar derselbe Beurtheiler, welcher ein Jahr früher in denselben Blättern mein „Lehrbuch der gesammten Elementar-Mathematik Leipzig 1836. (2te Auflage 1837.)" als gänzlich verfehlt und unbrauchbar geschildert, und mich dadurch zwei volle Stunden hindurch im Schrekken erhalten hat; denn erst zwei Stunden später, nachdem ich diese Belehrung gelesen hatte, kam der Brief meines Hrn. Verlegers an, der mich aufforderte, von diesem Buche die zweite Auflage zu besorgen, da der größeste Theil der erstern in 7 Monaten vergriffen war. — Der Recensent klagt unter Anderem über Mangel an Ordnung; aber hat man denn nicht auch über Mangel an Ordnung in der Bewegung der Himmelskörper geklagt (die Planeten mußten sogar Irr-Sterne heißen), bis man den rechten Standpunkt fand, von welchem aus alles in die

C. Mechanik, oder Statik und Dynamik.

Dritter Theil.

Die Dynamik fester Körper.

Die Dynamik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Rekapitulation einiger der wichtigsten Begriffe und Sätze aus der Dynamik des Atoms.

§. 1.

Geschwindigkeit einer Bewegung zu Ende irgend einer Zeit t, ist der Quotient, aus dem, in der unendlich-kleinen, nächst nach t folgenden Zeit dt beschriebenen Wege ds, durch diese Zeit dt dividirt *). — Bezeichnet also s den in der Zeit t beschriebenen Raum, und v die zu Ende der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit, so ist allemal, es mag der Weg s geradlinig oder krummlinig seyn,

$$\text{I.} \qquad v = \frac{ds}{dt} = \partial s_t \quad \text{(I. Th. Mech. §. 4.).}$$

Mit dieser Geschindigkeit v beschreibt eine konstante Bewegung in der Zeit τ den Raum $v\tau$, also in der Zeit-Einheit den Weg von v Raum-Einheiten, so daß dieselbe Zahl v, durch welche wir die Geschwindigkeit ausdrücken, zugleich auch die Zahl der Raum-Einheiten ist, welche eine konstante Bewegung, die diese Geschwindigkeit hat, in jeder Sekunde beschreiben würde.

*) In der Regel drücken wir die Räume in Preußischen oder Rheinländischen Fußen aus; die Zeiten aber in Sekunden mittlerer Zeit. Doch kann man auch beliebige andere Einheiten zu Grunde gelegt sich denken.

§. 2.

Ist aber die Bewegung eines Atoms geradlinig und bezeichnet $\varphi_t \cdot dt$ die Kraft, welche vom Anfange der Bewegung an für alle Werthe von t, in den verschiedenen Zeittheilchen dt (d. h. stetig) gewirkt hat (von $t = 0$ an, bis zu dem Endwerthe von t hin) und zwar immer in einer und derselben Richtung (welche auch mit der Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit zusammenfällt), so ist allemal

II. $\varphi_t = \partial v_t$, also III. $\varphi_t = \partial^2 s_t$ (I. Th. Mech. §. 33.).

Eine solche stetig wirkende Kraft ist immer unendlich-klein und heißt auch beschleunigende Kraft.

Dabei ist der Faktor φ_t in der unendlich-kleinen stetig wirkenden Kraft $\varphi_t \cdot dt$, und zwar der Werth dieses Faktors φ_t, den selbiger zu irgend einer Zeit t hat, allemal die Geschwindigkeit, welche ein ruhender Atom erhalten würde, wenn diese unendlich-kleine Kraft $\varphi_t \cdot dt$, wie sie für diesen bestimmten Werth von t sich ausrechnet, stetig und unverändert eine volle Zeit-Einheit (Sekunde) hindurch in einer und derselben Richtung auf den Atom wirken wollte.

Anmerk. Ist die stetig hinzutretende Kraft (d. h. die beschleunigende Kraft) konstant (nach t), so findet sich sogleich aus diesen Gleichungen durch Integration

$$v = \varphi \cdot t, \quad s = \tfrac{1}{2}\varphi \cdot t^2,$$

wenn v und s mit t zugleich anfangen. — Ist also z. B. $\varphi =$ der konstanten Schwere g, so hat man

$$v = g \cdot t, \quad s = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2,$$

und daraus noch

$$v = \sqrt{2gs}.$$

§. 3.

Diese Gleichungen (II. und III.) gelten noch (wie die I.), wenn auch die Bewegung des Atoms eine krummlinige seyn sollte,

sobald nur dann φ·dt nicht die wirkende Kraft selbst, sondern die auf die Tangente der Bahn projicirte Kraft ist (I. Th. Mechanik §. 38.).

Die vollständigen Gleichungen einer jeden krummlinigen Bewegung sind aber

IV. $\partial^2 x = X$, $\partial^2 y = Y$ und $\partial^2 z = Z$,

sobald nur x, y, z die Koordinaten-Werthe desjenigen Punktes der Bahn sind, in welchem sich der Atom zu Ende der Zeit t befindet, wenn ferner die Zeichen $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ Differenzial-Koeffizienten nach t vorstellen, und X·dt, Y·dt, Z·dt, die Seitenkräfte der, parallel mit den drei Koordinaten-Axen zerlegten, zu Ende einer jeden Zeit t stetig auf's Neue hinzutretenden Kraft φ·dt sind *).

Ist ferner s die in der Zeit t beschriebene Bahn, so ist

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2;$$

und ∂x, ∂y, ∂z sind die Seiten-Geschwindigkeiten der Bewegung zu Ende der Zeit t, wenn nur alle diese Differenzial-Koefficienten nach t genommen sind.

Alles dieses gilt

1) für die freie Bewegung eines Atoms; aber auch

2) für die Bewegung auf gegebener Fläche, sobald zu der Kraft φ·dt noch der normale Gegendruck Q·dt der Fläche, oder in den Gleichungen (IV.) der Bewegung zu

$$X, \quad Y, \quad Z$$

noch bezüglich $Q \cdot \cos\lambda$, $Q \cdot \cos\mu$, $Q \cdot \cos\nu$

hinzuaddirt werden, während λ, μ, ν die Winkel bedeuten, welche die zu x, y, z gehörige Normale der Fläche mit den drei Koordinaten-Axen macht.

Endlich gelten dieselben Gleichungen (IV.) der Bewegung auch noch

3) bei der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn, wenn nur in diesem Falle

*) Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist, so werden allemal rechtwinkliche Koordinaten-Axen vorausgesetzt.

$$X + Q \cdot \cos \varepsilon, \quad Y + Q \cdot \cos \varepsilon', \quad Z + Q \cdot \cos \varepsilon''$$

bezüglich statt

$$X, \quad Y, \quad Z,$$

gesetzt werden, während Q den Gegendruck der Bahn (der immer auf der Bahn selbst senkrecht steht) vorstellt, ε, ε' und ε'' aber die, selbst noch aus den Gleichungen der Bewegung näher zu berechnenden Winkel sind, welche die Richtung dieses Gegendrucks mit den drei Koordinaten-Axen macht (I. Th. Mechanik §§. 35. 37.).

Diese Resultate vereinfachen sich alle in etwas, sobald die Bahn des Atoms ganz und vollständig in einer Ebene liegt, und diese zur Ebene zweier der drei Koordinaten-Axen genommen, die dritte also ganz überflüssig wird.

§. 4.

Dreht sich in einer Ebene eine Gerade AX (Fig. 19.) um einen ihrer Endpunkte A, so hat jeder andere ihrer Punkte zu Ende einer jeden Zeit t eine andere Geschwindigkeit. Sind nämlich $BB' = w$, $CC' = w'$ und $DD' = w''$, die in irgend einer Zeit t von den Punkten B, C und D beschriebenen Wege, so sind die Geschwindigkeiten dieser Punkte B, C und D bezüglich ∂w, $\partial w'$ und $\partial w''$. Sind nun $AB = 1$, $AC = r$ und $AD = R$ die Radien der Kreise, welche diese Punkte beschreiben, so ist

$$w' = r \cdot w \quad \text{und} \quad w'' = R \cdot w;$$

also, wenn man nach t differenziirt,

$$\partial w' = r \cdot \partial w \quad \text{und} \quad \partial w'' = R \cdot \partial w;$$

d. h. es verhalten sich nicht nur die von den Punkten B, C und D gleichzeitig beschriebenen Wege $w : w' : w''$, sondern auch die zu Ende derselben vorhandenen Geschwindigkeiten $\partial w : \partial w' : \partial w''$ genau wie die Radien 1 : r : R.

Die Geschwindigkeit w nun, welche der Punkt B hat, dessen Entfernung von A der Raum-Einheit gleich ist, nennt man die Winkel-Geschwindigkeit dieser Umdrehung.

Aus diesem Begriffe geht hervor:

1) Die Winkel-Geschwindigkeit einer solchen drehenden Bewegung wird allemal gefunden, wenn man den Weg w nimmt, welchen ein von dem Mittelpunkte der Drehung um die Raum-Einheit entfernter Punkt in der Zeit t. beschreibt, und davon den Differenzial-Koeffizienten ∂w_t oder ∂w berechnet.

2) Die wahre Geschwindigkeit $\partial w'$ eines von dem Mittelpunkte der Drehung um r entfernten Punktes findet man, wenn seine Winkel-Geschwindigkeit mit dem Radius r seiner Bahn multiplicirt wird.

3) Und ist $\partial w'$ die wahre Geschwindigkeit eines Punktes, welcher von dem Mittelpunkte der Drehung um r abliegt, so ist $\frac{\partial w'}{r}$ seine Winkel-Geschwindigkeit (vgl. I. Th. Mech. §. 41.).

§. 5.

Ferner kommt bei der krummlinigen Bewegung des Atoms noch die Centrifugal-Kraft vor. Darunter versteht man den jedesmal unendlich-kleinen Druck (in der Ebene des Krümmungs-Kreises, und) in der Richtung des Krümmungs-Halbmessers, vom Mittelpunkte der Krümmung abwärts, welchen die Bahn an dieser Stelle erleiden würde, wenn man die stetig wirkenden Kräfte, welche Ursache der Bewegung gewesen sind, plötzlich aufhören ließe zu wirken, und die Bahn als eine vorgeschriebene und fest gemachte sich dächte. — Dieser Druck gegen die wirklich feste, oder nur als fest gedachte Bahn, rührt also, der Definition zu Folge, von der augenblicklichen Geschwindigkeit v allein her, und ist allemal $= \frac{v^2}{\varrho} \cdot dt$, oder, in so ferne man nach (I. Th. Mech. §. 31. Nr. 6.) den unendlich-kleinen Faktor dt oftmal wegläßt, $= \frac{v^2}{\varrho}$, wenn ϱ der Krümmungs-Halbmesser der Bahn ist an dieser Stelle. — Dieser Ausdruck $\frac{v^2}{\varrho}$ drückt die Geschwindigkeit aus, welche ein ruhender und freier Atom annehmen würde, wenn diese Centrifugal-Kraft $\frac{v^2}{\varrho} \cdot dt$ eine

volle Sekunde hindurch stetig und unverändert und auch immer in derselben Richtung auf ihn wirken wollte.

Anmerk. 1. In vielen in Deutschland gedruckten, besonders aber in physikalischen Schriften, findet man die Centrifugal-Kraft, wie es scheint nur halb so groß, nämlich $= \frac{v^2}{2\varrho}$ angegeben. Dies ist aber nur Schein. In denselben Büchern ist nämlich stillschweigend festgesetzt, daß man jede stetig wirkende, also immer unendlich-kleine Kraft durch diejenige Zahl in Rechnung bringen wolle, welche die Geschwindigkeit ausdrückt, die ein Atom bekommen würde, wenn dieselbe stetig wirkende und unendlich-kleine Kraft unverändert und immer in derselben Richtung eine halbe Sekunde lang wirken wollte. Dieselbe Kraft bringt aber in der halben Sekunde auch nur die Hälfte der Geschwindigkeit hervor, als in der vollen Sekunde. Daher findet man in den gedachten Schriften alle stetig wirkenden Kräfte nur halb so groß, und namentlich auch die Schwere g nur = 15,6 (statt 31,2) angegeben*), und deshalb kann dann auch die Centrifugal-Kraft nur durch die Hälfte der Zahl aus-

---

*) Um dem Anfänger jede Erleichterung in der Bestimmung dieser Begriffe zu verschaffen, sagen wir hier noch einmal ausdrücklich, daß, wenn wir hier die Schwere g nennen, wir darunter verstehen, daß sie $= g \cdot dt$ sey, also unendlich-klein; und daß g die Geschwindigkeit vorstellt, welche die Schwere $g \cdot dt$ einem ruhenden Atom beibringen würde, wenn sie eine volle Sekunde hindurch stetig und unverändert und auch immer in derselben Richtung auf ihn wirken wollte. Diese Geschwindigkeit ist nach der Theorie der frei fallenden Körper allemal das Doppelte des Raumes, der in der ersten Sekunde durchfallen ist. Die Erfahrungen geben ungefähr

$$g = 2 \times 15{,}6 = 31{,}2;$$

wenn man, wie wir dies hier immer thun, die Sekunde mittlerer Zeit als die Zeit-Einheit, und den Preußischen oder Rheinländischen Fuß als Raum-Einheit annehmen; von welcher letztern (der Raum-Einheit) wieder (nach I. Th. Mech. §. 4.) die Zahl abhängt, durch welche wir eine Geschwindigkeit in Rechnung bringen.

Der Raum, den die Schwere in der ersten Sekunde durchfallen macht, ist dann in jenen Schriften, wie hier bei uns, ein und derselbe, nämlich 15,6 Preußische Fuß, nur daß ihn jene Schriften durch g, wir aber hier denselben durch $\frac{1}{2}g$ ausdrücken.

gedrückt sich finden, durch welche wir sie nach unsern Annahmen, welche mit denen der ausgezeichnetsten französischen Schriften übereinstimmen, auszudrücken haben.

Vergleicht man zwei stetig wirkende Kräfte mit einander, z. B. die Centrifugal-Kraft mit der Schwere, so ist es natürlich in Bezug auf das Verhältniß beider zu einander ganz einerlei, ob man sich der eben erwähnten ältern Art, die stetig wirkenden Kräfte in Rechnung zu bringen bedient, oder der von uns (im I. Th. Mech. §. 31.) angegebenen und in diesem Werke durchaus verfolgten Weise.

Fällt ein Atom vermöge der Schwere $g \cdot dt$ frei herunter, ohne weiteres Hinderniß, und zwar die Höhe h, so ist seine zu Ende des Falls erworbene Geschwindigkeit v allemal aus der Formel

$$v = \sqrt{2g \cdot h} \ ^{*})$$

zu berechnen. Man giebt daher die Geschwindigkeit irgend einer Bewegung oft dadurch, daß man die Fallhöhe h angiebt, welche ein Atom (oder ein Körper) frei durchfallen müßte, um am Ende des Falles gerade diese Geschwindigkeit zu erhalten. — Ist also bei einer krummlinigen Bewegung zu irgend einer Zeit die Geschwindigkeit v so, daß sie zur Fall-Höhe h gehört, so ist die Centrifugal-Kraft in diesem Augenblick $= \frac{v^2}{\varrho} \cdot dt = g \cdot \frac{2h}{\varrho} \cdot dt$, oder, wenn man den Faktor dt wegläßt, $= g \cdot \frac{2h}{\varrho}$. — Es verhält sich also die augenblickliche Centrifugal-Kraft zur Schwere, wie die doppelte zur augenblicklichen Geschwindigkeit gehörige Fallhöhe zu dem Krümmungs-Halbmesser.

Anmerk. 2. Den ersten Anfänger machen wir noch besonders darauf aufmerksam, daß die Centrifugal-Kraft keine in der Natur vorkommende Kraft ist, wie etwa die Schwere, son-

*) Ist nämlich t die zum Falle nöthige Zeit, so hat man $h = \int v \cdot dt$, $v = \int g \cdot dt$, d. h. $v = gt$, $h = \frac{1}{2}gt^2$. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Zeit t, so erhält man $v^2 = 2gh$.

dern daß man mit diesem uneigentlichen Namen nur einen Druck bezeichnet, den eine feste krummlinige Bahn, oder der mit ihr fest verbunden gedachte Mittelpunkt des Krümmungs-Kreises in jedem Augenblicke deshalb erleidet, weil der bewegte Atom die (gerade) Richtung seiner Geschwindigkeit verfolgen will, die feste Bahn aber ihn daran hindert.

Die Dynamik fester Körper.

Zweites Kapitel.

Bewegung einer Masse in der Erscheinung. Größe der Bewegung. Bewegende Kraft. D'Alembert's Lehrsatz.

Vorerinnerung.

Gehen wir nun vom Atom zu einer bewegten Masse über, und betrachten wir dabei wiederum zunächst die Bewegung in ihrer Erscheinung zu Ende irgend einer Zeit t, so finden wir:

1). Entweder es haben alle Atome eine und dieselbe Geschwindigkeit, und diese in Richtungen, welche mit einander parallel laufen;

2) oder es ist dieses nicht der Fall.

Erste Abtheilung.

Wenn alle Atome in parallelen Richtungen eine und dieselbe Geschwindigkeit haben. Größe der Bewegung, Bewegende Kraft. Lebendige Kraft.

§. 6.

Größe der Bewegung.

Haben alle Atome eines bewegten festen Körpers zu irgend einer Zeit t eine und dieselbe Geschwindigkeit v_t oder v und noch dazu in parallelen Richtungen, so kann man zunächst folgende Betrachtungen anstellen:

Nach (I. Th. Mech. §§. 6. 7.) ist die Geschwindigkeit v_t oder v als eine Kraft anzusehen, welche eben jetzt auf den als ruhend gedachten Atom gewirkt und ihm diese Geschwindigkeit beigebracht hat. Die Geschwindigkeiten aller Atome sind also eben so viele parallele und gleiche Kräfte, welche den ruhenden Körper angegriffen haben. Ist nun n die (wenn auch noch so große) Anzahl der Atome, welche in der Massen-Einheit stekken, und ist die Masse des bewegten Körpers durch die Zahl m ausgedrückt, so ist n·m die Anzahl aller seiner Atome. Nach der Theorie der parallelen Kräfte (II. Th. Kap. 4. Abthl. 2.) würde nun eine Kraft

$$1 \qquad P = nm \cdot v = n \cdot mv$$

in dem Schwer-Punkte des Körpers und in der Richtung seiner Geschindigkeit angebracht, den ruhenden Körper in dieselbe Bewegung versetzen, wie wir sie zu Ende der Zeit t bei ihm wahrgenommen haben; und umgekehrt, dieselbe Kraft $P = n \cdot mv$ würde die Geschwindigkeit aller Atome auf einmal vernichten, wenn sie an dem Schwer-Punkt der Richtung seiner Bewegung genau entgegen angebracht würde.

Betrachten wir einen andern Körper, dessen Masse m' ist, in derselben Art von Bewegung begriffen, aber so, daß jeder Atom die Geschwindigkeit v'_t oder v' hat, so ist

$$2) \qquad P' = n \cdot m'v'$$

die Kraft, welche man an dem Schwer-Punkte dieses andern Körpers anbringen müßte, wenn dieser Körper aus der Ruhe in diejenige Bewegung übergehen sollte, welche wir eben jetzt zu Ende der Zeit t an ihm wahrnehmen.

Aus den beiden Gleichungen

$$P = n \cdot mv \quad \text{und} \quad P' = n \cdot m'v'$$

geht nun, wenn man beide durch einander dividirt, noch hervor

$$P : P' = m \cdot v : m'v'.$$

Nimmt man nun die Kraft P', welche bei einer einmaligen Wirkung einer beliebigen Masse m' die Geschwindigkeit $v' = \frac{1}{m'}$ (oder der Masse $m' = 1$, die Geschwindigkeit $v' = 1$) beibrin-

gen würde zur Kraft-Einheit, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$P = m \cdot v.$$

Dieses Produkt mv nennen wir nun die Größe der Bewegung oder auch das Bewegungs-Vermögen der Masse m in diesem Augenblicke, wo jeder Atom dieselbe Geschwindigkeit v (in parallelen Richtungen) hat.

Die Größe der Bewegung, oder das Bewegungs-Vermögen einer bewegten Masse zu irgend einer Zeit, ist also die Kraft, welche man an den Schwer-Punkt des ruhenden Körpers anbringen müßte, um augenblicklich jedem Atom gerade diese Geschwindigkeit zu geben, welche er jetzt hat; oder die Kraft, welche man der Richtung seiner Bewegung (im Schwer-Punkte desselben) gerade entgegensetzen müßte, um augenblicklich diese Bewegung zu vernichten; unter der Voraussetzung jedoch, daß man zur Kraft-Einheit diejenige Kraft nimmt, welche der Einheits-Masse die Einheits-Geschwindigkeit, oder einer beliebigen Masse m' die Geschwindigkeit $\frac{1}{m'}$, oder endlich der Masse $\frac{1}{v'}$ die Geschwindigkeit v' beibringen würde.

Anmerk. 1) Die „Größe der Bewegung" ist das Produkt aus der Masse m des bewegten Körpers und der (gemeinschaftlichen) Geschwindigkeit v aller seiner Atome, oder der Geschwindigkeit seines Schwer-Punktes.

2) Dividirt man daher die „Größe der Bewegung" durch die Masse des bewegten Körpers, so erhält man die Geschwindigkeit seines Schwer-Punktes (welche zugleich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit aller seiner Atome ist).

3) Haben zwei Körper einerlei Massen, so verhalten sich ihre „Größen der Bewegung," wie die Geschwindigkeiten ihrer Schwer-Punkte.

4) Haben aber die Schwer-Punkte zweier Körper einerlei Geschwindigkeit, so verhalten sich ihre „Größen der Bewegung," wie ihre Massen.

§. 7.

Wird einer bewegten Masse m in dem Augenblicke, wo sie die Geschwindigkeit v hat, eine feste Oberfläche auf die Richtung des Schwer-Punktes normal entgegengesetzt, so entsteht ein **Stoß**. Wir finden es vorläufig bequem, die „Größe der Bewegung" mv auch die **Größe des Stoßes** zu nennen, wenn wir auch hinsichtlich des Näheren vom Stoße auf das neunte Kapitel verweisen müssen. Die Kraft, welche der Einheits-Masse die Einheits-Geschwindigkeit beibringt, und welche wir zur Kraft-Einheit für die Ausmessung der „Größen der Bewegung" genommen haben, kann daher auch recht füglich die **Stoß-Einheit** genannt werden.

Auf diese Stoß-Einheit bezogen ist also mv die „Größe der Bewegung," oder das „Bewegungs-Vermögen," oder die „Größe des Stoßes" einer Masse m in dem Augenblicke, wo sie die Geschwindigkeit v hat, d. h. wo alle ihre Atome die gleichen und parallelen Geschwindigkeiten v haben.

§. 8.

Jede an einen Atom stetig hinzutretende Kraft, z. B. $\varphi \cdot dt$, ist immer unendlich-klein, und wird die **beschleunigende Kraft** genannt. Sie giebt dem **ruhenden** Atom bei ihrer einmaligen Wirkung die ebenfalls unendlich-kleine Geschwindigkeit $\varphi \cdot dt$. Wirkt also auf alle einzelnen Atome einer ruhenden Masse m dieselbe beschleunigende Kraft $\varphi \cdot dt$ in parallelen Richtungen, so bringt sie bei einer einmaligen Wirkung jedem Atom die Geschwindigkeit $\varphi \cdot dt$ bei, also der Masse m die unendlich-kleine „Größe der Bewegung" $m\varphi \cdot dt$, wenn letztere auf die Stoß-Einheit bezogen wird. — Hatte aber jeder Atom der Masse m vorher schon in derselben Richtung die Geschwindigkeit v, so hat er jetzt die Geschwindigkeit $v + \varphi \cdot dt$. Hatte die Masse m also vorher „die Größe der Bewegung" mv, so hat sie jetzt die „Größe der Bewegung" $m(v + \varphi \cdot dt)$. Folglich ist das Produkt $m\varphi \cdot dt$ dann auch der „Zuwachs" an „Größe der Bewe-

gung," welchen die Masse m, an deren einzelne Atome in der Richtung der bereits vorhandenen Geschwindigkeit v noch die beschleunigende Kraft $\varphi \cdot dt$ hinzugetreten ist, erlitten hat.

Diese durch einmalige auf alle Atome gleichzeitige und parallele Einwirkung einer beschleunigenden Kraft $\varphi \cdot dt$, in der Masse m hervorgebrachte (unendlich-kleine) „Größe der Bewegung" $m\varphi \cdot dt$ nennt man die auf den Körper wirkende bewegende Kraft.

Anmerk. 1) Wird die bewegende Kraft durch die Masse m dividirt, so erhält man die beschleunigende Kraft.

2) Wird die beschleunigende Kraft mit der Masse m multiplicirt, so hat man wieder die bewegende Kraft.

3) Bei gleichen beschleunigenden Kräften, welche auf zwei Massen m und m' wirken, verhalten sich die bewegenden Kräfte, wie diese Massen.

4) Bei verschiedenen beschleunigenden Kräften, welche auf gleiche Massen wirken, verhalten sich dagegen die bewegenden Kräfte, wie die beschleunigenden.

§. 9.

Die bewegende Kraft bei einer ruhenden Masse (auf deren einzelnen Atome, aber in parallelen Richtungen, eine beschleunigende Kraft $\varphi \cdot dt$ wirkt) ist der Druck, den eine absolut feste Fläche erleidet, gegen welche sich senkrecht auf sie die Masse mit der nämlichen Geschwindigkeit $\varphi \cdot dt$ in Bewegung setzen würde, wenn nicht dieselbe feste Fläche jede Bewegung verhinderte.

§. 10.

Stoß und Druck einer und derselben Masse verhalten sich daher zu einander, wie die zu der Zeit t des Stoßes vorhandene Geschwindigkeit v dieser Masse zu der im Augenblick des Drucks auf jeden einzelnen Atom wirkenden unendlich-kleinen beschleunigenden Kraft $\varphi \cdot dt$.

Stoß und Druck, obgleich gleichartig ihrem Begriffe nach,

sind also in endlichen Zahlen nie mit einander zu vergleichen *).

Allgemeiner: Größe der Bewegung zu irgend einer Zeit t, wo die Masse irgend eine endliche Geschwindigkeit hat, und bewegende Kraft sind, obgleich dem Begriffe nach gleichartig, in endlichen Zahlen nie mit einander zu vergleichen.

Während wir daher die „Größen der Bewegung" unter einander in endlichen Zahlen vergleichen, und zur Kraft-Einheit die Stoß-Einheit nehmen, d. h. die „Größe der Bewegung" einer Masse m' in dem Augenblicke, wo solche die Geschwindigkeit $\frac{1}{m'}$ (oder die „Größe der Bewegung" der Einheits-Masse in dem Augenblicke, wo sie die Einheits-Geschwindigkeit, oder endlich die Größe der Bewegung der Masse $\frac{1}{v'}$ in dem Augenblicke, wo sie die Geschwindigkeit v') hat, ist es am bequemsten, wenn man auch die „bewegenden Kräfte" dadurch unter sich vergleicht, daß man zur Einheit nimmt die „bewegende Kraft" irgend einer Masse m', auf deren Atome alle die beschleunigende Kraft $\frac{1}{m'} \cdot dt$ wirkt (oder die bewegende Kraft der Massen-Einheit, wenn auf alle Atome die beschleunigende Kraft $1 \cdot dt$ **) wirkt, welche das $\frac{1}{g}$fache der Schwere $g \cdot dt$ ist, oder endlich die bewegende

Kraft

*) In den Anwendungen auf Physik und Technik kann jedoch ein Druck scheinbar mit einem Stoß verglichen werden können, in so ferne nämlich bei einem Drucke die Materie nachgiebt, dadurch aber eine, wenn auch unmerkliche Bewegung entsteht, so daß der Druck gleichsam in einen Stoß mit sehr kleiner (aber doch nicht mehr mit unendlich-kleiner) Geschwindigkeit übergeht. — Bei einerlei Masse bleibt jedoch selbst dieser, in einen Stoß übergehende Druck sehr klein gegen einen Stoß mit merkbarer Geschwindigkeit.

**) Hat ein Atom die beschleunigende Kraft $1 \cdot dt$, so heißt das so viel, als der Atom wird die Geschwindigkeit 1 erhalten, wenn diese beschleunigende Kraft eine volle Sekunde lang stetig und unverändert und auch immer in derselben Richtung auf ihn wirkt.

Kraft einer Masse $\frac{1}{v'}$, wenn auf alle Atome die beschleunigende Kraft $v' \cdot dt$ wirkt *)).

Diese Einheit mag man die Druck-Einheit nennen, so daß also die Druck-Einheit das dtfache der Stoß-Einheit ist. Während daher die bewegende Kraft, sobald man sie auf die Stoß-Einheit bezieht, $= m\varphi \cdot dt$ (also unendlich-klein) ist, wird sie jetzt durch die (endliche) Zahl $m\varphi$ ausgedrückt, sobald man sie auf die eben festgestellte Druck-Einheit bezieht.

§. 11.

Bei einem (ohne Widerstand der Luft) frei fallenden Körper, der die Masse m hat, ist nach Verfluß der $t$ten Sekunde vom Anfange des Falles an gerechnet, die Geschwindigkeit der einzelnen Atome $= g \cdot t$ (I. Th. Mech. §. 33. Anmerk.), daher die „Größe der Bewegung" des Körpers zu Ende dieser Zeit t, $= mv = mgt$.

Dagegen ist die bewegende Kraft zu Ende der Zeit t (und, in so ferne wir hier die örtliche Schwere g in den verschiedenen Höhen als konstant uns denken, auch zu jeder andern Zeit) auf die Stoß-Einheit bezogen, $= mg \cdot dt$, also auf die Druck-Einheit bezogen, $= m \cdot g$.

Die bewegende Kraft eines frei fallenden Körpers ist aber offenbar das, was wir (im II. Th. §. 45.) sein Gewicht genannt haben. Da nun (nach II. Th. §. 47.) dasselbe Gewicht auch durch mg ausgedrückt sich findet, sobald man zur Massen-Einheit das $g$fache der Masse nimmt, welche die Gewichts-Einheit repräsentirt, oder, was dasselbe ist, sobald man zur Gewichts-Einheit das Gewicht des $g$ten Theils der Massen-Einheit nimmt, so folgt hieraus:

*) Denkt man sich, wenn $g \cdot dt$ die (örtliche) Schwere ist, daß eine Masse $m' = \frac{1}{g}$ von der Schwere $g \cdot dt$ als beschleunigender Kraft ergriffen wird, so hat diese Masse eine bewegende Kraft, welche wiederum die hier angenommene Kraft-Einheit ist, womit wir alle bewegenden Kräfte messen wollen.

1) Die obige Druck-Einheit, mit welcher wir alle bewegenden Kräfte messen wollen, ist allemal die Gewichts-Einheit, wenn Massen- und Gewichts-Einheiten so auf einander bezogen werden, wie solches eben erwähnt worden ist.

2) Nehmen wir dabei das Pfund (U. des II. Th. §. 49.) zur Gewichts-Einheit, so ist die hier zu Grunde gelegte Massen-Einheit diejenige Masse, welche genau g U. wiegt.

3) Nehmen wir aber eine beliebige Masse zur Massen-Einheit, so ist die zu Grunde gelegte Gewichts-Einheit der gte Theil des Gewichtes der Massen-Einheit; wenn nämlich mg das Gewicht der Masse m ausdrücken, und die Druck-Einheit von der Gewichts-Einheit nicht verschieden seyn soll.

§. 12.

In Untersuchungen über die Bewegung der Massen kommen immer die gewonnenen unendlich-kleinen Geschwindigkeiten, und daher auch die gewonnenen unendlich-kleinen „Größen der Bewegung" in Betrachtung zugleich mit den auf's Neue gewirkt habenden bewegenden Kräften. — Beide Arten von Kräften müssen daher auf eine und dieselbe Kraft-Einheit bezogen werden, und zwar entweder beide auf die Druck-Einheit, oder beide auf die Stoß-Einheit. — Legt man die Stoß-Einheit zu Grunde, so darf das Gewicht einer Masse m, welches auf die Druck-Einheit bezogen, durch mg ausgedrückt ist, nicht anders als durch $mg \cdot dt$ ausgedrückt werden (weil die Stoß-Einheit das $\frac{1}{dt}$fache der Druck-Einheit ist).

Legt man aber die Druck-Einheit zu Grunde, so darf ein Zuwachs an Größe der Bewegung, welcher, wenn er auf die Stoß-Einheit bezogen wird, $= m \cdot dv$ ist, nur durch $m \cdot \frac{dv}{dt}$ oder $m \cdot \partial v_t$ ausgedrückt werden aus demselben Grunde.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn auf den Schwer-Punkt einer Masse m von Q Pfun-

den eine bewegende Kraft von P Pfunden stetig und in derselben Richtung wirkt, so hat der Schwer-Punkt, und auch jeder andere Atom des Körpers Q, dieselbe Bewegung, wie wenn auf jeden Atom von m eine beschleunigende Kraft

$$= \frac{P}{Q} \cdot g$$

gewirkt hätte.

Denn es vertheilt sich die Kraft P unter die Masse m oder $\frac{Q}{g}$; also kommt auf jeden Theil der Quotient $\frac{P}{m}$ oder $\frac{P}{Q:g}$, d. h. $\frac{P}{Q} \cdot g$.

Oder, ausführlicher und deutlicher:

Da jeder Atom von m bei einer einmaligen Wirkung von P den unbekannten Zuwachs an Geschwindigkeit $\varphi \cdot dt$ annimmt, so ist der im nächsten Moment von der Masse m gewonnene „Zuwachs an Größe der Bewegung" offenbar $= m\varphi \cdot dt$, oder, auf die Druck-Einheit bezogen, $= m\varphi$. — Diese Größe der Bewegung $m\varphi$ ist der Kraft P, welche sie hervorgebracht hat, nothwendig gleich, sobald letztere auf dieselbe Druck-Einheit bezogen wird. Also hat man

1) $$P = m \cdot \varphi, \quad \text{d. h.} \quad \varphi = \frac{P}{m}.$$

Es ist aber auch, weil Q das Gewicht der Masse m ist,

2) $$Q = m \cdot g, \quad \text{oder} \quad m = \frac{Q}{g}.$$

Eliminirt man nun m aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

$$\varphi = \frac{P}{Q} \cdot g.$$

Beispiel 1. Die beschleunigende Kraft zu finden, mit welcher ein Gewicht Q, nachdem es unter Wasser gesetzt ist, zu Boden sinkt.

Es sey W das Gewicht des vertriebenen Wassers, welches von dem umgebenden Wasser getragen worden wäre, um welches also der Druck Q im Wasser verändert ist, — so bleibt die Kraft (Q — W)u. übrig, welche auf die Masse von Q u. wirkt; daher ist die gesuchte beschleunigende Kraft φ so, daß sie aus der Gleichung

$$\varphi = \frac{Q - W}{Q} \cdot g.$$

berechnet werden kann.

Ist δ die Dichtigkeit der Masse Q, so ist

$$Q = \delta W,$$

folglich

$$\varphi = \frac{\delta - 1}{\delta} \cdot g = \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \cdot g = g - \frac{1}{\delta} g.$$

Es findet daher eine Bewegung im Sinne der Schwere statt, so oft $\frac{1}{\delta} < 1$, d. h. $\delta > 1$; dagegen findet eine Bewegung nach oben, der Richtung der Schwere genau entgegen, statt, so oft $\frac{1}{\delta} > 1$, d. h. $\delta < 1$ und die Anfangs-Geschwindigkeit Null seyn sollte. Ist im letztern Fall die Anfangs-Geschwindigkeit nach unten gerichtet, so geht der Körper erst nach unten, bis diese Geschwindigkeit nach und nach mehr und zuletzt ganz vernichtet ist; dann wieder nach oben.

Und für $\delta = 1$ wird die beschleunigende Kraft $= 0$; daher geht der Körper Q dann mit seiner Anfangs-Geschwindigkeit gleichförmig fort; oder er ruht, wenn letztere Null ist.

Beispiel 2. Auf einer horizontalen Unterlage (Fig. 3.) liegt ein Gewicht S, welches mittelst eines Fadens, der über einen unbeweglichen Stift (Cylinder) geht, mit einem andern Gewichte R zusammenhängt, so daß R in vertikaler Richtung herunter zieht, während das andere Ende des Fadens an S, horizontal läuft. Man soll die beschleunigende Kraft finden, welche die Bewegung von R (d. h. jedes Atoms von R) bestimmt.

Die zu bewegende Masse hat hier, wenn das Gewicht des Fadens außer Acht gelassen wird, das Gewicht R+S. Die Kraft, welche diese in Bewegung setzen soll, ist, wenn man Widerstand der Luft, die Steifigkeit des Fadens und die Reibung am Stifte außer Acht läßt, offenbar $= R - \mu S$, wenn μS die Reibung des Gewichtes S auf der horizontalen Unterlage bedeutet. Folglich ist die gesuchte beschleunigende Kraft φ so, daß man

$$\varphi = \frac{R - \mu S}{R + S} \cdot g$$

hat.

Beispiel 3. Die beschleunigende Kraft φ einer Masse, deren Gewicht S ist, welche längs einer mit dem Horizont den Winkel α bildenden schiefen Ebene (Fig. 1.) heruntergleitet, während die Reibung der Bewegung entgegenwirkt, ist nach derselben Formel

$$= \frac{S \cdot \sin\alpha - \mu S \cdot \cos\alpha}{S} \cdot g;$$

also auch

$$= (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \cdot g.$$

Denn es ist $S \cdot \cos\alpha$ der senkrechte Druck des Gewichtes S auf die schiefe Ebene, daher $\mu S \cdot \cos\alpha$ die Reibung; während $S \cdot \sin\alpha$ die in der Richtung der schiefen Ebene wirkende Kraft des Gewichtes S ist. Daher ist $S \cdot \sin\alpha - \mu S \cdot \cos\alpha$ die Kraft, welche die Masse vom Gewichte S in Bewegung zu setzen hat.

Mehrere andere hieher gehörige Beispiele wird das dritte Kapitel noch gelegentlich an die Hand geben.

Anmerk. Hat man aber die beschleunigende Kraft φ des Schwer-Punktes einer Masse gefunden, und ist v dessen Geschwindigkeit und s der von ihm zurückgelegte Raum, alles zu einer und derselben Zeit t, so hat man (nach I. Th. Mech. §. 33.) die beiden Gleichungen der Bewegung

I. $\partial s_t = v$; II. $\partial v_t = \varphi$;

welche dann (nach I. Th. Mech. Kap. IV.) weiter behandelt werden müssen, wenn jede einzelne weitere Frage beantwortet werden soll.

Ist namentlich φ (nach t) konstant, so ist

1) $v = \varphi \cdot t + c$

und 2) $s = \frac{1}{2}\varphi \cdot t^2 + ct$,

wenn c die Anfangs-Geschwindigkeit vorstellt, und wenn der Raum s mit der Zeit t zugleich anfängt.

§. 14.

I. **Wenn zwei gleiche und konstante Kräfte P und P′ auf** die Druck-Einheit bezogen (oder $P \cdot dt$ und $P' \cdot dt$, wenn sie auf die Stoß-Einheit bezogen werden) auf die Schwer-Punkte zweier verschiedenen Massen m und m′, eine und dieselbe Zeit t hindurch stetig und immer in derselben Richtung wirken und den Massen m und m′ gleichzeitig die Geschwindigkeiten v und v′ beibringen, so haben sie gleichzeitig allemal einerlei Größe der Bewegung, d. h. es ist allemal

$$mv \doteq m'v'.$$

Und umgekehrt: haben zwei Massen m und m′ gleichzeitig einerlei Größe der Bewegung, so sind die konstanten Kräfte P und P′, deren stetige Wirkung diese Bewegungen hervorgebracht haben, allemal einander gleich.

Denn (nach §. 13.) haben die Massen m und m′ die Bewegung, wie wenn jeder Atom derselben bezüglich die beschleunigende Kraft $\frac{P}{m}$ und $\frac{P'}{m'}$ *) hätte, welche dabei nach der Voraussetzung konstant sind. Also ist nach Verfluß einer und derselben Zeit t (nach §. 2. Anmerk.)

$$v = \frac{P}{m} \cdot t \qquad \text{und} \qquad v' = \frac{P'}{m'} \cdot t;$$

oder

$$mv = P \cdot t \qquad \text{und} \qquad m'v' = P't;$$

und aus diesen Gleichungen gehen beide Behauptungen hervor.

II. Wirken wiederum zwei konstante und gleiche Kräfte auf die Massen m und m′ stetig und in derselben Richtung, und sind v und v′ die Geschwindigkeiten, welche vorhanden sind, nachdem jede der beiden Massen m und m′ gleiche Räume durchlaufen haben, so ist allemal

$$mv^2 = m'v'^2.$$

Und umgekehrt: Sind die Produkte mv^2 und $m'v'^2$ einander gleich, unter der Voraussetzung, daß konstante und stetige Kräfte P und P′ auf die Massen m und m′ gewirkt, und nach irgend, von den Massen m und m′ durchlaufenen gleichen Räumen die Geschwindigkeiten v und v′ hervorgebracht haben, so sind die Kräfte P und P′ allemal einander gleich.

Denn es sind

$$\frac{P}{m} \qquad \text{und} \qquad \frac{P'}{m'}$$

die beschleunigenden Kräfte der Schwer-Punkte von m und m′; daher sind

$$1) \quad \frac{P}{m} \cdot t = v \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \frac{P'}{m'} \cdot t' = v'$$

die Geschwindigkeiten zu den verschiedenen Zeiten t und t′, in denen die gleichen Wege s durchlaufen sind; und

$$\tfrac{1}{2}\frac{P}{m} \cdot t^2 \qquad \text{und} \qquad \tfrac{1}{2}\frac{P'}{m'} \cdot t'^2$$

sind diese gleichen Wege s selbst (alles nach I. Th. Mechanik §§. 32. 33. oder nach §. 2. Anmerk. dieses Bandes.).

Man hat also

---

*) Es ist nämlich mg das Gewicht des Masse m; folglich ist die beschleunigende Kraft jedes Atoms von m (nach §. 13.) $= \frac{P}{mg} \cdot g$, also $= \frac{P}{m}$ — u. s. w.

3) $$\frac{P}{m}.t^2 = \frac{P'}{m'}.t'^2.$$

Substituirt man hier statt t und t' ihre Werthe aus (1. und 2.), so erhält man

4) $$\frac{m}{P}.v^2 = \frac{m'}{P'}.v'^2.$$

Ist also

$$P = P'$$

vorausgesetzt, so ist auch nothwendig aus (4.)

$$mv^2 = m'v'^2.$$

Ist aber

$$mv^2 = m'v'^2$$

vorausgesetzt, so folgt (aus 4.) sogleich

$$P = P'.$$

§. 15.

Von der lebendigen Kraft.

Das Produkt aus der Masse m in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit v zu irgend einer Zeit t wird die **lebendige Kraft** der Masse m zu dieser Zeit t, genannt; immer unter der Voraussetzung, daß alle Atome der Masse m die parallelen und gleichen Geschwindigkeiten v haben.

Wirken also auf zwei verschiedene Massen m und m' gleiche und konstante Kräfte stetig in derselben Richtung, so sind in den entstehenden Bewegungen

1) zu Ende einer und derselben Zeit (während die durchlaufenen Räume verschieden sind) die **Größen der Bewegung** einander gleich;

2) nach gleichen durchlaufenen Räumen aber (also zu verschiedenen Zeiten), sind die **lebendigen Kräfte** einander gleich. —

Und beide Sätze gelten auch umgekehrt.

Zweite Abtheilung.

Wenn die Geschwindigkeiten der einzelnen Atome ganz beliebig sind. Der d'Alembert'sche Lehrsatz.

§. 16.

In dem andern Falle, wo die einzelnen Atome der bewegten Masse eine und dieselbe Geschwindigkeit in parallelen Richtungen nicht haben, kann doch sowohl die Größe als auch die Richtung der Geschwindigkeiten zweier dicht neben einander liegenden Atome nur unendlich wenig von einander verschieden seyn, weil wir hier feste Körper voraussetzen.

Zerlegt man daher den ganzen Körper in unendlich viele unendlich-kleine Massentheilchen (Elemente), so kann man immer annehmen, daß alle Atome eines solchen unendlich-kleinen Massen-Elementes einerlei Geschwindigkeit in parallelen Richtungen haben, daß also Größe und Richtung der Geschwindigkeit nur von Element zu Element sich ändert. — Alles bisher (in der ersten Abtheilung dieses Kapitels) Gesagte gilt also unverändert für jedes unendlich-kleine Massen-Element bei jeder beliebigen Bewegung.

Bei der Bewegung der Massen denkt man sich daher die Masse nicht mehr in Atome zerlegt, sondern in solche Massen-Elemente (Molécules), deren jedes wieder beliebig viele Atome enthalten kann. Spricht man dann von der Geschwindigkeit, oder von der beschleunigenden Kraft, oder von der Bewegung des Elements, so versteht man allemal die Geschwindigkeit, die beschleunigende Kraft oder die Bewegung seines Schwer-Punktes darunter.

Für die beliebige Bewegung fester Körper finden sich nun sogleich folgende Hauptpunkte zu beachten:

1) Jedes einzelne Massen-Element des festen Körpers hat seine eigene Bewegung, welche von der des andern oft sehr verschieden seyn kann.

2) Die Bewegung des einen Elementes kann durch die Bewegung des andern mit ihm fest oder lose zusammenhängenden verändert (gefördert oder gehindert) werden.

3) Die unmittelbaren Wirkungen der auf die einzelnen Elemente wirkenden bewegenden Kräfte werden vermöge des Zusammenhanges der bewegten Elemente unter sich modificirt, so daß die wirkliche Aenderung der Bewegung eines Elementes das Resultat ist, aus jener bewegenden Kraft und den Einwirkungen der rings herum mit ihm zusammenhängenden Elemente auf dasselbe.

Dieses alles wird nun genau durch ein ganz allgemeines Gesetz bestimmt, welches wir den Lehrsatz des d'Alembert nennen.

§. 17.

D'Alembert's Lehrsatz.

I. Man denkt sich nämlich das ganze in Bewegung begriffene feste oder lose System zu Ende irgend einer Zeit t, so hat jedes Element m der Masse gerade jetzt in irgend einer Richtung irgend eine Geschwindigkeit v, also auch eine „Größe der Bewegung" mv. Zu Ende des darauf folgenden Zeittheilchens dt findet sich die Geschwindigkeit v der Richtung und Größe nach (oder nur in einer dieser beiden Beziehungen) geändert; die neue Geschwindigkeit des Elementes m sey $= w$, die neue Größe der Bewegung also $= m \cdot w$, und dabei entweder in der alten oder in irgend einer neuen Richtung.

II. Diese Aenderung an Größe und Richtung der Bewegung des Elementes m verdankt dasselbe den in diesem Zeittheilchen dt auf die einzelnen Elemente gewirkt habenden Kräften, von denen wir die auf das Element m eingewirkt habende durch mk vorstellen wollen. Es sey z. B. (Fig. 7.) das Element m in A, und AB die Größe und Richtung der alten „Größe der Bewegung" $m \cdot v$ (zu Ende der Zeit t), dagegen AC die Größe und Richtung der neuen „Größe der Bewegung" $m \cdot w$ (zu Ende der Zeit $t + dt$), so wie AD die Größe und Richtung der, zu

Ende der Zeit t an das Element m neu hinzugetretenen Kraft m·k. Ergänzt man nun das Dreieck ABC zu dem Parallelogram ABCE und dann das Dreieck ADE zu dem Parallelogram AEDF *), so kann man sich die Kraft m·k = AD in die beiden Seiten-Kräfte AF = m·p und AE = m·q zerlegt denken, von denen die letztere mit AB = m·v in Verbindung die neue „Größe der Bewegung" m·w gerade hervorbringt, während die erstere AF = m·p von der Einwirkung der übrigen Elemente vernichtet worden ist, in so ferne außer der neuen Größe der Bewegung m·w keine weitere Kraft (in demselben Elemente m) vorhanden ist.

III. Hat man auf diese Weise für jedes Element m die Kraft m·p = AF gefunden, der Größe und Richtung nach, welche durch die Einwirkung der übrigen Elemente vernichtet, und welche deshalb die verlorne Kraft genannt wird, so hat man alle die Kräfte, welche sich vermöge des (festen oder losen) Zusammenhanges der Elemente in der bewegten Masse, in demselben Augenblicke einander gegenseitig vernichten.

IV. Spricht man dieses nun so aus: „In jedem bewegten (festen oder losen) System halten sich die von den einzelnen Massen-Elementen m, m′, m″, ꝛc. ꝛc. in dem Zeittheilchen dt verlorenen Kräfte m·p, m′·p′, m″·p″, ꝛc. ꝛc. vermöge des gegenseitigen Zusammenhanges aller Massen-Elementchen, einander das Gleichgewicht". — so hat man den d'Alembert'schen Lehrsatz. Die vorstehende Zergliederung (I. — III.) ist aber ein strenger Beweis desselben.

V. Sehr wichtig ist es dabei, daß man bemerke, wie eben nur diese verlorenen Kräfte m·p, m′·p′, m″·p″, ꝛc. ꝛc., die sich im System in diesem Augenblicke dt (der unmittelbar nach t kommt) im Gleichgewicht halten (d. h. sich gegenseitig vermöge des Zusammenhanges der Elemente des bewegten Systems aufheben und vernichten) die verschiedenen Drucke,

*) Diese beiden Parallelogramme können natürlich in verschiedenen Ebenen liegen.

Spannungen oder sonstigen Einwirkungen der Elemente gegen einander verursachen können. — Indem man also das Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften nach den Gesetzen der Statik loser Systeme bedingt, müssen sich auch alle Drucke, Spannungen, x. x. zwischen den einzelnen Elementen während der Bewegung, wie solche in diesem unmittelbar nach t folgenden unendlich-kleinen Zeittheilchen dt gerade seyn werden, und so weit sie einer allgemeinen Bestimmung fähig sind, auf das genaueste mit ergeben.

VI. Da nach dem Kräften-Parallelogramm die verlorene Kraft $AF = m \cdot p$ allemal auch die mittlere Kraft ist, zwischen der neu hinzugetretenen Kraft $m \cdot k$ und der in entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft $m \cdot q = AG$, — letztere AG aber offenbar wiederum die mittlere Kraft ist aus der anfänglichen Größe der Bewegung $m \cdot v = AB$ und der in entgegengesetzter Richtung genommenen $m \cdot w = AH$, — so ist die verlorene Kraft $m \cdot p = AF$ allemal zusammengesetzt 1) aus der anfänglichen Größe der Bewegung $m \cdot v = AB$; 2) aus der dann neu hinzugetretenen Kraft $m \cdot k = AD$ und 3) aus der in entgegengesetzter Richtung genommenen neuen Größe der Bewegung $m \cdot w = AH$.

VII. In so ferne also diese drei letztern Kräfte die verlorene Kraft $m \cdot p$ ersetzen, so darf man nur bei jedem einzelnen Element m, m', m'', x. x. diese drei letzt genannten Kräfte angeben, und zuletzt für alle diese Kräfte das Gleichgewicht bedingen, so hat man das Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften, — wie solches nach dem d'Alembert'schen Lehrsatze statt finden muß. Diese Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts sind aber nun die Gleichungen, aus denen die Unbekannten der Bewegung bestimmt werden müssen. — Dieselben Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts bestimmen aber zugleich auch alle Drucke, Spannungen oder sonstige Einwirkungen der Elemente auf einander, in so weit solche einer allgemeinen Bestimmung fähig sind.

VIII. Und weil dieser Lehrsatz des d'Alembert für

alle Aufgaben der Bewegung den Ansatz (der Gleichungen) enthält, folglich jeder Untersuchung der Dynamik zu Grunde liegt, so wird er auch das „allgemeine Princip der Dynamik," auch das d'Alembert'sche Princip genannt.

§. 18.

Praktische Formen des d'Alembert'schen Princips.

Für den praktischen Bedarf kann man das Princip in zwei besondern Haupt-Fällen betrachten.

I. Setzen wir zunächst den Fall, daß alle Geschwindigkeiten v, v' 2c. 2c. ihre Richtung nicht, sondern bloß ihre Größe ändern, so ist $m \cdot q = m \cdot w - m \cdot v = m \cdot (w - v)$. Die Kräfte $m \cdot k$, $m' \cdot k'$, $m'' \cdot k''$, 2c. 2c., und die Zuwachse $m \cdot (w - v)$, $m' \cdot (w' - v')$, $m'' \cdot (w'' - v'')$, 2c. 2c. der Kräfte, letztere in der entgegengesetzten Richtung der Geschwindigkeiten v, v', v'', 2c. 2c. genommen, repräsentiren daher nun in Vereinigung mit einander die verlorenen Kräfte, welche sich nach dem d'Alembert'schen Princip am System einander im Gleichgewicht erhalten.

A. Sind die Kräfte $m \cdot k$, $m' \cdot k'$, 2c. 2c. (nicht bewegende Kräfte, sondern) „Größen der Bewegung" (Stöße), so werden die in der Zeit dt von den Elementen m, m', 2c. 2c. gewonnenen Geschwindigkeiten $w - v$, $w' - v'$, 2c. 2c. endliche seyn, und man sagt dann: „es sey eine plötzliche Aenderung (changement brusque) der Geschwindigkeiten (oder der Bewegung) eingetreten."

B. Sind aber die Kräfte $m \cdot k$, $m' \cdot k'$, 2c. 2c. „bewegende Kräfte" (d. h. gegen Stöße gehalten unendlich-klein), und bezüglich durch $m\varphi \cdot dt$, $m'\varphi' \cdot dt$, 2c. 2c. vorgestellt, während φ, φ', 2c. 2c. konstant oder Funktionen der Zeit t sind, so erstreckt sich das einmal aufgefaßte Gesetz der Geschwindigkeiten auf die Zeit t und auf die nächste Zeit $t + dt$ gleichmäßig, d. h. es ist dann

$$w = v_{t+dt}, \quad \text{also} \quad w - v = \partial v_t \cdot dt = dv;$$

eben so

$$w' = v'_{t+dt}, \quad \text{also} \quad w' - v' = \partial v'_t \cdot dt = dv';$$

u. s. w. f.; und es repräsentiren nun die Kräfte $m\varphi \cdot dt$, $m'\varphi' \cdot dt$, ꝛc. ꝛc. in ihren Richtungen, und die Kräfte $m \cdot dv$, $m' \cdot dv'$, ꝛc. ꝛc. in Richtungen, welche den Geschwindigkeiten v, v', ꝛc. ꝛc. bezüglich entgegengesetzt gedacht werden, alle verlorenen Kräfte, welche (nach dem d'Alembert'schen Princip) am System einander das Gleichgewicht halten.

II. Sind aber die neuen Geschwindigkeiten w, w', ꝛc. ꝛc. nicht bloß ihrer Größe, sondern auch ihrer Richtung nach von den alten v, v', ꝛc. ꝛc. verschieden, so kann man drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ sich denken, und sowohl die alten als auch die neuen Geschwindigkeiten (z. B. v und w), mithin auch die alten und die neuen „Größen der Bewegung" ($m \cdot v$ und $m \cdot w$) parallel mit den drei Axen in drei Seiten-Geschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3) und drei Seiten-Kräfte ($m \cdot v_1$, $m \cdot v_2$, $m \cdot v_3$ und $m \cdot w_1$, $m \cdot w_2$, $m \cdot w_3$) zerlegen. Die parallel mit den Koordinaten-Axen in dem Zeittheilchen dt gewonnenen Kräfte sind daher für das Element m bezüglich $m \cdot (w_1 - v_1)$, $m \cdot (w_2 - v_2)$ und $m \cdot (w_3 - v_3)$. Ganz analoge gewonnene Kräfte parallel mit den Axen OX, OY, OZ finden sich für das Element m', und für die übrigen Massen-Elemente m'', ꝛc. ꝛc.

Die Kräfte $m \cdot k$, $m' \cdot k'$, ꝛc. ꝛc., und die mit den Axen parallel genommenen Kräfte

$$-m \cdot (w_1 - v_1), \quad -m \cdot (w_2 - v_2), \quad -m \cdot (w_3 - v_3);$$
$$-m' \cdot (w'_1 - v'_1), \quad -m' \cdot (w'_2 - v'_2), \quad -m' \cdot (w'_3 - v'_3);$$

u. s. w. f. stehen daher nun in ihrer Gesammtheit an der Stelle der verlorenen Kräfte, welche sich am System einander im Gleichgewicht halten.

A. Hat das System in diesem Zeittheilchen dt plötzliche Veränderungen der Bewegung erlitten, d. h. sind die Kräfte $m \cdot k$, $m' \cdot k'$, ꝛc. ꝛc. (nicht bewegende Kräfte, sondern) „Größen der Bewegungen" (Stöße), so haben $w_1 - v_1$, $w_2 - v_2$, $w_3 - v_3$, $w'_1 - v'_1$, $w'_2 - v'_2$, ꝛc. ꝛc. im Allgemeinen endliche Werthe.

B. Sind aber die Kräfte $m \cdot k$, $m' \cdot k'$, ꝛc. ꝛc., welche an das System zu Ende der Zeit t neu hinzutreten, die „bewegenden

Kräfte $m\varphi \cdot dt$, $m'\varphi' \cdot dt$, ꝛc. gewesen, wofür die parallel mit den drei Axen zerlegten bewegenden Kräfte $mX \cdot dt$, $mY \cdot dt$, $mZ \cdot dt$; $m'X' \cdot dt$, $m'Y' \cdot dt$, $m'Z' \cdot dt$; ꝛc. ꝛc. gesetzt werden können, so ist $w_1 = v_1 + dv_1$, $w_2 = v_2 + dv_2$, $w_3 = v_3 + dv_3$, $w'_1 = v'_1 + dv'_1$, u. s. w. f., und die verlorenen Kräfte sind dann

$$m \cdot (X \cdot dt - dv_1),\ m' \cdot (X' \cdot dt - dv'_1),\ m'' \cdot (X'' \cdot dt - dv''_1),\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$
parallel mit OX,

$$m \cdot (Y \cdot dt - dv_2),\ m' \cdot (Y' \cdot dt - dv'_2),\ m'' \cdot (Y'' \cdot dt - dv''_2),\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$
parallel mit OY,

$$m \cdot (Z \cdot dt - dv_3),\ m' \cdot (Z' \cdot dt - dv'_3),\ m'' \cdot (Z'' \cdot dt - dv''_3),\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$
parallel mit OZ,

wo die Zeichen dv_1, dv'_1, dv''_1, dv_2, ꝛc. ꝛc. die unendlich-kleinen Zuwachse bedeuten, welche die Seiten-Geschwindigkeiten v_1, v'_1, v''_1, v_2, ꝛc. ꝛc. als Funktionen der Zeit t dadurch erleiden, daß man $t + dt$ statt t setzt, so daß man

$$dv_1 = \partial(v_1)_t \cdot dt, \qquad dv'_1 = \partial(v'_1)_t \cdot dt,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

hat.

Sind nun x, y, z die Koordinaten-Werthe von dem Schwer-Punkte des Elementes m; und haben x', y', z'; x'', y'', z''; ꝛc. ꝛc. die analoge Bedeutung, so hat man

$$v_1 = \partial x,\ v_2 = \partial y,\ v_3 = \partial z,\ v'_1 = \partial x',\ v'_2 = \partial y',\ v'_3 = \partial z',$$

ꝛc. ꝛc.; folglich ist auch

$$dv_1 = \partial^2 x \cdot dt, \quad dv_2 = \partial^2 y \cdot dt, \quad dv_3 = \partial^2 z \cdot dt;$$
$$dv'_1 = \partial^2 x' \cdot dt, \quad dv'_2 = \partial^2 y' \cdot dt, \quad dv'_3 = \partial^2 z' \cdot dt;$$

ꝛc. ꝛc., wo alle (runden) ∂ Differenzial-Koeffizienten nach t genommen, vorstellen; — und die verlorenen Kräfte sind daher nun

$$m \cdot (X - \partial^2 x) \cdot dt,\ m' \cdot (X' - \partial^2 x') \cdot dt,\ m'' \cdot (X'' - \partial^2 x'') \cdot dt,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$
parallel mit OX,

$$m \cdot (Y - \partial^2 y) \cdot dt,\ m' \cdot (Y' - \partial^2 y') \cdot dt,\ m'' \cdot (Y'' - \partial^2 y'') \cdot dt,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$
parallel mit OY,

$$m \cdot (Z - \partial^2 z) \cdot dt,\ m' \cdot (Z' - \partial^2 z') \cdot dt,\ m'' \cdot (Z'' - \partial^2 z'') \cdot dt,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$
parallel mit OZ.

Diese drei Reihen verlorener Kräfte müssen nun nach dem d'Alembert'schen Princip einander das Gleichgewicht halten.

Stellt man aber in jedem Einzel-Falle nach den Gesetzen

der Statik alle Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts zwischen den verlorenen Kräften hin, so hat man alle Gleichungen der Bewegung. Verbindet man damit die Gleichungen, welche aus dem geometrischen Zusammenhange der Figur hervorgehn, so hat man alle diejenigen Gleichungen, welche zur Bestimmung der Unbekannten im Allgemeinen nur immer gefunden werden können.

In einzelnen besondern Fällen der Anwendung können dann noch immer besondere Eigenschaften der gerade vorhandenen Materie (also sogenannte physikalische Eigenschaften) mit in Betrachtung gezogen werden, um eine Aufgabe, welche in der Natur eine völlig bestimmte ist, auch im Kalkul als eine solche nachzuweisen.

Anmerk. 1. Wir haben übrigens im (I. Th. Mech. §. 37.) bereits das d'Alembert'sche Princip seinem Wesen nach in Anwendung gebracht, als es sich dort darum handelte, die Gleichungen der Bewegung eines Atoms zu erhalten, der entweder ganz frei, oder der gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche, oder auf einer bestimmt vorgeschriebenen Bahn zu bleiben. Das Nachlesen jenes Paragraphen wird daher schon etwas zur Erläuterung unseres jetzigen wichtigen Gesetzes beitragen.

Anmerk. 2. Der große Nutzen dieses Princips und dessen hohe Wichtigkeit besteht übrigens, wie leicht in die Augen fällt, vorzugsweise darin, daß durch dasselbe alle Probleme der Dynamik sogleich auf die bekannten Gleichgewichts-Bedingungen der Statik zurückgeführt werden.

Die gesammte Dynamik fester Körper ist daher, genau genommen, nichts weiter, als eine fortwährende Anwendung des d'Alembert'schen Princips. Denn: das Princip giebt sogleich den Ansatz der Aufgabe (d. h. die Gleichungen); und die Analysis (besonders die Integral-Rechnung) hat dann nur noch die Auflösung der durch den Ansatz erhaltenen Gleichungen dazu zu liefern.

Die Dynamik fester Körper.

Drittes Kapitel.

Einige erläuternde Anwendungen des d'Alembert'schen Princips.

Erste Abtheilung.

Vom Centralstoß zweier Körper.

§. 19.

Unter dem Centralstoß zweier Körper verstehen wir denjenigen Fall des Stoßes, wo, wenn beide Körper sich bewegen, beide Schwer-Punkte in einer und derselben Geraden (hinter oder gegen einander) sich bewegen, und bei dem Stoße in einem Punkte zusammentreffen, welcher in derselben Geraden liegt. — Wir denken uns hier ein- für allemal zwei homogene Kugeln.

§. 20.

Zwei homogene Kugeln, deren Massen m und m' sind, bewegen sich mit ihren Schwer-Punkten in einer Geraden OX, und zwar m hinter m'. In dem Momente, wo sie zusammentreffen, habe m die größere Geschwindigkeit v, m' dagegen die kleinere Geschwindigkeit v'. Die Kugeln drücken sich wegen der ungleichen Geschwindigkeiten, mit der Differenz $v - v'$ dieser letztern zusammen, und dadurch vermindert sich die Geschwindigkeit v und vermehrt sich die Geschwindigkeit v', bis beide Geschwindigkeiten einander gleich und $= u$ geworden sind.

A. Wenn die Kugeln unelastisch sind.

Wirken nun die Körper in diesem zusammengedrückten Zustande nicht auf einander zurück, d. h. hat keiner von beiden das Bestreben, wieder seine vorige Gestalt anzunehmen, so daß sie unelastisch genannt werden, so bleiben sie mit ihrer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u bei einander. Während aber die Kugel m vor dem Stoß die „Größe der Bewegung" mv in der Richtung OX gehabt hat, hat sie jetzt die „Größe der Bewegung" mu; also hat man (nach §. 18. I.) in Bezug auf m die verlorene Kraft mv—mu in der Richtung OX. — Die Masse m' hatte vor dem Stoße die Größe der Bewegung m'v', nach dem Stoße die m'u; folglich ist bei ihr an verlorner Kraft in Rechnung zu bringen m'v'—m'u in der Richtung OX. Da nun diese verlornen Kräfte an den nun vereinten Kugeln einander das Gleichgewicht halten, so hat man die Gleichung

$$mv - mu + m'v' - m'u = 0,$$

welche

$$\text{I.} \qquad u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

liefert *), wo statt der Massen auch ihre Gewichte gesetzt werden können, weil, wenn statt m und m' bezüglich mg und m'g gesetzt werden, der Faktor g sich wieder wegdividirt.

Dieser Werth von u drückt also die Geschwindigkeit aus, mit welcher beide Kugeln nach dem Stoße, während sie dicht an einander bleiben, in der Richtung OX fortgehen werden.

B. Wenn die Körper elastisch sind.

Wirken aber die Körper, nachdem sie sich so lange zusammengedrückt haben, als sie noch verschiedene Geschwindigkeiten hatten, und nachdem sie also nun die gemeinschaftliche Geschwin-

*) Ohne das d'Alembert'sche Princip direkt anzuwenden, hätte man hier auch so sagen können: Die in der Richtung OX vorhandene „Größe der Bewegung" mv+m'v' vertheilt sich unter die Masse m+m', also hat jeder Atom die Geschwindigkeit

$$\frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

digkeit u erlangt haben) auf einander dadurch zurück, daß jeder strebt seine vorige Gestalt wieder einzunehmen, so tritt ein zweiter Theil des Stoßes ein, der dieser Elasticität allein zukommt. Dadurch nämlich, daß die Körper, während sie sich gegen einander stützen, nach und nach ihre vorige Gestalt zum Theil oder ganz wieder annehmen, wird die Geschwindigkeit des erstern m noch einmal vermindert, die des letztern noch einmal vermehrt. Bei den vollkommen elastischen Körpern setzen wir diese Gegenwirkung der Wirkung des erstern Theil des Stoßes genau gleich voraus; bei den unvollkommen elastischen Körpern dagegen setzen wir diese Gegenwirkung dem εfachen der Wirkung des erstern Theil des Stoßes voraus, wo $\varepsilon < 1$ und eine Verhältnißzahl ist, die später durch Versuche ausgemittelt werden muß.

Wir wollen in den nachstehenden Rechnungen zunächst immer diesen letztern Fall voraussetzen, weil er den erstern Fall in sich schließt, wenn man $\varepsilon = 1$ setzt, und für $\varepsilon = 0$ sogar wieder in den Fall der gar nicht elastischen Körper zurücktritt.

Nun hat der Körper m in dem ersten Theil des Stoßes die Geschwindigkeit $v-u$ verloren, verliert jetzt noch einmal $\varepsilon(v-u)$, also ist seine Geschwindigkeit V in der Richtung OX nach gänzlich vollendetem Stoße,

$$= v-(1+\varepsilon)\cdot(v-u) = u-\varepsilon(v-u) = (1+\varepsilon)u-\varepsilon v,$$

d. h.

$$\text{II}_1.\quad V = (1+\varepsilon)u-\varepsilon v = \frac{mv+m'v'-\varepsilon m'(v-v')}{m+m'}.$$

Der andere Körper m' hatte bereits gewonnen die Geschwindigkeit $u-v'$, gewinnt jetzt noch $\varepsilon(u-v')$ und hat daher nach völlig beendigtem Stoße in der Richtung OX die Geschwindigkeit

$$\text{II}_2.\quad V' = (1+\varepsilon)u-\varepsilon v' = \frac{mv+m'v'+\varepsilon m(v-v')}{m+m'}.$$

Mit diesen, allemal einander ungleichen Geschwindigkeiten (so lange nicht $\varepsilon = 0$ ist) gehen aber die beiden Kugeln nach gänzlich beendigtem Stoße aus einander, weil immer $V < V'$ ist *).

*) Für $\varepsilon = 0$ wird $V = V' = u$, wie dies seyn muß.

Anmerk. 1. So lange nicht $\varepsilon = 0$ ist, so lange ist die Geschwindigkeit von m, welche vor dem Stoße die größere war, nach gänzlich beendigtem Stoße die kleinere, so daß m immer weiter hinter m′ zurückbleibt, je länger die Bewegung beider Massen mit denselben konstanten Geschwindigkeiten fortdauert.

Es kann auch die Geschwindigkeit V negativ werden, wenn m gegen m′ klein genug ist; dann geht die Masse m nach gänzlich beendigtem Stoße rückwärts, d. h. ihrer anfänglichen Richtung OX genau entgegen.

Anmerk. 2. Sind die Kugeln vollkommen elastisch; ist also $\varepsilon = 1$, so wird

$$V = 2u - v = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'} = \frac{mv + m'(2v' - v)}{m + m'}$$

und

$$V' = 2u - v' = \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'} = \frac{m'v' + m(2v - v')}{m + m'}.$$

Bei vollkommen elastischen Körpern ist daher

$$V' - V = v - v',$$

d. h. die Differenz der Geschwindigkeiten nach gänzlich beendigtem Stoße ist dann genau dieselbe (nur mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen), wie vor dem Stoße.

§. 21.

Bewegen sich die Körper nicht hinter einander, sondern gegen einander, so bleiben die Resultate des vorhergehenden Paragraphen alle noch gültig, nur daß man v′ als eine negative Zahl in Rechnung bringen muß.

In diesem Falle kann auch u zuweilen negativ sich ausrechnen; dann gehen beide unelastische und mit einander verbundene Kugeln mit dieser (absolut gedachten) Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung weiter.

§. 22.

Betrachten wir noch einige specielle Fälle dieses Centralstoßes zweier Körper.

I. Haben die beiden sich stoßenden Körper, unter den Voraussetzungen des (§. 20.) einerlei Masse, ist also $m = m'$, so wird

$$u = \frac{v + v'}{2},$$

also

$$V = \frac{v + v'}{2} - \varepsilon \cdot \frac{v - v'}{2} \quad \text{und} \quad V' = \frac{v + v'}{2} + \varepsilon \cdot \frac{v - v'}{2};$$

und für $\varepsilon = 1$, d. h. bei vollkommen elastischen Kugeln, wird

$$V = v' \quad \text{und} \quad V' = v.$$

In diesem Falle gleicher Masse ist also

a) bei unelastischen Körpern die Geschwindigkeit der vereinigten Masse nach dem Stoße das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten v und v' vor dem Stoße; dagegen ist

b) bei elastischen Körpern die Geschwindigkeit von m nach dem Stoße kleiner als dieses arithmetische Mittel $\frac{v + v'}{2}$; die von m' dagegen größer als $\frac{v + v'}{2}$.

c) Bei vollkommen elastischen Körpern endlich tauschen sich die Geschwindigkeiten der Körper, sobald ihre Massen einander gleich sind, gegenseitig aus. — Ist also vor dem Stoße m' ruhend, so ruht nach dem Stoße die Masse m, und m' hat die Geschwindigkeit, welche m vorher hatte.

Und dies alles gilt, auch wenn die Körper vor dem Stoße einander entgegen kommen, wenn man nur dann v' negativ in Rechnung bringt.

II. Sind die Massen m und m' beliebig; ist dagegen $v' = 0$, d. h. ist die Masse m' ruhend, so wird

$$u = \frac{m}{m + m'} \cdot v, \qquad v - u = \frac{m'}{m + m'} \cdot v;$$

und

$$V = \frac{m - \varepsilon m'}{m + m'} \cdot v, \quad \text{so wie} \quad V' = \frac{m + \varepsilon m}{m + m'} \cdot v.$$

a) Bei nicht elastischen Körpern ist also die Geschwindigkeit u der vereinten Masse $m + m'$, in dem Verhältniß wie m zu $m + m'$ kleiner, als die Geschwindigkeit v von m vor dem Stoße.

b) Bei vollkommen elastischen Körpern dagegen wird

$$V = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot v \quad \text{und} \quad V' = \frac{2m}{m + m'} \cdot v = 2u.$$

III. Wird $v' = 0$ und zugleich die Masse m' gegen m unendlich groß vorausgesetzt, so daß $\frac{m}{m'}$ ein unendlich-kleiner Bruch wird; bewegt sich also die Masse m mit der Geschwindigkeit v vor dem Stoße gegen die ruhende und unendlich große Masse m', so wird

$$u = 0;$$

und bei vollkommen elastischen Körpern wird

$$V = -v \quad \text{und} \quad V' = 0 \text{ *)},$$

d. h. der vollkommen elastische Körper m prallt von dem vollkommen elastischen und ruhenden Körper m', der gegen m unendlich groß ist, mit derselben Geschwindigkeit v zurück, mit welcher er gekommen ist, während der letztere ruhend bleibt.

IV. Ist (wie in III.) m' gegen m unendlich groß aber nicht $v' = 0$, so wird

$$u = v'$$

und

$$V = v' - \varepsilon(v - v') \quad \text{und} \quad V' = v',$$

daher bei vollkommen elastischen Körpern

$$V = 2v' - v \quad \text{und} \quad V' = v'.$$

V. Ist m' gegen m unendlich-klein, also $\frac{m'}{m} = 0$, so wird

$$u = v,$$

dagegen

*) Man muß die allgemeinen Resultate (des §. 20.) dadurch umändern, daß man Zähler und Nenner durch m' dividirt, dabei aber überall, wo $\frac{m}{m'}$ erscheint, Null dafür schreibt.

$$V = v \quad \text{und} \quad V' = v + \varepsilon(v - v');$$

daher bei vollkommen elastischen Körpern

$$V = v \quad \text{und} \quad V' = 2v - v' \text{ *)}.$$

Und sollte die unendlich-kleine Masse m' vor dem Stoße zu gleicher Zeit ruhend, also $v' = 0$ seyn, so würde, bei vollkommen elastischen Körpern nach dem Stoße

$$V = v \quad \text{und} \quad V' = 2v$$

werden.

Anmerk. Newton hat den Widerstand der Luft (oder eines sonstigen widerstehenden Mittels) als eine Folge der, in allen auf einander folgenden unendlich-kleinen Zeittheilchen dt sich wiederholenden Stöße des bewegten festen Körpers gegen die Luft angesehen, indem er die in der Zeit dt von dem bewegten festen Körper vertriebene Luft als ganz isolirt von der übrigen annahm, und nur diese zu vertreibende Luftmasse als das vorhandene Hinderniß der Bewegung in Rechnung brachte. Auf diesem Wege bringt man sehr bald heraus, daß das Hinderniß der Luft, als bewegende Kraft berechnet, mit dem Quadrat der Geschwindigkeit des sich bewegenden festen Körpers proportional ist **).

*) Man muß wieder die allgemeinen Resultate (des §. 20.) nehmen, in selbigen aber dasmal Zähler und Nenner mit m wegdividiren, und dann Null statt $\frac{m'}{m}$ setzen.

Die Resultate (III. — V.) sind natürlich desto mehr genähert, je mehr die Voraussetzung erfüllt ist.

**) Es sey z. B. der bewegte feste Körper ein Cylinder, dessen Grundfläche ω und Masse m ist, und welcher sich gegen das widerstehende Mittel (Luft, Wasser &c. &c.) senkrecht auf ω bewegt. Der Weg seiner Grundfläche ω sey $= x$, seine Geschwindigkeit $= v$ (zu Ende der Zeit t), so rückt er in der Zeit dt um dx oder $\partial x_t \cdot dt$ oder $v \cdot dt$ vor, so daß der dadurch in dem widerstehenden Mittel vertriebene Raum $= v\omega \cdot dt$, und seine Masse m' (welche die Geschwindigkeit $v' = 0$ hatte) $= \varrho v\omega \cdot dt$ ist, wenn ϱ die Dichtigkeit des Mittels bedeutet. Da nun bei nicht elastischen Körpern die Geschwindigkeit u nach dem Stoße, $= \frac{mv + m'v'}{m + m'}$, also der Verlust $v - u$ an Geschwindigkeit $= \frac{m'(v - v')}{m + m'}$ ist, so ist letzterer hier, wo $v' = 0$, $m' = \varrho v\omega \cdot dt$ ist,

Daß dieses Resultat theoretisch nicht genugsam begründet ist, fällt in die Augen; daß es bei Pendelschwingungen (also bei

---

und wo, weil m′ gegen m sehr klein ist, bloß m statt m+m′ geschrieben werden kann, $=\frac{\varrho v^2\omega\cdot dt}{m}$, oder (nach §. 22. V.) das Doppelte hiervon, wenn man elastische Körper voraussetzt, welches letztere jedoch mit den Erfahrungen noch weniger stimmt. Also ist der Verlust an Größe der Bewegung $=\varrho v^2\omega\cdot dt$, oder $\varrho v^2\omega$, wenn man denselben auf die Druck-Einheit bezieht. Folglich ist derselbe mit v^2 proportional. Dies ist also die Größe des Widerstandes des Mittels (Luft, Wasser ꝛc. ꝛc.), unter der gemachten Voraussetzung berechnet.

Macht die Richtung der Bewegung mit der Normale auf ω den Winkel λ, so ist die auf ω senkrechte Geschwindigkeit $= v\cdot\cos\lambda$, so daß man nun den Widerstand selber $=\varrho v^2\cdot\omega\cdot\cos\lambda^2$ in der Richtung der Normale auf ω, und $=\varrho v^2\omega\cdot\cos\lambda^3$ der Richtung der Bewegung genau entgegen, in Rechnung bringt. — Und ist die Fläche ω gekrümmt, und kommt deren Elementchen der veränderliche Winkel λ zu, so muß man zuerst den Widerstand eines solchen Elementchens finden und dann die Resultate für alle diese Elementchen summiren, letzteres, wie immer in solchen Fällen, durch doppelte Integration, zuweilen jedoch bereits durch eine einzige Integration.

Um davon ein Beispiel zu geben, so mag ein Umdrehungs-Körper (Fig. 5.) längs der Umdrehungs-Axe XO gegen das widerstehende Mittel sich bewegen. Es sey $OP = x$, $PM = y$ und $y = y_x$ die Gleichung der Erzeugungs-Kurve, ferner sey MN ein Element $ds=\sqrt{1+\partial y_x{}^2}\cdot dx$ dieser Kurve. Es sey ferner $CD = CE = b$ die größeste Ordinate dieser Kurve, also $b^2\pi$ der größeste auf OX senkrechte Querschnitt des Umdrehungs-Körpers. Die Bewegung desselben gehe von C nach O hin, d. h. in der Richtung CO, so ist für das Element $MN = ds$ der Winkel λ seiner Normale mit der Richtung CO der Bewegung durch die Gleichung

$$\cos\lambda=\frac{dy}{ds}=\frac{\partial y_x}{\partial s_x}=\frac{\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x{}^2}}$$

ausgedrückt. Das von MN bei der Umdrehung der Kurve gebildete Flächen-Element hat zum Inhalte $2\pi y\cdot ds$, und diesen kann man sich in unendlich viele Rechteckchen zerlegt denken jedes von der Länge ds und von der Breite $\frac{2\pi y}{n}$, so daß n die unendlich große Anzahl dieser Rechteckchen ist. Die Normale eines jeden der letzten macht nun mit CO den Winkel λ, während der Inhalt des Flächen-Elements ω, $=\frac{2\pi y}{n}\cdot ds$ ist. Substituirt man nun diese Werthe für $\cos\lambda$ und ω in den Ausdruck $\varrho\omega\cdot v^2\cdot\cos\lambda^3\cdot dt$ für den, parallel mit CO zerlegten Widerstand des Mittels gegen das Element ω, so erhält man

langsamen Bewegungen) nicht gilt, ist durch Versuche ausgemittelt. Daher haben bereits mehrere Mathematiker, darunter na-

---

$$2\varrho\cdot\pi\cdot v^2\cdot\frac{y}{n}\cdot\frac{dy^3}{ds^2}.$$

Die Summe aller dieser Widerstände aller n, die ganze Zone $2\pi y\cdot ds$ bildenden Flächen-Elemente, nämlich.

$$2\varrho\cdot\pi\cdot v^2\cdot dt\cdot y\cdot\frac{dy^3}{ds^2}$$

ist daher (nach der Theorie der parallelen Kräfte) der Gesammt-Widerstand der ganzen Zone $2\pi y\cdot ds$. — Der Widerstand gegen alle diese Zonen, von O bis M hin, wird zuletzt gefunden, wenn man diesen Ausdruck nach x integrirt, zwischen den Grenz-Werthen 0 und a von x. Man hat daher

$$R = 2\varrho\pi v^2\cdot dt\int_{a\div 0} y\cdot\frac{dy^3}{ds^2}\cdot dx = 2\varrho\pi v^2\cdot dt\int_{b\div 0} y\cdot\frac{dy^2}{ds^2}\cdot dy$$

$$= 2\varrho\pi v^2\cdot dt\int_{b\div 0}\frac{y}{\partial x_y{}^2+1}\cdot dy,$$

wenn b der zu x = a gehörige Werth von y ist, nämlich MP = b.

Gesetzt, es wäre der Körper eine Kugel, deren Radius = b und Winkel MCP$=\theta$, so wäre $y=b\cdot\sin\theta$, $dy=b\cdot\cos\theta\cdot d\theta$, $x=b-b\cdot\cos\theta$, $dx=b\cdot\sin\theta\cdot d\theta$, folglich

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = b\cdot d\theta;\quad \text{demnach}\quad y\cdot\frac{dy^2}{ds^2}\cdot dy = b^3\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta^3\cdot d\theta;$$

demnach, wenn R den Widerstand gegen die Halbkugel vorstellt,

$$R = 2\varrho\pi v^2\cdot dt\cdot b^3\cdot\int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}\sin\theta\cdot\cos\theta^3\cdot d\theta = \tfrac{1}{2}\pi\varrho b^2 v^2\cdot dt.$$

Die Versuche, die Newton selbst bei dem Falle von Kugeln von einer sehr großen Höhe herab, angestellt hat, bestimmten ihn, von diesem theoretisch gefundenen R, nur die Hälfte zu nehmen. — Nach Versuchen von Borda soll nur $\frac{3}{5}$ dieses Resultates genommen werden, was für den Widerstand des Mittels gegen eine Kugel vom Radius b

$$\tfrac{3}{10}\varrho b^2\pi\cdot v^2\cdot dt,$$

oder, auf die Druck-Einheit bezogen, $\frac{3}{10}\varrho b^2\pi\cdot v^2$ betragen würde.

Dividirt man übrigens diese bewegende Kraft des Widerstandes des Mittels gegen die Kugel durch die Masse der Kugel, welche $=\frac{4}{3}b^3\pi\cdot D$ ist, wenn D die Dichtigkeit derselben bedeutet, so erhält man die beschleunigende Kraft, welche des Widerstandes des Mittels wegen, jedem Atom der bewegten Kugel, der Richtung seiner Bewegung gerade entgegen stetig hinzutritt; selbige findet sich nun $=\frac{9}{40}\frac{\varrho v^2}{Db}$; und dieses Resultat legen die meisten und besten Schriftsteller über Ballistik ihren Untersuchungen zu Grunde.

mentlich Poisson (Mémoires de l'Académie des Sciences T. XI. und zwar in der Abhandlung: Sur les mouvemens simultanés d'un pendule et de l'air environnant) andere Ansichten aufgestellt und danach den Widerstand der Luft, des Wassers ꝛc. ꝛc. zu bestimmen gesucht. Wir können hier nicht näher darauf eingehen, und bemerken nur noch, daß in diesen neuen Hypothesen, obgleich sie der Sache offenbar näher treten, doch auch noch sehr viel Gewagtes ist, welches noch näherer Bestätigung bedarf, solche zum Theil auch nie finden wird, so daß jeder unserer Leser, wenn er sonst Lust und Beruf dazu hat, hier, wie fast an allen Orten der mathematischen Physik, immer noch unsterbliche Lorbeeren sich sammeln und die Klage, daß ihm seine Vorfahren bereits alles zu erobernde weggenommen hätten, durchaus nicht anstellen kann.

§. 23.

Gesetz der lebendigen Kräfte bei dem Centralstoß.

I. **Bei vollkommen elastischen Körpern ist die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße gerade so groß, wie vor dem Stoße**; d. h. es ist

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

Denn es ist

$$V = 2u - v, \quad \text{also} \quad V^2 = 4u^2 - 4uv + v^2;$$

eben so ist

$$V' = 2u - v', \quad \text{also} \quad V'^2 = 4u^2 - 4uv' + v'^2.$$

Folglich ist, wenn man diese Ausdrücke substituirt,

$$mV^2 + m'V'^2 = 4u\cdot[(u-v)m + (u-v')m'] + mv^2 + m'v'^2.$$

Man kann sich auch von dieser Seite das Problem stellen; die Kurve des kleinsten Widerstandes zu finden, d. h. die Kurve zu finden, für welche $\int_{b\div 0} \frac{y}{\partial x_y^2 + 1} dy$ oder $\int_{b\div 0} y \cdot \frac{dy^2}{ds^2} dy$ ein Minimum wird. Da wir diese Theorie des Widerstandes nicht anerkennen, so ist natürlich für uns die gefundene Kurve, zwar eine solche, welche der analytischen Bedingung genügt, aber nicht nothwendig diejenige, deren zugehöriger Umdrehungs-Körper, wenn er sich längs seiner Umdrehungs-Axe in einem widerstehenden Mittel bewegte, wirklich auch den kleinsten Widerstand finden würde.

Weil aber der hier in den eckigen Klammern befindliche Theil (nach §. 20. A.) die Summe der verlorenen Kräfte und der Null gleich ist, so giebt dies

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

II. Bei nicht elastischen Körpern ist aber die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße allemal größer als nach dem Stoße, und zwar um die Summe der lebendigen Kräfte

$$m(v-u)^2 + m'(u-v')^2,$$

welche den, während des Stoßes verlorenen Geschwindigkeiten zukommt.

Denn es ist (nach §. 20. A.)

1) $$mv + m'v' - mu - m'u = 0.$$

Nimmt man nun die Differenz zwischen den Summen der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoß, nämlich

2) $$mv^2 + m'v'^2 - mu^2 - m'u^2;$$

und zieht man davon ab

$$2u(mv + m'v' - mu - m'u),$$

welches (nach 1.) der Null gleich ist, so erhält man dieselbe Differenz zwischen der Summe der lebendigen Kräfte

$$= m(v-u)^2 + m'(u-v')^2,$$

und dieser Ausdruck ist, wie man sieht, allemal positiv.

III. Auch bei nicht vollkommen elastischen Körpern ist die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße größer als nach dem Stoße, und zwar um das $(1-\varepsilon^2)$fache der Summe der lebendigen Kräfte, welche den, nach dem ersten Theil des Stoßes verlorenen Geschwindigkeiten zukommen.

Denn es ist (nach §. 20. B.)

$$V = (1+\varepsilon)u - \varepsilon v \quad \text{und} \quad V' = (1+\varepsilon)u - \varepsilon v'.$$

Folglich ist

$$mv^2 + m'v'^2 - (mV^2 + m'V'^2) =$$
$$m[(1-\varepsilon^2)v^2 - (1+\varepsilon)^2u^2 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)uv] + m'[(1-\varepsilon^2)v'^2 - (1+\varepsilon)^2u^2 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)uv'].$$

Zieht man aber hier zur Rechten das Produkt

$$2(1+\varepsilon)u \cdot [m(v-u) + m'(u-v')],$$

welches nach (§. 20. A.) der Null gleich ist, ab, so erhält man

$$mv^2 + m'v'^2 - mV^2 - m'V'^2 = (1-\varepsilon^2) \cdot [m(v-u)^2 + m'(u-v')^2],$$

welcher Ausdruck zur Rechten allemal positiv ist, den Fall ausgenommen, wo $\varepsilon = 1$ seyn sollte, also bei den vollkommen elastischen Körpern, wo solcher $= 0$ wird *).

*) Ueberhaupt enthält dieses Resultat (in III.) die beiden vorigen (in I. und II.) als besondere Fälle in sich, je nachdem man $\varepsilon = 1$, oder $\varepsilon = 0$ setzt.

§. 24.

Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punktes bei diesem Centralstoße.

Da die Massen m und m' zu Ende einer jeden Zeit t eine bestimmte Lage haben, so hat auch das in diesem Augenblicke von ihnen gebildete feste System einen Schwer-Punkt, der in derselben Geraden OX liegt, in welcher die Schwer-Punkte von m und m' selbst liegen. Sind nun x, x' und x_1 die von O aus nach X hin gezählten Abscissen oder Entfernungen dieser drei Schwer-Punkte (von m, m' und vom ganzen aus m und m' gebildeten System), so hat man (nach II. Th. §. 55.)

$$1) \qquad x_1 = \frac{mx + m'x'}{m + m'}.$$

Da nun x und x' vor und nach dem Stoße Funktionen der Zeit t sind, und zwar solche, daß vor dem Stoße

$$2) \qquad \partial x = v \qquad \text{und} \qquad \partial x' = v'$$

nach dem Stoße aber

$$3) \qquad \partial x = V \qquad \text{und} \qquad \partial x' = V'$$

wird (wo man die ∂ nach t genommen sich denkt), so ist auch x_1 eine Funktion von t, so daß man in diesem Sinne sagen kann, daß auch der Schwer-Punkt des durch m und m' gebildeten Systems sich bewege. Dabei folgt, wenn man die Gleichung (1.) nach allem t differenzürt,

$$4) \qquad \partial x_1 = \frac{m \cdot \partial x + m' \cdot \partial x'}{m + m'},$$

während ∂x_1 die Geschwindigkeit des Schwer-Punktes ist. Substituirt man nun in diese Gleichung (4.) statt ∂x und $\partial x'$ ihre Werthe vor und nach dem Stoße (aus 2. und 3.), so erhält man vor dem Stoße

$$\partial x_1 = \frac{mv + m'v'}{m + m'}, \quad \text{d. h.} \quad \partial x_1 = u;$$

nach dem Stoße dagegen

Der Satz (II.) ist übrigens ein besonderer Fall eines von Carnot entdeckten allgemeinen Satzes, auf den wir in der Folge zurückkommen werden.

$$\partial x_1 = \frac{mV+m'V'}{m+m'}, \text{ d. h. } \partial x_1 = u;$$

in so ferne sich der Ausdruck $\frac{mV+m'V'}{m+m'}$, wenn man statt V und V' ihre Werthe, d. h. bezüglich $u+\varepsilon(v-u)$ und $u+\varepsilon(v'-u)$ substituirt, weil

$$\varepsilon \cdot [m(v-u)+m'(v'-u)]$$

wegen des Gleichgewichts der verlorenen Kräfte der Null gleich wird, ebenfalls auf u zurückzieht.

Der Schwer-Punkt des aus den beiden Massen m und m' zu jeder Zeit t gebildeten Systems bewegt sich also unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Stoße mit einer und derselben Geschwindigkeit, und zwar es mag $\varepsilon = 0$, oder $\varepsilon = 1$ seyn, oder ε zwischen 0 und 1 liegen, d. h. die Körper mögen unelastisch, oder vollkommen elastisch, oder unvollkommen elastisch seyn *).

---

*) Auch dieses Gesetz ist ein specieller Fall eines viel allgemeinern Gesetzes, welches wir später mittheilen werden, und auf welches wir hier nur vorläufig aufmerksam machen.

Da übrigens v und v' die Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoße sind, so ist es für die Wirkung des Stoßes ganz einerlei, ob man sich vorstellt, daß dieselben Geschwindigkeiten eine ganze Zeit hindurch vorher dieselben (also konstant) oder veränderlich sind. Sind sie aber dieselben (konstant), so sind die von m und m' in der Zeit t beschriebenen Wege x und x' bezüglich $v \cdot t$ und $v' \cdot t$; also ist

$$x_1 = \frac{mx+m'x'}{m+m'} = \frac{mv+m'v'}{m+m'} \cdot t = u \cdot t;$$

und dann ist also auch die Bewegung des Schwer-Punktes eine konstante gewesen, mit der Geschwindigkeit u. Eben so kann man sich vorstellen, daß die Geschwindigkeiten V und V' nach dem Stoße auch eine Zeit lang so bleiben; dann sind nach dem Stoße die in der Zeit T beschriebenen Räume x und x' bezüglich VT und V'T; also ist

$$x_1 = \frac{mx+m'x'}{m+m'} = \frac{mV+m'V'}{m+m'} \cdot T = u \cdot T.$$

Der Schwer-Punkt bewegt sich also dann auch nach dem Stoße noch konstant und mit derselben Geschwindigkeit u. — Auf diese Weise kann man also dieses „Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punktes" auch elementar beweisen, ohne Differenzial-Rechnung zu Hülfe nehmen zu müssen.

Zweite Abtheilung.

Vermischte Beispiele der Anwendung des d'Alembert'schen Princips.

§. 25.

Zwei schiefe Ebenen AB und BC haben eine gemeinschaftliche Höhe BD (Fig. 1.) und einen gemeinschaftlichen Horizont ADC. — Dabei sey W. BAD $= \gamma$ und W. BCD $= \alpha$. — Zwei Massen m und m', welche mittelst eines bei B über einen Stift gehenden Fadens, dessen Masse außer Acht gelassen werden soll, zusammenhängen, sind ihrem Gewichte überlassen. Man soll die Bewegung derselben näher angeben, unter der Voraussetzung, daß weder Reibung noch Steifigkeit des Fadens, überhaupt kein Hinderniß weiter in Rechnung gebracht werde.

Vermöge der Vorrichtung haben alle Atome der Massen m und m' zu jeder Zeit t eine und dieselbe Geschwindigkeit v, welche in den Richtungen AB und BC statt finden mag. Die zu Ende der Zeit t neu hinzutretenden Kräfte sind

1.) $mg \cdot \sin\alpha \cdot dt$ in der Richtung BC,

2.) $m'g \cdot \sin\gamma \cdot dt$ in der Richtung BA *).

Diese bringen in dem nächsten Zeittheilchen dt einen Zuwachs an Geschwindigkeit dv oder $\partial v_t \cdot dt$ und Zuwachse an Größe der Bewegung, nämlich $m \cdot dv$ und $m' \cdot dv$ hervor, welche wir durch eben so große Kräfte in genau entgegengesetzter Richtung, nämlich durch

3.) $-m \cdot \partial v_t \cdot dt$ in der Richtung BC,

4.) $+m' \cdot \partial v_t \cdot dt$ in der Richtung BA

---

*) Es ist nämlich $mg \cdot dt$, auf die Stoß-Einheit bezogen, das Gewicht der Masse m (§. 12.). Diese Kraft zerlegt man sogleich in $mg \cdot \cos\alpha \cdot dt$ senkrecht auf die schiefe Ebene BC, und $mg \cdot \sin\alpha \cdot dt$ längs der schiefen Ebene. Die erstere wird durch die Festigkeit der schiefen Ebene vernichtet und würde bloß zur Bestimmung der Reibung der Masse m beitragen, wenn solche in Rechnung gebracht werden sollte. Die andere Seiten-Kraft $mg \cdot \sin\alpha \cdot dt$ dagegen bringen wir in Rechnung.

wiederum vernichten, so daß nun die (in 1. — 4.) aufgeführten Kräfte, in diese beiden, nämlich

5) $mg \cdot \sin\alpha - m \cdot \partial v_t$ in der Richtung BC,

6) $m'g \cdot \sin\gamma + m' \cdot \partial v_t$ in der Richtung BA

sich vereinigen lassen, indem man sie nicht mehr auf die Stoß-Einheit, sondern auf die Druck-Einheit bezieht, so daß der Faktor dt in ihrem Ausdrucke wegfällt. Dies sind aber nun die verlorenen Kräfte, welche sich einander im Gleichgewichte halten, d. h. dasmal, einander gleich seyn müssen; und dies giebt die Gleichung

7) $mg \cdot \sin\alpha - m \cdot \partial v = m'g \cdot \sin\gamma + m' \cdot \partial v,$

oder

8) $$\partial v = \frac{m \cdot \sin\alpha - m' \cdot \sin\gamma}{m + m'} \cdot g.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck zur Rechten durch φ, so ist also φ oder $\varphi \cdot dt$ die beschleunigende Kraft eines jeden Atoms dieses Beweglichen. Ist nun x der Weg dieses Atoms, so hat man außer

9) $\partial v = \varphi$ noch 10) $\partial x = v;$

also erhält man durch Integration, weil φ nach t konstant ist,

11) $v = \varphi \cdot t + c,$

wenn c die Anfangs-Geschwindigkeit des Beweglichen ist, und

12) $x = \frac{1}{2}\varphi \cdot t^2 + c \cdot t + \lambda,$

wenn λ der Werth von x zu Anfang der Zeit ist.

Um die Konstante c, d. h. die Anfangs-Geschwindigkeit zu bestimmen, wollen wir annehmen, daß zu Anfang der Zeit t die beiden Massen m und m' in Ruhe gewesen sind und Stöße erhalten haben, wodurch ihre Schwer-Punkte in den Richtungen BC und AB bezüglich die Geschwindigkeiten a und a' erhalten haben würden, wenn jede Masse isolirt gewesen wäre *). — Hier tritt nun der Fall ein, wo eine plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit erfolgt. Die eingewirkt habenden Kräfte

*) Dabei kann a' nicht größer als a gedacht seyn, weil sonst der Faden keine Spannung haben würde, d. h. weil sonst die Masse m' allein und unabhängig von m dieser Geschwindigkeit Folge leistete.

in den Richtungen BC und AB sind bezüglich ma und m'a' (nach der Voraussetzung); die dadurch hervorgebrachten „Größen der Bewegung" in denselben Richtungen sind dagegen bezüglich mc und m'c, weil die Geschwindigkeiten c in beiden zusammenhängenden Massen (wenn der Faden, wie wir dies angenommen haben, immer dieselbe Länge behält) eine und dieselbe ist. Die verlorenen Kräfte sind daher dasmal

$$ma - mc \text{ in der Richtung BC,}$$

und $$m'c - m'a' \text{ in der Richtung BA.}$$

Weil sich nun diese letzteren nach dem d'Alembert'schen Princip im Gleichgewicht halten müssen, so hat man

$$ma - mc = m'c - m'a',$$

folglich $$c = \frac{ma + m'a'}{m + m'}.$$

Wirkte der Stoß gegen m' (statt von A nach B hin) von B nach A hin, so würde sich

$$13) \qquad c = \frac{ma - m'a'}{m + m'}$$

gefunden haben.

Jedenfalls bekommt der Faden durch die Stöße eine Erschütterung längs der Verlängerung seiner Enden. Will man diese bestimmen, so muß man die verlorenen Kräfte von m und m', welche in dem letztern Falle z. B. $m'c + m'a'$ und $ma - mc$ sind, berechnen. Sie sind nicht bloß einander gleich, sondern sie sind auch dasmal zugleich die Spannung, d. h. die Erschütterung des Fadens. Substituirt man in sie den Werth von c (aus 13.), so erhält man diese Erschütterung

$$14) \quad = \frac{mm'(a + a')}{m + m'}, \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{g} \cdot \frac{P \cdot P' \cdot (a + a')}{P + P'},$$

wenn P und P' die Gewichte von m und m' vorstellen. — In den übrigen Formeln kann man überall geradezu statt der Massen ihre Gewichte setzen.

Diese Erschütterung des Fadens an seinen beiden Enden wirkt nur augenblicklich und wird durch die vorausgesetzte Unausdehnbarkeit des Fadens vernichtet. Während der nachfolgen-

den stetigen Bewegung des Massen-Paars hat aber der Faden auch eine dauernde Spannung T, welche ebenfalls davon herrührt, daß die verlorenen Kräfte

$$(mg \cdot \sin\alpha - m \cdot \partial v) \cdot dt \quad \text{und} \quad (m'g \cdot \sin\gamma + m' \cdot \partial v) \cdot dt$$

sich mittelst des Fadens im Gleichgewicht halten. Diese Kräfte sind daher nicht bloß einander gleich, sondern auch die Spannung T des Fadens. Substituirt man also statt ∂v seinen Werth $\frac{m \cdot \sin\alpha - m' \cdot \sin\gamma}{m + m'} \cdot g$, so erhält man

$$15) \quad T = \frac{mm'}{m+m'} \cdot (\sin\alpha + \sin\gamma) \cdot g \cdot dt$$

$$= \frac{P \cdot P'}{P+P'} \cdot (\sin\alpha + \sin\gamma) \cdot dt,$$

so daß diese Spannung T gegen die vorige (in 14. ausgedrückte) Erschütterung unendlich-klein ist. Will man dieselbe Spannung auf die Druck-Einheit beziehen, so wird sie

$$= \frac{mm'}{m+m'} \cdot (\sin\alpha + \sin\gamma) g,$$

oder

$$= \frac{P \cdot P'}{P+P'} \cdot (\sin\alpha + \sin\gamma),$$

und daher dem Gewicht einer Masse M gleich, welche durch die Gleichung

$$16) \quad M = \frac{mm'}{m+m'} \cdot (\sin\alpha + \sin\gamma)$$

gefunden wird, während in der letztern Gleichung statt der Massen m, m' und M auch ihre Gewichte gesetzt werden können.

§. 26.

Lösen wir noch einmal dieselbe Aufgabe, jedoch unter der Voraussetzung, daß bei der Bewegung von m' in der Richtung AB, also von m in der Richtung BC, die Reibung der Massen m und m', nämlich bezüglich

$$\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot dt \quad \text{und} \quad \mu \cdot m'g \cdot \cos\gamma \cdot dt,$$

aber nicht die Reibung des Fadens über dem Stifte bei B berücksichtigt wird, während die Masse des Fadens selbst, so wie

jedes andere Hinderniß oder Förderniß der Bewegung noch immer unberücksichtigt bleiben soll.

Die zu Ende der Zeit t neu hinzutretenden Kräfte sind dasmal $mg(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot dt$ in der Richtung BC und $m'g(\sin\gamma + \mu\cdot\cos\gamma)\cdot dt$ in der Richtung BA.

Die durch diese Kräfte unmittelbar darauf in m und m' hervorgebrachten (positiven oder negativen) Zuwachse an Größe der Bewegung sind

$m\cdot\partial v_t\cdot dt$ in der Richtung BC

und $m'\cdot\partial v_t\cdot dt$ in der Richtung AB.

Setzt man nun eben so große Kräfte diesen Zuwachsen genau entgegen, so erhält man, wenn alles auf die Druck-Einheit bezogen wird,

$mg(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) - m\cdot\partial v$ in der Richtung BC

und $m'g(\sin\gamma + \mu\cdot\cos\gamma) + m'\cdot\partial v$ in der Richtung BA

als die verlorenen Kräfte, welche sich am Faden im Gleichgewicht halten, also einander gleich seyn müssen. Diese Gleichheit giebt aber jetzt

$$\partial v = \frac{m(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) - m'(\sin\gamma + \mu\cdot\cos\gamma)}{m + m'}\cdot g$$

als die beschleunigende Kraft, mit welcher jetzt jeder Atom des Beweglichen zu Ende der Zeit t ergriffen wird *).

Die Spannung des Fadens, da wo m' hängt, ist dabei offenbar $= m'g(\sin\gamma + \mu\cdot\cos\gamma) + m'\cdot\partial v$;

oder $= mg(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) - m\cdot\partial v$,

wo man statt ∂v nur noch seinen oben gefundenen Werth setzen darf. Diese Spannungen sind, wie die Rechnung zeigt, während der ganzen Dauer der Bewegung konstant, übrigens hier in die Druck-Einheit ausgedrückt, weswegen sie, gegen jeden

*) Setzt man $\gamma = 0$ und $\alpha = 90^\circ$, so wird die beschleunigende Kraft $\partial v = \frac{m - \mu m'}{m + m'}\cdot g$. Die Aufgabe selbst ist nun die (im Beisp. 2. zu §. 10.) bereits gelöste, und die hiesige Auflösung, da statt der Massen ihre Gewichte gesetzt werden können, stimmt genau mit der dort erhaltenen überein.

Stoß gehalten, unendlich-klein sind, wohl aber mit Gewichten verglichen, einen bestimmten endlichen Werth haben.

Anmerk. Man könnte in den beiden vorstehenden Aufgaben sich statt des Stiftes oder unbeweglichen Cylinders bei B, über welchen der Faden geführt ist, eine um einen Zapfen bewegliche Rolle denken. Dann aber gehörte die Rolle selbst mit zu den in Bewegung zu setzenden Massen. Jedes Massen-Element dM der Rolle in der Entfernung r' vom Mittelpunkte derselben, hätte dann, wenn r der Halbmesser der Rolle ist, die Geschwindigkeit $\frac{r'}{r} \cdot v$ und erhielte in der nächsten Zeit dt den Zuwachs an „Größe der Bewegung," $= dM \times \frac{r'}{r} \cdot \partial v_t \cdot dt$. Für jedes solche Element dM müßte aber dieser Zuwachs in genau entgegengesetzter Richtung zu den verlorenen Kräften noch hinzugefügt werden, um zuletzt zwischen allen (deren Anzahl, wegen der unendlich vielen Massen-Elemente dM, unendlich groß ist) das Gleichgewicht aufstellen zu können. — Wir wollen solche Aufgaben später betrachten, wo wir überhaupt die Drehung um eine feste Axe in's Besondere behandeln werden, hier aber, wo wir einstweilen bloß einfache Fälle der Anwendung des d'Alembert'schen Princips zu geben beabsichtigen, uns vorläufig mit dieser kurzen Andeutung begnügen.

§. 27.

Betrachten wir dieselbe Aufgabe nun noch einmal, jedoch dasmal unter der Voraussetzung, daß die Masse p und das Gewicht pg für jeden laufenden Fuß des Fadens (oder Seiles) mit in Rechnung gezogen, dagegen wie im (§. 25.) die Reibung nicht berücksichtigt werde. Dabei sey zu Anfang der Bewegung, wo $t = 0$ ist, λ die Länge des Seils auf BC, und λ' die Länge desselben auf AB, so daß, wenn der Halbmesser des Stiftes sehr klein gedacht und außer Acht gelassen wird,

1) $$\lambda + \lambda' = 1$$

die ganze Länge des Seils ist.

Nach t Sekunden habe der Schwer-Punkt von m und somit jeder Punkt des ganzen in Bewegung gesetzten Systems den Weg x beschrieben und die Geschwindigkeit v angenommen; also ist die Länge des Seils auf BC, $=\lambda+x$, seine Masse $=p(\lambda+x)$ und sein Gewicht $=pg(\lambda+x)$. Auf der Seite AB dagegen ist die Länge des Seils $=\lambda'-x$, seine Masse $=p(\lambda'-x)$, und sein Gewicht $=pg(\lambda'-x)$. Auf der Seite BC tritt nun die neue bewegende Kraft

2)... $[m+p(\lambda+x)]\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot dt$ in der Richtung BC,

auf der Seite BA dagegen tritt die neue bewegende Kraft

3)... $[m'+p(\lambda'-x)]g\cdot \sin\gamma\cdot dt$ in der Richtung BA

noch hinzu, beide Kräfte auf die Stoß-Einheit bezogen, auf welche nun auch die gewonnenen Zuwachse an „Größe der Bewegung" bezogen werden. Nachdem nämlich diese neu hinzutretenden Kräfte gewirkt haben, also zu Ende des nächsten unendlich-kleinen Zeittheilchens dt, hat die ganze bewegte Masse den Zuwachs dv oder $\partial v_t\cdot dt$ an Geschwindigkeit, daher den Zuwachs

4) $$(m+m'+pl)\cdot\partial v_t\cdot dt$$

an Größe der Bewegung erlitten, in der Richtung ABC. Setzen wir nun eine eben so große Kraft in der Richtung CBA genau entgegen, so ist die alte Bewegung wiederum vorhanden, und daher stehen die verlorenen Kräfte, nämlich

5) $[m+p(\lambda+x)]\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot dt$ in der Richtung BC

und

6) $[m'+p(\lambda'-x)]\cdot g\cdot \sin\gamma\cdot dt+(m+m'+pl)\cdot\partial v_t\cdot dt$ *)

in der Richtung CBA

mit einander im Gleichgewichte. Dies giebt die Gleichung

7) $$[m+p(\lambda+x)]\cdot g\cdot \sin\alpha = [m'+p(\lambda'-x)]\cdot g\cdot \sin\gamma + (m+m'+pl)\cdot\partial v_t;$$

oder weil

*) Man müßte eigentlich den Theil $(m+m'+pl)\cdot\partial v_t$ der verlorenen Kräfte in zwei Antheile zerlegen, nämlich in den Theil, welcher auf der Seite BA liegt, und in den Theil, welcher auf der Seite BC liegt. Indem man diese Theile durch y und z bezeichnet, und nicht vergißt, daß ihre Summe $=(m+m'+pl)\cdot\partial v_t$ ist, so erhält man dieselbe Gleichung.

$$\partial v_t = \partial^2 x_t = \partial^2 x$$

ist,

8) $\partial^2 x - a^2 x - b = 0$, d. h. $\partial^2 x = a^2 x + b$,

wenn man

9) $$\frac{p\cdot(\sin\alpha + \sin\gamma)}{m + m' + pl}\cdot g = a^2$$

und

10) $$\frac{m\cdot\sin\alpha - m'\cdot\sin\gamma + p\cdot(\lambda\cdot\sin\alpha - \lambda'\cdot\sin\gamma)}{m + m' + pl}\cdot g = b$$

setzt, während $\partial^2 x$, wie immer, die beschleunigende Kraft der einzelnen Atome ist.

Diese lineäre Gleichung (8.) integrirt, giebt (nach I. Theil Analysis §. 50.)

11) $$x = C\cdot e^{at} + C'\cdot e^{-at} - \frac{b}{a^2},$$

woraus, wenn man differenziirt,

12) $$v = a(C\cdot e^{at} - C'\cdot e^{-at})$$

hervorgeht, während die beiden Konstanten C und C′ noch näher bestimmt werden müssen. Denkt man sich nun x mit t zugleich anfangend, so giebt die Gleichung (11.)

13) $$C + C' = \frac{b}{a^2} = \frac{m\cdot\sin\alpha - m'\cdot\sin\gamma + p\cdot(\lambda\cdot\sin\alpha - \lambda'\cdot\sin\gamma)}{p\cdot(\sin\alpha + \sin\gamma)};$$

und ist c die Anfangs-Geschwindigkeit, so giebt die Gleichung (12.) noch

14) $$C - C' = \frac{c}{a}.$$

Aus diesen Gleichungen (13. und 14.) folgt dann

15) $$C = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b + ac}{a^2} \quad \text{und} \quad C' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b - ac}{a^2}.$$

In allen diesen Formeln kann man endlich statt der Massen m, m′ und p auch ihre Gewichte setzen.

Eliminirt man aus den Gleichungen (11. und 12.) die Zeit t, so erhält man die Gleichung zwischen x und v, welche dann bequem ist, wenn man die Geschwindigkeit nach irgend einem zurückgelegtem Wege haben will. Man kann aber aus der Gleichung (8.), d. h. aus

$$\partial^2 x = a^2 x + b \quad \text{oder} \quad \partial v = a^2 x + b$$

diese Gleichung zwischen x und v direkt finden. Es ist nämlich $\partial v_t = \partial v_x \cdot \partial x_t$, d. h. $\partial v = v \cdot \partial v_x$. Die Gleichung $\partial v = a^2 x + b$ geht dadurch über in

$$v \cdot \partial v_x = a^2 x + b,$$

und giebt, nach x integrirt,

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} a^2 x^2 + bx + \tfrac{1}{2} c^2,$$

wenn für $x = 0$, $v = c$ werden soll. Man hat also

$$16) \qquad v = \sqrt{a^2 x^2 + 2bx + c^2} \text{ *)}.$$

Halten sich die im Anfang (wo $t = 0$ ist) links und rechts aufliegenden Gewichte $(m + p\lambda)g$ und $(m' + p\lambda')g$ einander im Gleichgewicht, so wird $b = 0$. Ist dann noch die Anfangs-Geschwindigkeit c ebenfalls $= 0$, so wird jede der Konstanten C und C' der Null gleich; also wird dann für jedes t, $x = 0$ und $v = 0$; d. h. es ist, wie natürlich, immerwährende Ruhe. Die Gleichung (16.) dagegen giebt für diesen Fall $v = ax$. Weil sich aber $x = 0$ findet, so giebt auch sie $v = 0$.

Ist dagegen zwar $b = 0$, aber die Anfangs-Geschwindigkeit c nicht Null, so ist $C = \frac{c}{2a}$ und $C' = -\frac{c}{2a}$ und daher jetzt

$$x = \frac{c}{2a} \cdot \left(e^{at} - e^{-at}\right), \quad v = \tfrac{1}{2} c \cdot \left(e^{at} + e^{-at}\right)$$

und noch

$$v = \sqrt{a^2 x^2 + c^2}.$$

Die in jeder endlichen Zeit t beschriebenen Räume x, und zugehörigen Geschwindigkeiten v sind also in diesem Falle unendlich-klein, wenn die Anfangs-Geschwindigkeit c unendlich-klein ist; so daß dann ein endlicher Weg nur in einer unendlich großen Zeit zurückgelegt wird. Ist aber nach unendlicher Zeit ein solcher endlicher Weg x zurückgelegt, so ist die Geschwindigkeit v, $= ax$, d. h. die Geschwindigkeit ist dann mit dem Wege proportional, eben weil c unendlich-klein gedacht worden ist, und daher gegen das endliche ax außer Acht gelassen werden kann.

Aehnliche Betrachtungen finden statt, wenn man sich $c = 0$, aber b unendlich-klein denkt, d. h. wenn die Ueberwucht der einen Seite unendlich-klein ist, und die Anfangs-Geschwindigkeit Null.

So wie aber, um zum allgemeinen Fall zurückzukehren, eine Anfangs-Geschwindigkeit c vorhanden ist, so können die Werthe

---

*) Man wird nicht übersehen, daß hier die Seilstücken als feste Körper angesehen worden sind, welche durch ihr Gewicht nicht gekrümmt werden. Diese Voraussetzung kann man hier wohl machen, obgleich in andern Fällen an die Biegsamkeit des Seiles zu denken seyn dürfte.

von C und C′ nie zugleich Null werden. Also wird zu allen Zeiten eine Geschwindigkeit vorhanden seyn; wenn solche nicht etwa für einen einzigen Werth von t, der Null gleich wird. — Weil aber die Gleichung

$$v = 0, \quad \text{oder} \quad C \cdot e^{at} - C' \cdot e^{-at} = 0$$

übergeht in

$$e^{2at} = \frac{C'}{C},$$

also

$$18) \qquad t = \frac{1}{2a}(\log C' - \log C)$$

liefert, so kann dieser letzterwähnte Fall nur dann eintreten, wenn $C' > C$, d. h. wenn die Anfangs-Geschwindigkeit c negativ genommen wird. Es versteht sich dabei, daß diese negative Anfangs-Geschwindigkeit an sich auch nicht zu groß genommen werden dürfe, wenn während der Dauer der Bewegung der Fall, wo $v = 0$ wird, eintreten soll, weil sonst der dazu nöthige Werth der Zeit t größer wird, als das Seil Zeit gebraucht, um, der Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit, jedoch verzögert folgend, von der Seite BC ganz auf die Seite AB hinüber zu gehen. — Ist also c negativ und nicht zu groß, so wird die Gesammt-Masse zuerst vom Punkte C nach B hin, also auch von B nach A hin sich bewegen; dabei wird ihre Geschwindigkeit verzögert, endlich der Null gleich; dann aber geht die Bewegung in den entgegengesetzten Richtungen BC und AB zurück, die Geschwindigkeit wird beschleunigt, und das so lange, bis das Seil nebst Zubehör seiner ganzen Länge nach auf die Seite BC herüber gekommen ist. Von da ab tritt ein neues Gesetz der Bewegung ein, nämlich die gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche ein Atom (nämlich der Schwer-Punkt der ganzen Masse) annimmt, der mit einer Anfangs-Geschwindigkeit (welche dasmal die Geschwindigkeit der Masse ist, in dem Augenblick, wo sie die Seite AB ganz verläßt) auf der schiefen Ebene BC herunter gleitet. (Vergl. §. 13. Beisp. 3.)

Anmerk. 1. Denkt man sich den besondern Fall derselben Aufgabe, wo $\alpha = \gamma = 90^0$ ist, wo also die Massen an ihren

Seil-Enden vertikal herunter hängen, dabei keine Reibung, dagegen die Masse und das Gewicht des Seils noch immer in Betrachtung gezogen wird, — so erhält man dieselben Resultate, nämlich

$$x = C \cdot e^{at} + C' \cdot e^{-at} - \frac{b}{a^2},$$

$$v = Ca \cdot e^{at} - C'a \cdot e^{-at}$$

und $$v = \sqrt{a^2x^2 + 2bx + c^2};$$

nur daß die Werthe von a und b sich ändern, in so fern man jetzt $\sin\alpha = \sin\gamma = 1$, $\cos\alpha = \cos\gamma = 0$ hat. Sie werden nämlich

$$a^2 = \frac{2p}{m + m' + pl} \cdot g \text{ und } b = \frac{m + p\lambda - (m' + p\lambda')}{m + m' + pl} \cdot g.$$

Dabei haben die Konstanten C und C' noch immer die Werthe

$$C = \tfrac{1}{2}\frac{b + ac}{a^2} \text{ und } C' = \tfrac{1}{2}\frac{b - ac}{a^2},$$

während c die Anfangs-Geschwindigkeit ist.

Anmerk. 2. Denkt man sich den andern besondern Fall der Aufgabe, in welchem $\gamma = 0$ und $\alpha = 90°$ ist, so hat man wiederum die Aufgabe der (Fig. 3.), wie solche schon (als Beispiel zu §. 13.) früher, jedoch für den Fall gelöst worden ist, daß das Gewicht des Fadens nicht, dagegen die Reibung auf der Unterlage betrachtet wird, während jetzt gerade dieses Gewicht in Rechnung gebracht ist, die Reibung aber nicht. Man erhält dann unter der jetzigen besondern Voraussetzung genau dieselben Ausdrücke für x, v in t und für v in x, eben so der Konstanten C und C' in a und b ausgedrückt, wie in dem allgemeinen Fall des Paragraphen, und nur a und b selbst haben andere und zwar folgende Werthe, nämlich

$$a^2 = \frac{pg}{m + m' + pl} \text{ und } b = \frac{(m + p\lambda)g}{m + m' + p},$$

wo statt der Massen m, m' und p auch ihre Gewichte gesetzt werden können. — Weil aber jetzt die Reibung nicht beachtet ist, so wollen wir im nächsten Paragraphen denselben speciellen

Fall, jedoch mit Berücksichtigung der Reibung auf der Unterlage als ein neues Beispiel der Anwendung des d'Alembert-schen Princips direkt betrachten.

§. 28.

Auf einer horizontalen Unterlage (Fig. 3.) ruht eine Masse m'; von ihr aus geht ein horizontales Seil am Ende der Unterlage über eine bewegliche Rolle, hängt dann vertikal herunter und ist am andern Ende von dem Gewichte einer Masse m gespannt. Man soll die Bewegung von m bestimmen, unter der Voraussetzung, daß die Reibung des Gewichtes $m'g$, ferner auch die Masse und das Gewicht des Seiles, welche für jeden Längenfuß bezüglich p und pg seyn mögen, in Rechnung gebracht werden, daß aber nicht die Masse der Rolle, nicht die Reibung der Rolle, nicht die Steifigkeit des Seiles und auch sonst kein Hinderniß weiter berücksichtigt werde.

Es sey λ' die Länge des horizontalen Seilstücks, λ die Länge des vertikalen zu Anfang der Bewegung (wo $t = 0$ ist) und k das Stück des Seils, welches auf der Rolle aufliegt, und welches dasmal gerade einen Quadranten der Rolle ausmacht. Stellt nun l die Länge des ganzen Seils vor, so hat man

$$l = \lambda + \lambda' + k.$$

Ist nun nach t Sekunden der von m (d. h. von einem beliebigen Atom der in Bewegung zu setzenden Gesammtmasse) beschriebene Weg $= x$, und die zu Ende desselben erworbene Geschwindigkeit $= v$, so ist der unmittelbar nach der Zeit t erworbene Zuwachs an „Größe der Bewegung" der ganzen Masse $m+m'+pl$ offenbar

$$= (m+m'+pl) \cdot \partial v_t \cdot dt,$$

welche in der (entgegengesetzten) Richtung CBA gedacht wird, und dann zu den verlorenen Kräften gehört. Auf der andern Seite ist zu Ende der Zeit t, die Länge des horizontalen Seils $= \lambda' - x$, seine Masse $= p(\lambda' - x)$ und sein Gewicht $= pg(\lambda' - x)$. Die Länge des vertikalen Seils ist dagegen zu derselben Zeit, $= \lambda + x$, seine Masse $= p(\lambda + x)$ und sein Gewicht $= pg(\lambda + x)$.

Da nun das Gewicht des horizontalen Seils zur Hälfte von m', zur Hälfte von der Rolle getragen wird *), so entsteht bei m' ein Druck $= m'g + \frac{1}{2}pg(\lambda' - x)$ und danach eine Reibung $= \mu g[m' + \frac{1}{2}p(\lambda' - x)]$, alles in die Druck-Einheit ausgedrückt, so daß überall noch der Faktor dt hinzugefügt werden muß, wenn die Stoß-Einheit zu Grunde gelegt wird. — Die zu Ende der Zeit t neu hinzutretende Kraft ist daher

$$= [mg + pg(\lambda + x) - \mu g(m' + \tfrac{1}{2}p(\lambda' - x))] \cdot dt.$$

Also hat man die Gleichung des Gleichgewichts

$$[m + p(\lambda + x) - \mu(m' + \tfrac{1}{2}p(\lambda' - x))] \cdot g = (m + m' + pl) \cdot \partial v$$

zwischen den verlorenen Kräften. Diese Gleichung giebt nun für die beschleunigende Kraft

$$\partial v = \frac{m + p(\lambda + x) - \mu[m' + \frac{1}{2}p(\lambda' - x)]}{m + m' + pl} \cdot g.$$

Setzt man nun $\partial^2 x$ statt ∂v und der Kürze wegen

$$\frac{p(1 + \frac{1}{2}\mu)}{m + m' + pl} \cdot g = a^2, \text{ so wie } \frac{m - \mu m' + p(\lambda - \frac{1}{2}\mu\lambda')}{m + m' + pl} \cdot g = b,$$

so hat man (wie im §. 27.)

$$\partial^2 x = a^2 x + b;$$

und diese lineare Gleichung giebt nun wieder, integrirt,

$$x = C \cdot e^{at} + C' \cdot e^{-at} - \frac{b}{a^2}$$

und $$\partial x = v = a \cdot (C \cdot e^{at} - C' \cdot e^{-at}),$$

so wie noch $$v = \sqrt{a^2 x^2 + bx + c^2},$$

wenn c die Geschwindigkeit ist, zu der Zeit wo man $x = 0$ hat.

Läßt man x mit t zugleich anfangen, so ist c auch die Anfangs-Geschwindigkeit. Dann hat man zur Bestimmung der Konstanten C und C' die Gleichungen

$$0 = C + C' - \frac{b}{a^2}$$

und $$c = a(C - C'),$$

woraus wieder C und C' (wie im §. 27.) bestimmt werden.

---

*) Wir nehmen in allen diesen Aufgaben nicht auf den Umstand Rücksicht, daß das horizontal liegende Seilstück eigentlich eine Kurve bildet; wir betrachten hier jedes Stück des Seils, als wenn solches ein fester und unbiegsamer Körper wäre.

In allen diesen Formeln kann man aber statt der Massen m, m' und p ihre Gewichte substituiren.

§. 29.

Stellen wir die vorige Aufgabe des (§. 28.) noch einmal hin, jedoch mit der Abänderung, daß das Gewicht des Seils eben so wenig in Betrachtung kommen soll, als die Masse der Rolle, und auch nicht die Reibung der Rolle am Zapfen; daß aber der Reibungs-Koefficient mit der Geschwindigkeit v selbst sich vermindere, und zwar so, daß er zu Ende der Zeit t, nicht μ, sondern $=\frac{1}{1+\alpha v}\mu$ sey; so ist die verlorene Kraft in der Richtung BC

$$=mg\cdot dt-m\cdot\partial v_t\cdot dt.$$

Auf der andern Seite ist die verlorene Kraft in der Richtung BA

$$=\frac{1}{1+\alpha v}\mu m'g\cdot dt+m'\cdot\partial v_t\cdot dt.$$

Dies giebt die Gleichung des Gleichgewichts

$$mg-m\cdot\partial v=\frac{1}{1+\alpha v}\mu m'g+m'\cdot\partial v,$$

oder

$$1)\qquad (m+m')\cdot\partial v=\left(m-\frac{1}{1+\alpha v}\mu m'\right)g,$$

als die Gleichung der Bewegung, welche nun noch integrirt werden muß.

Zu dem Ende setzt man in ihr $\frac{1}{\partial t_v}$ statt ∂v_t, und findet

$$\partial t_v=\frac{m+m'}{g}\cdot\frac{1+\alpha v}{m-\mu m'+\alpha m v},$$

woraus hervorgeht

$$t=\frac{m+m'}{g}\cdot\int\frac{1+\alpha v}{m-\mu m'+\alpha m v}\cdot dv,$$

d. h. *)

*) Man muß die unächt gebrochene Funktion $\frac{1+\alpha v}{m-\mu m'+\alpha m v}$ in

$$2)\quad t = \frac{m+m'}{mg}\cdot\left(v + \frac{\mu m'}{\alpha m}\cdot log(m-\mu m'+\alpha m v)\right) + C,$$

wo die Konstante C noch näher bestimmt werden muß.

Ist aber c die Anfangs-Geschwindigkeit, so muß man in dieser Gleichung (2.) $t=0$ und $v=c$ setzen, und aus dieser neuen Gleichung C finden. Dies giebt

$$3)\quad t = \frac{m+m'}{mg}\left(v - c + \frac{\mu m'}{\alpha m}\cdot log\frac{m-\mu m'+\alpha m v}{m-\mu m'+\alpha m c}\right).$$

Dies ist also die Gleichung zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t.

Will man die Gleichung zwischen v und x finden, so darf man nur daran denken, daß man

$$\partial x_t = \partial x_v\cdot\partial v_t,\quad \text{oder}\quad v = \partial x_v\cdot\partial v_t,$$

also

$$\partial x_v = \frac{v}{\partial v_t} = v\cdot\partial t_v$$

hat. Dies giebt

$$\partial x_v = \frac{m+m'}{g}\cdot\frac{v\cdot(1+\alpha v)}{m-\mu m'+\alpha m v}.$$

Holt man (durch Division) aus dieser unächt gebrochenen Funktion von v, die darin steckende ganze Funktion von v heraus, und integrirt man dann nach v, so ergiebt sich

$$4)\quad x + C = \frac{m+m'}{mg}\times$$

$$\left[\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{\mu m'}{\alpha m}v - \frac{\mu m'(m-\mu m')}{\alpha^2 m^2}\cdot log(m-\mu m'+\alpha m v)\right],$$

wobei die Konstante C aus derselben Gleichung bestimmt wird, wenn man statt v die Anfangs-Geschwindigkeit (wo $t=0$ ist) und zu gleicher Zeit statt x den Anfangs-Werth von x setzt. Ist z. B. $x=0$ für $v=c$, so giebt dies

$$5)\quad x = \frac{m+m'}{mg}\times$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(v^2-c^2) + \frac{\mu m'}{\alpha m}(v-c) - \frac{\mu m'(m-\mu m')}{\alpha^2 m^2}\cdot log\frac{m-\mu m'+\alpha m v}{m-\mu m'+\alpha m c}\right].$$

---

die ganze $+\frac{1}{m}$ und die ächt gebrochene $\frac{\mu m'}{m(m-\mu m'+\alpha m v)}$ zerlegen, und dann jeden Theil für sich integriren.

Anmerk. Man sieht häufig dieselben oder ähnliche Probleme, wie wir solche (in den §§. 25.—29.) gelöst haben, auch ohne direkte Zuziehung des d'Alembert'schen Princips, bloß mittelst Anwendung des Satzes (§. 13.) gelöst, d. h. mittelst des Satzes, daß wenn P℔. Kraft auf eine Masse von Q℔. wirken, dann für jeden einzelnen Atom dieser letztern eine beschleunigende Kraft entsteht $= \frac{P}{Q} \cdot g$. — Weil jedoch in den vorliegenden Aufgaben, die Massen an verschiedenen Stellen vertheilt sich finden, so wie auch die Kräfte, so hilft man sich damit, daß man „die Kräfte und die Massen auf eine und dieselbe Stelle reducirt." Dies Verfahren wollen wir an den vorliegenden Aufgaben (§§. 25. — 29.) näher auseinander setzen, um später die Mängel und Unhaltbarkeit desselben recht einleuchtend nachweisen zu können.

I. In der Aufgabe des (§. 25.) ist die zu bewegende Gesammt-Masse $= m + m'$; und ihr Gewicht $Q = (m + m')g$.

Die Kraft P, welche auf diese Gesammt-Masse wirkt, ist dagegen, alles in Pfunden ausgedrückt, so:

$$P = mg \cdot \sin\alpha - m'g \cdot \sin\gamma.$$

Folglich erhält jeder Atom (nach §. 13.) die beschleunigende Kraft φ, so daß

$$\varphi = \frac{P}{Q} \cdot g = \frac{m \cdot \sin\alpha - m' \cdot \sin\gamma}{m + m'} \cdot g$$

ist, wo auch statt der Massen ihre Gewichte genommen werden können.

Mit dieser beschleunigenden Kraft bewegt sich also jeder Atom der beiden Massen m und m' in den vorausgesetzten Richtungen. Da sie konstant ist, so bringt sie (nach I. Th. Mech. §. 32.) in t Sekunden die Geschwindigkeit

$$v = \varphi \cdot t + c$$

und den Raum

$$s = \tfrac{1}{2}\varphi \cdot t^2 + c \cdot t$$

hervor, wenn c die Anfangs-Geschwindigkeit ist und wenn man

s mit t zugleich anfangen läßt (und dies ist genau das Resultat des §. 25.).

Auch die Spannung T des Fadens zu irgend einer Zeit t kann man jetzt finden. Hinge nämlich die Masse m mit der Masse m' nicht zusammen, so würde sie die beschleunigende Kraft $g \cdot \sin\alpha \cdot dt$, folglich die bewegende Kraft $mg \cdot \sin\alpha \cdot dt$ haben. Wegen des Zusammenhanges mit m' hat sie aber die (kleinere) beschleunigende Kraft $\varphi \cdot dt$, also auch die kleinere bewegende Kraft $m\varphi \cdot dt$. Die, mittelst des Fadens, von m' ausgehende Wirkung in der Länge des Fadens ist also

$$= mg \cdot \sin\alpha \cdot dt - m\varphi \cdot dt = m(g \cdot \sin\alpha - \varphi) \cdot dt,$$

und dies ist die Spannung T des Fadens. Man hat also

$$T = m(g \cdot \sin\alpha - \varphi) \cdot dt;$$

oder, wenn man statt φ seinen Werth $\frac{m \cdot \sin\alpha - m' \cdot \sin\gamma}{m + m'} \cdot g$ substituirt,

$$T = \frac{mm'}{m + m'} \cdot g(\sin\alpha + \sin\gamma) \cdot dt,$$

(ganz so wie im §. 25.).

II. In dem andern Problem (des §. 26.) ist wiederum $m + m'$ die zu bewegende Masse und $Q = (m + m')g$ ihr Gewicht. — Die Kraft P dagegen, welche das Ganze in Bewegung zu setzen hat, ist, ebenfalls in Pfunden ausgedrückt,

$$P = mg(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) - m'g(\sin\gamma + \mu \cdot \cos\gamma).$$

Daher erhält das Ganze eine beschleunigende Kraft

$$\varphi = \frac{P}{Q} g = \frac{m(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) - m'(\sin\gamma + \mu \cdot \cos\gamma)}{m + m'} \cdot g,$$

und dies ist wiederum genau das oben (im §. 26.) gefundene Resultat.

III. In der Aufgabe des (§. 27.) ist $m + m' + pl$ die ganze zu bewegende Masse, deren Gewicht $Q = (m + m' + pl) \cdot g$ ist. — Die Kraft P, welche zu Ende der Zeit t diese Masse in neue Bewegung zu setzen hat, ist

$$P = [m + p(\lambda + x)] \cdot g \cdot \sin\alpha - [m' + p(\lambda' - x)] \cdot g \cdot \sin\gamma.$$

Also erhält jeder Atom der Masse $m+m'+pl$ die beschleunigende Kraft

$$\varphi=\frac{P}{Q}\cdot g=\frac{[m+p(\lambda+x)]\cdot \sin\alpha-[m'+p(\lambda'-x)]\cdot \sin\gamma}{m+m'+pl}\cdot g.$$

Weil aber die beschleunigende Kraft allemal $=\partial v=\partial^2 x$ ist, so bekommt man auch hier wieder

$$\partial^2 x=\frac{(m+p\lambda)\cdot \sin\alpha-(m'+p\lambda')\cdot \sin\gamma+px\cdot(\sin\alpha+\sin\gamma)}{m+m'+pl},$$

oder, wenn man dem a^2 und b dieselben Bedeutungen einräumt wie im (§. 27.),

$$\partial^2 x = a^2 x+b,$$

so daß jetzt, hier wie dort, die Integration dieser Gleichung eintreten muß, um die völlige Lösung der Aufgabe herbeizuführen.

IV. In der Aufgabe des (§. 28.) ist wiederum $m+m'+pl$ die in Bewegung zu setzende Masse, und ihr Gewicht

$$Q = (m+m'+pl)g,$$

in Pfunden. — Die Kraft P, welche in Bewegung setzt, ist dagegen, ebenfalls in Pfunden, und auf dieselbe Stelle (wo m hängt) reducirt,

$$= mg+p(\lambda+x)g-\mu[m'g+\tfrac{1}{2}p(\lambda'-x)g].$$

Also ist (nach §. 13.) die beschleunigende Kraft eines jeden Atoms dieser Massen

$$=\frac{P}{Q}\cdot g=\frac{m+p(\lambda+x)-\mu[m'+\frac{1}{2}p(\lambda'-x)]}{m+m'+pl}\cdot g,$$

genau so wie solches (im §. 28.) bereits gefunden worden.

V. In der Aufgabe (des §. 29.) endlich ist die ganze in Bewegung zu setzende Masse bloß $m+m'$, ihr Gewicht

$$Q = (m+m')g,$$

in Pfunden. — Die Kraft P, in Pfunden, welche dieselbe in Bewegung zu setzen hat (auf die Stelle, wo m ist, reducirt) ist dagegen

$$= mg-\frac{1}{1+\alpha v}\mu\cdot m'g.$$

Deshalb ist (nach §. 13.) die beschleunigende Kraft eines jeden

Atoms $= \frac{P}{Q} \cdot g = \frac{m - \frac{1}{1+\alpha v}\mu m'}{m+m'} \cdot g$; und dasselbe Resultat ist bereits (im §. 29.) gefunden worden.

In diesen fünf Fällen erscheint die Anwendung (des §. 13.) zur Lösung der Probleme eben so einfach als bequem. Wir werden jedoch später zeigen, daß dieses Verfahren unangenehmer wird bei zusammengesetzteren Aufgaben, und, was das allerschlimmste ist, zu unrichtigen Resultaten führen kann, wenn man dasselbe überall durchführen will.

§. 30.

Wollte man sich die Aufgabe (des §. 25.) so stellen, daß die beiden Massen m' und m, die mit einander durch einen über einen unbeweglichen Cylinder gehenden Faden verbunden sind, auf beiden Seiten des Cylinders vertikal herunter hängen, so wäre $\alpha = \gamma = 90^0$, $\sin\alpha = \sin\gamma = 1$, und man erhielte

$$\partial^2 x = \partial v = \frac{m - m'}{m+m'} \cdot g \ ^{*}),$$

also

$$\partial x = v = \frac{m - m'}{m+m'} \cdot g \cdot t + c,$$

wo statt der Massen auch ihre Gewichte gesetzt werden können. Die Bewegung der Masse m ist also wieder eine gleichförmig beschleunigte, wie bei dem freien Fall der Körper, nur daß die beschleunigende Kraft und daher auch die Geschwindigkeit zu Ende einer jeden Zeit t im Verhältniß von $\frac{m - m'}{m+m'}$ zu 1 gerin-

*) Es ist hier die in Bewegung zu setzende Masse $= m + m'$ und ihr Gewicht $= (m+m')g$. — Die Kraft, welche sie in Bewegung setzt, ist dagegen $mg - m'g$, d. h. $(m - m')g$; alles in Pfunden. Daher würde der (§. 13.) die beschleunigende Kraft φ der Bewegung,

$$= \frac{(m - m')g}{(m+m')g} \cdot g = \frac{m - m'}{m+m'} \cdot g,$$

geben, wenn man sich die Anwendung desselben erlauben wollte. Man würde also dasmal auf diesem letzteren Wege wiederum dasselbe erhalten, was die direkte Anwendung des d'Alembert'schen Princips bereits geliefert hat.

ger ist, als bei dem freien Fall (jedesmal ohne Widerstand der Luft genommen).

Anmerk. Auf diese Rechnung gründet sich die Einrichtung der Adwood'schen Fall-Maschine, mittelst welcher man in der Physik die Gesetze des freien Falls der Körper (im luftleeren Raume) durch Versuche bestätigt. Im Allgemeinen besteht diese Fall-Maschine in der so eben beschriebenen Vorrichtung (Fig. 2.), nur daß die Masse m aus zwei Theilen besteht, deren einer $=m'$ dünne und an dem Faden fest gemacht ist, so daß selbiger durch den Ring bei C ohne zu streifen hindurchgeht, während der andere Theil $m-m'$ bloß lose aufsitzt und eine längliche Form hat, so daß er durch denselben Ring nicht durchgeht, sondern auf ihm liegen bleiben muß, sobald er ihn erreicht. Nimmt man nun $m-m'$ nicht sehr groß gegen $m+m'$, so geht diese gleichförmig beschleunigte Bewegung so langsam von Statten, daß man die in den verschiedenen Sekunden beschriebenen Räume wahrnehmen, auf der eingetheilten Stange AB messen und zusehen kann, ob sie sich wirklich wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Zur Messung der Zeiten kann ein Pendel daneben aufgestellt werden. — Benutzt man endlich den Ring bei C, so wird in dem Moment, wo der obere Theil $m-m'$ der Masse m auf dem Ringe sitzen bleibt, die beschleunigende Kraft $=0$ (Null) und die Bewegung muß von nun an mit der erworbenen Geschwindigkeit gleichmäßig (konstant) fortgehen. — Ob dies geschieht, kann man nun ebenfalls an der Maschiene absehen, so wie auch die Geschwindigkeit dieser konstanten Bewegung bestimmen (nämlich den Raum, den sie in der Sekunde beschreibt). Diese Geschwindigkeit ist die End-Geschwindigkeit des Falles gewesen zu der Zeit, wo der obere Theil $m-m'$ der Masse m, auf dem Ringe bei C sitzen blieb. — Es versteht sich, daß man dabei einen sehr dünnen, biegsamen Faden nehmen und die Reibung so viel wie möglich der Null gleich machen muß, wenn die Versuche mit den, auf die oben gefundene beschleunigende Kraft gegründeten Rechnungen möglichst übereinstimmen sollen.

Nimmt man, was rathsam ist, oben statt des Stiftes eine

Rolle,

Rolle, so gilt die vorliegende Theorie dieser Fall-Maschine nicht mehr, weil nun auch die Rolle mit zu den zu bewegenden Massen gezählt werden muß, wie wir solches bereits in der Anmerkung zum (§. 26.) bemerklich gemacht haben. Ist die Rolle gegen die angebrachten Gewichte recht leicht, so ist der Unterschied in den Resultaten der Rechnungen nur sehr geringe.

Je langsamer endlich die Bewegung ist, desto weniger stört der Widerstand der Luft.

§. 31.

Nehmen wir noch einmal die Aufgabe (des §. 25.), wo zwei Massen m und m' auf zwei addossirten schiefen Ebenen mittelst eines Fadens zusammenhängen, nur mit dem einzigen Unterschiede, daß bei B ein, mit seiner Axe horizontal und senkrecht auf die Ebene ABC angebrachtes „Rad an der Welle" sich befinde und so, daß der Faden von m' um die Welle gewikkelt ist, deren Radius $= r$ seyn mag, während der an m befindliche (gewichtlose) Faden um das Rad gewikkelt sich findet, dessen Radius $= R$ ist. — Man soll die Bewegung der Massen m und m' (die jetzt verschiedene Geschwindigkeiten haben) ausmitteln, jedoch unter der Voraussetzung, daß die Masse des „Rades an der Welle" nicht in Rechnung gebracht werde.

Da jetzt die Geschwindigkeiten und die in der Zeit t beschriebenen Wege der beiden Massen m und m' von einander verschieden sind, so thut man hier wohl, wenn man die Winkel-Geschwindigkeit θ des „Rades an der Welle", d. h. die Geschwindigkeit, welche zu Ende jeder Zeit t jeder, von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernte Punkt des „Rades an der Welle" hat, als unbekannt einführt. Dann sind $R \cdot \theta$ und $r \cdot \theta$ bezüglich die Geschwindigkeiten der Massen m und m'. Und nennt man zu gleicher Zeit z den Weg, welchen in der Zeit t jeder Punkt, der die Geschwindigkeit θ hat, beschreibt, so sind $R \cdot z$ und $r \cdot z$ bezüglich die Wege der Massen m und m', die sie in der Zeit t zurücklegen (vergl. §. 4.).

Nun sind die zu Ende der Zeit t neu hinzutretenden Kräfte (Fig. 1.)

$mg \cdot \sin\alpha \cdot dt$ in der Richtung BC

und $m'g \cdot \sin\gamma \cdot dt$ in der Richtung BA.

Diese bringen an m einen Zuwachs $\partial(R\theta)_t \cdot dt$, oder $R \cdot \partial\theta_t \cdot dt$ an Geschwindigkeit, folglich einen Zuwachs

$mR \cdot \partial\theta_t \cdot dt$ an „Größe der Bewegung",

an m′ dagegen einen Zuwachs $\partial(r\theta)_t \cdot dt$, oder $r \cdot \partial\theta_t \cdot dt$ an Geschwindigkeit, also einen Zuwachs

$m'r \cdot \partial\theta_t \cdot dt$ an „Größe der Bewegung"

hervor. Setzt man nun Kräfte, die diesen Zuwachsen gleich sind, ihnen genau entgegen, so hat man die verlorenen Kräfte, nämlich, wenn man zur Abwechslung alle Kräfte auf die Druck-Einheit bezieht,

$-mR \cdot \partial\theta + mg \cdot \sin\alpha$ in der Richtung BC

und $+m'r \cdot \partial\theta + m'g \cdot \sin\gamma$ in der Richtung BA.

Da sich nun diese verlorenen Kräfte am „Rade an der Welle" (also am Hebel) im Gleichgewicht halten, so hat man jetzt die Gleichung

$$(-mR \cdot \partial\theta + mg \cdot \sin\alpha) \cdot R = (m'r \cdot \partial\theta + m'g \cdot \sin\gamma) \cdot r.$$

Diese giebt, nach $\partial\theta$ aufgelößt,

$$\partial\theta = \frac{mR \cdot \sin\alpha - m'r \cdot \sin\gamma}{mR^2 + m'r^2} \cdot g;$$

und dieß ist also die beschleunigende Kraft der Punkte der Maschine, welche die Geschwindigkeit θ haben, d. h. welche von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernt sind. — Hieraus folgt, wenn man nach t integrirt,

$$\theta = \frac{mR \cdot \sin\alpha - m'r \cdot \sin\gamma}{mR^2 + m'r^2} \cdot g \cdot t + \theta',$$

wenn θ' die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ist. Diese Gleichung, noch einmal integrirt, giebt zuletzt

$$z = \frac{1}{2} \frac{mR \cdot \sin\alpha - m'r \cdot \sin\gamma}{mR^2 + m'r^2} \cdot g \cdot t^2 + \theta' \cdot t,$$

wenn der Weg z der von der Dreh-Axe um 1 entfernten Punkte mit t zugleich anfängt.

Hat man aber die beschleunigende Kraft $\partial\theta$, die Geschwindigkeit θ und den Weg z der von der Dreh-Axe um 1 entfernten Punkte der Maschine gefunden, so sind bezüglich

R·$\partial\theta$ und r·$\partial\theta$ die beschleunigenden Kräfte } zu Ende der
R·θ und r·θ die Geschwindigkeiten } Zeit t,

endlich

R·z und r·z die in der Zeit t beschriebenen Wege
der Massen m und m' *). — Und so sieht sich also das Problem vollkommen gelöst.

Anmerk. 1. Wird aber noch die Masse des „Rades an der Welle" in Rechnung gebracht, was geschehen muß, weil solche ebenfalls mit zu den in Bewegung zu setzenden Massen gehört, so wird die Rechnung (nach Angabe der Anmerkung zu §. 26.) etwas verändert ausfallen, und davon mag dann weiter unten die Rede seyn. Jedenfalls wird sie aber immer nach denselben Principien geführt, die wir auch hier angewandt haben.

Anmerk. 2. Nimmt man hier wieder $\alpha = \gamma = 90°$, also $\sin\alpha = \sin\gamma = 1$, so daß die Gewichte mg und m'g am Rade und an der Welle vertikal frei herunterhängen, so erhält man die beschleunigende Kraft

$$\partial\theta = \frac{mR - m'r}{mR^2 + m'r^2} \cdot g,$$

also auch

$$\theta = \frac{mR - m'r}{mR^2 + m'r^2} \cdot gt + \theta',$$

wo aber ebenfalls die Masse des Hebels (d. h. des „Rades an der Welle") nicht in Rechnung gebracht ist.

Anmerk. 3. Multiplicirt man die Gleichung (1.) mit dem Nenner weg, so erhält man

---

*) Ist nämlich φ die beschleunigende Kraft, v die Geschwindigkeit von m zu Ende der Zeit t, und x der Weg, den die Masse m in der Zeit t beschrieben hat, so hat man, außer $\partial z = \theta$ und $\partial^2 z = \partial\theta$, noch

$$\partial x = v \quad \text{und} \quad \partial v = \varphi, \quad \text{also} \quad \partial^2 x = \varphi.$$

Weil aber auch offenbar $x = R \cdot z$ ist, so hat man auch noch

$$\partial x = \partial(R \cdot z) = R \cdot \partial z; \qquad \partial^2 x = \partial(R \cdot \partial z) = R \cdot \partial^2 z,$$

d. h.
$$v = R \cdot \theta \quad \text{und} \quad \varphi = R \cdot \partial\theta.$$

1) $(mR^2 + m'r^2) \cdot \partial\theta = (mR - m'r) \cdot g.$

Da nun θ die, während der Zeit t gewonnene Winkel-Geschwindigkeit ist, so ist $d\theta$ oder $\partial\theta \cdot dt$ der Zuwachs an Geschwindigkeit, welchen jeder von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernte Punkt des Hebels (d. h. des „Rades an der Welle") in dem, unmittelbar nach der Zeit t folgenden unendlich-kleinen Zeittheilchen dt bei dieser Bewegung gewinnt. — Multiplicirt man aber die obige Gleichung (1.) noch mit dt, so erhält man

2) $(mR^2 + m'r^2) \cdot d\theta = (mR - m'r) \cdot g \cdot dt.$

Untersuchen wir nun die Bedeutung der Ausdrücke zur Linken und zur Rechten dieser Gleichung, so finden wir:

Es ist $R\theta$ die Geschwindigkeit des Fadens am Rade, folglich $d(R \cdot \theta)$ oder $R \cdot d\theta$ der in der Zeit dt gewonnene Zuwachs an Geschwindigkeit, und $mR \cdot d\theta$ ist also der von der Masse m dadurch erworbene Zuwachs an „Größe der Bewegung." Dann ist aber $mR^2 \cdot d\theta$ das statische Moment dieses Zuwachses in Bezug auf die Axe des „Rades an der Welle", als Momenten-Axe gedacht. Der Ausdruck $(mR^2 + m'r^2) \cdot d\theta$ ist also die Summe der statischen Momente der, unmittelbar nach der Zeit t von den Massen m und m' gewonnenen Zuwachse an „Größe der Bewegung."

Auf der andern Seite ist $mg \cdot dt$ das Gewicht der Masse m, und $m \cdot R \cdot g \cdot dt$ das statische Moment dieses Gewichts in Bezug auf dieselbe Momenten-Axe. Also ist der Ausdruck zur Rechten (in 2.), nämlich $(mR - m'r)g \cdot dt$ die Summe der statischen Momente der zu Ende der Zeit t wirkenden Gewichte, in Bezug auf dieselbe Momenten-Axe.

Die Gleichung (2.) lehrt also, daß die erstere Summe der statischen Momente gleich ist der letztern Summe der statischen Momente. — Dies ist jedoch eine an sich schon ganz nahe liegende Folge des Gleichgewichts zwischen den verlorenen Kräften an dieser Maschine.

Anmerk. 4. Wollte man diese Aufgabe des vorhergehenden Paragraphen ohne direkte Zuziehung des d'Alembert'schen Princips, sondern wiederum mittelst des Satzes (§. 13.) lösen,

nämlich daß die Kraft von P℔ jeden Atom der Masse von Q℔ die beschleunigende Kraft $\frac{P}{Q} \cdot g$ giebt, so müßte man vor allen Dingen die Voraussetzungen jenes (§. 13.) erfüllen, nämlich die zu bewegende Masse an eine und dieselbe Stelle vereinigen, und alle Kräfte ebenfalls auf dieselbe Stelle reduciren.

I. Was nun die Reduktion der Massen auf eine und dieselbe Stelle (bei drehender Bewegung um eine feste Dreh-Axe) betrifft, so stellt man folgenden Satz hin:

Bei jeder drehenden Bewegung um eine absolut feste Dreh-Axe bringen dieselben Kräfte genau dieselbe Bewegung hervor, wenn man irgend eine Masse m' in der Entfernung r' von der Dreh-Axe wegnimmt, und dafür eine andere Masse m'' in der Entfernung r'' anbringt, sobald nur

$$m' \cdot r'^2 = m'' \cdot r''^2$$

ist *). — Wollte man daher $r''=1$ nehmen, so müßte $m''=m' \cdot r'^2$ genommen werden.

Der Beweis ist nach Anleitung des d'Alembert'schen Princips leicht zu führen, fällt aber nach dem in vorstehender Anmerkung Gesagten ohne weitere Zergliederung von selbst in die Augen **).

Das Produkt aus einer unendlich-kleinen Masse in das Quadrat der Entfernung derselben von der Dreh-Axe heißt das Trägheits-Moment der Masse in Bezug auf diese Axe. — Sollen also zwei Massen m' und m'' an einem sich drehenden Systeme

---

*) Hängen m' und m'' an Seilen, so können sie beliebig groß seyn; außerdem aber dürfen m' und m'' nur unendlich-kleine Massen-Elementchen seyn, weil sonst ihre Entfernungen r' und r'' von der Dreh-Axe keinen bestimmten Sinn hätten.

**) Die Kraft P, deren statisches Moment Pp ist, vermehre die Winkel-Geschwindigkeit der Maschine, an welcher m' in der Entfernung r' sich befindet, um $d\varphi$, so ist $r' \cdot d\varphi$ die von m' gewonnene Geschwindigkeit, $m'r' \cdot d\varphi$ die von m' gewonnene „Größe der Bewegung", und $m'r'^2 \cdot d\varphi$ das statische Moment dieser Kraft, welches $= Pp$ seyn muß. Nimmt man nun m' weg, und bringt man dafür m'' in der Entfernung r'' an, und soll nun dieselbe Kraft P denselben Zuwachs $d\varphi$ an Winkel-Geschwindigkeit hervorbringen, so muß noch $m''r''^2 \cdot d\varphi = P \cdot p$ seyn. Also ist auch $m'r'^2 = m''r''^2$.

dieselbe Bewegung annehmen von denselben Kräften, so müssen ihre Trägheits-Momente in Bezug auf die Dreh-Axe einander gleich seyn; und umgekehrt.

II. Für die Reduktion der Kräfte, welche auf die Bewegung eines, sich um eine absolut feste Axe drehenden Systems einwirken, gilt dagegen der Satz: daß zwei Kräfte an verschiedenen Stellen dasselbe leisten, wenn ihre statischen Momente in Bezug auf die Dreh-Axe einander gleich sind.

Beide Kräfte werden nämlich dann (an diesem Hebel) durch eine und dieselbe Kraft vernichtet.

III. Wenden wir nun diese zwei Sätze, welche für jede drehende Bewegnng um eine unbewegliche Dreh-Axe gelten, auf die Lösung der Aufgabe des (§. 31.) mittelst der Methode des (§. 13.) an, so reduciren wir zuerst alle Massen auf eine und dieselbe Stelle S, welche von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernt ist. Nach (I.) kann man nämlich statt der in Bewegung zu setzenden Masse m in der Entfernung R die Masse mR^2 in der Entfernung 1, und statt der in Bewegung zu setzenden Masse m' in der Entfernung r, die Masse $m'r^2$ in der Entfernung 1 von der Dreh-Axe setzen. Statt der in Bewegung zu setzenden Massen m und m' kann man daher die Masse $mR^2 + m'r^2$ in dem Punkte S anbringen, welcher um 1 von der Dreh-Axe entfernt ist, und diese nun als die zu bewegende Masse ansehen. — Das Gewicht dieser Masse ist dann

$$(mR^2 + m'r^2) \cdot g,$$

in Pfunden.

Nach (II.) dagegen kann man statt der Kraft $mg \cdot \sin\alpha$ in der Entfernung R, die Kraft $mRg \cdot \sin\alpha$ in der Entfernung 1; eben so statt der Kraft $m'g \cdot \sin\gamma$ in der Entfernung r, die Kraft $m'gr \cdot \sin\gamma$ in der Entfernung 1 von der Dreh-Axe anbringen, so daß $mRg \cdot \sin\alpha - m'rg \cdot \sin\gamma$ die Gesammt-Kraft ist, welche in S wirkt, ebenfalls in Pfunden ausgedrückt.

An derselben Stelle S, welche von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit abliegt, wirkt also nun eine Kraft von

$$mRg \cdot \sin\alpha - m'rg \cdot \sin\gamma$$

Pfunden, auf die eben dahin reducirte Masse von $(mR^2+m'r^2)g$ Pfunden. Daher nimmt (nach §. 13.) dieser Punkt S eine beschleunigende Kraft an

$$= \frac{mR \cdot \sin\alpha - m'r \cdot \sin\gamma}{mR^2 + m'r^2} \cdot g;$$

und gerade dasselbe haben wir oben (im §. 31.) ebenfalls gefunden. — Dabei kann man in diesen Formeln überall statt der Massen ihre Gewichte setzen.

Anmerk. Betrachten wir nun in dem nächsten Paragraphen dieselben Aufgaben noch einmal, jedoch unter der Voraussetzung, daß oben eine Rolle, oder ein „Rad an der Welle" sich befindet, und daß die Reibung am Zapfen noch berücksichtigt wird.

§. 32.

Setzen wir jetzt voraus, daß wieder auf den zwei adossirten schiefen Ebenen ABC (Fig. 1.) die beiden Massen m' und m mittelst gewichtloser Faden zusammenhängen, die jedoch an einem „Rade an der Welle" befestigt sind, so daß m' an der Welle hängt, die den Radius r hat, m dagegen am Rade, dessen Radius $= R$ seyn mag. Die Masse und das Gewicht des „Rades an der Welle" werde nicht berücksichtigt, wohl aber die Reibung an den Zapfen, deren Radius ϱ seyn soll, und die wir uns in einen Bolzen vereint denken, so daß alle verlorenen Kräfte in einer und derselben Ebene wirken.

Wird θ die Winkel-Geschwindigkeit genannt und z der Weg, den der Punkt, welcher von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernt ist, in der Zeit t beschrieben hat, so sind $r\theta$ und $R\theta$ die Geschwindigkeiten zu Ende der Zeit t, und rz, Rz die in der Zeit t gemachten Wege der Massen m' und m. Alle verlorenen Kräfte der Masse m geben die einzige

$$mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha - mR \cdot \partial\theta \text{ in der Richtung BC,}$$

und alle verlorenen Kräfte der Masse m' vereinigen sich in

$$m'g \cdot \sin\gamma + \mu m'g \cdot \cos\gamma + m'r \cdot \partial\theta \text{ in der Richtung BA.}$$

Da nun diese verlorenen Kräfte am „Rad an der Welle" sich

im Gleichgewichte halten müssen, so werden sie auf die Zapfen an einer unbekannten Stelle einen unbekannten Druck S hervorbringen. Bringen wir einen eben so großen Gegen-Druck S an, welcher mit dem Horizont OX (Fig. 6.) den Winkel φ macht, so ist die Reibung am Zapfen $= \mu' S$ senkrecht auf diesem Druck, und wir haben nun alle Kräfte, welche in diesem Systeme im Gleichgewicht stehen. Dies giebt aber drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} S \cdot \cos\varphi - \mu' S \cdot \sin\varphi \\ \quad + (mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha - mR \cdot \partial\theta) \cdot \cos\alpha \\ \quad - (m'g \cdot \sin\gamma + \mu m'g \cdot \cos\gamma + m'r \cdot \partial\theta) \cdot \cos\gamma \end{array}\right\} = 0,$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} S \cdot \sin\varphi + \mu' S \cdot \cos\varphi \\ \quad - (mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha - mR \cdot \partial\theta) \cdot \sin\alpha \\ \quad - (m'g \cdot \sin\gamma + \mu m'g \cdot \cos\gamma + m'r \cdot \partial\theta) \cdot \sin\gamma \end{array}\right\} = 0$$

und

$$3)\quad (mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha - mR \cdot \partial\theta) R = (m'g \cdot \sin\gamma + \mu m'g \cdot \cos\gamma + m'r \cdot \partial\theta) r + \mu' S \cdot \varrho,$$

wo μ der Reibungs-Koefficiont der Massen auf den schiefen Ebenen ist, wo dagegen μ' den Reibungs-Koefficienten an den Zapfen des „Rades an der Welle" vorstellt. Findet man nun aus den beiden erstern Gleichungen S ohne φ, und substituirt man diesen Werth von S in die dritte, so hat man die Gleichung für die Winkel-Geschwindigkeit θ, wo man jedoch statt $\partial\theta$ auch $\partial^2 z$ schreiben kann *).

Hat man aber θ in die Zeit t ausgedrückt gefunden, so geben die Gleichungen (1. u. 2.) auch S und φ als Funktionen von t dazu, d. h. man kennt dann zu jeder Zeit t den Druck

---

*) Man muß, um diese Rechnung möglichst bequem zu machen, die (1.) mit μ' multipliciren und dann von der (2.) subtrahiren. Man erhält dann sogleich $(1+\mu'^2) S \cdot \sin\varphi$ in $\partial\theta$ ausgedrückt. Wird dann die (2.) mit μ' multiplicirt und zu der (1.) addirt, so hat man sogleich $(1+\mu'^2) S \cdot \cos\varphi$ in $\partial\theta$ ausgedrückt. Quadrirt man dann letztere beiden Resultate und addirt man diese Quadrate, so bekommt man ohne weiteres S in $\partial\theta$, was statt S in die (3.) substituirt werden muß. Dividirt man aber jene beiden Resultate durch einander, so erhält man $tg\varphi$ in $\partial\theta$.

S, der Richtung und der Größe nach, welchen während der Bewegung in diesem Augenblicke der Zapfen auszuhalten hat.

Die verlorene Kraft $mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha - mR \cdot \partial\theta$ ist zugleich die Spannung T an dem Faden am Rade, während die verlorene Kraft $m'g \cdot \sin\gamma + \mu m'g \cdot \cos\gamma + m'r \cdot \partial\theta$ zugleich die Spannung T' ist, welche augenblicklich (d. h. zu Ende einer jeden Zeit t) der Faden an der Welle erleidet.

Anmerk. Wollte man das Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften ganz genau nach der Anleitung des (II. Theil §§. 78. — 80.) herstellen, so müßte man das System selbst als ein loses System behandeln, welches aus drei Theilen besteht, nämlich der Masse m, welche von der Spannung T von C nach B hin ergriffen ist, dann der Masse m', welche von der Spannung T' von A nach B hin gehalten wird, endlich das „Rad an der Welle", welches von den beiden Spannungen T und T' bezüglich von B nach C und von B nach A hin gehalten wird. Jeden dieser drei Theile muß man nun für sich in's Gleichgewicht stellen.

Zu dem Ende muß man den Gegen-Druck N (immer Figur 1.) an einer unbekannten Stelle aber senkrecht auf BC in Rechnung bringen, und die Reibung μN in der Richtung CB. Auf den Körper m wirken nun T und μN und $mR \cdot \partial\theta$ in der Richtung CB, das Gewicht mg in der vertikalen Richtung, und N senkrecht auf CB. Da diese 5 Kräfte den Körper m im Gleichgewichte halten, und als in einer und derselben Ebene liegend angesehen werden können, so giebt es drei Gleichungen des Gleichgewichts, von denen die Momenten-Gleichung die Stelle des unbekannten Gegendruckes N geben würde, weshalb wir diese sogleich weglassen wollen.

Nimmt man ferner zu Koordinaten-Axen, auf welche die Richtungen der Kräfte bezogen werden, den Durchschnitt CB der schiefen Ebene und die darauf senkrechte Gerade, so sind die beiden andern Gleichungen

1) $mg \cdot \sin\alpha - (T + \mu N + mR \cdot \partial\theta) = 0,$

2) $mg \cdot \cos\alpha - N = 0.$

Von dieser Gleichung giebt die (2.) den Druck N, die (1.) dagegen die Spannung T.

Der andere Körper m' giebt auf dieselbe Weise die beiden Gleichungen seines Gleichgewichts

3) $m'g \cdot \sin\gamma - T' + \mu N' + m'r \cdot \partial\theta = 0,$

4) $m'g \cdot \cos\gamma - N' = 0.$

Von diesen Gleichungen giebt die (4.) den Druck N', die (3.) dagegen dann die Spannung T'.

Damit nun auch noch das „Rad an der Welle" mittelst der beiden Spannungen T und T', dem (Gegen-)Drucke S am Zapfen und der Reibung $\mu'S$, im Gleichgewichte sey, hat man die drei Gleichungen

5) $S \cdot \cos\varphi - \mu' S \cdot \sin\varphi + T \cdot \cos\alpha - T' \cdot \cos\gamma = 0;$

6) $S \cdot \sin\varphi + \mu' S \cdot \cos\varphi - T \cdot \sin\alpha - T' \cdot \sin\gamma = 0;$

7) $T \cdot R - T' \cdot r - \mu' S \cdot \varrho = 0.$

Und dies sind dieselben drei Gleichungen, welche wir auch im Paragraphen selbst für die gegenwärtige Aufgabe erhalten haben.

Anmerk. 2. Da übrigens in diesen Gleichungen der Weg z nirgends erscheint, so findet sich zuletzt $\partial\theta$ konstant, so daß die Winkel-Geschwindigkeit θ selbst mit der Zeit t proportional wird, also die Bewegungen von m und von m' wiederum gleichförmig beschleunigte werden. Dagegen würde außer $\partial\theta$ oder $\partial^2 z$, auch noch der Weg z selbst in die Gleichungen eingegangen seyn, so daß eine schwierigere Integration nöthig geworden seyn würde, wenn wir den Faden nicht als schwerlos angesehen, sondern das Gewicht desselben in Rechnung gebracht hätten. Wir wollen dies in dem nächsten Paragraphen, aber für den einfachern Fall thun, wo $\alpha = \gamma = 90^0$ geworden sind, d. h. wo die schiefen Ebenen ganz wegfallen, und die Gewichte m'g und mg auf der Welle und am Rade frei herunter hängen (wie in Fig. 20.).

§. 33.

An einem „Rade an der Welle" (Fig. 20.) hängen zwei Massen, nämlich m' an der Welle, m am Rade, an Seilen, von denen der

laufende Fuß die Masse p, also das Gewicht pg hat. Das Gewicht des „Rades an der Welle" und der auf demselben aufgewickelten Seile soll nicht in Betrachtung gezogen werden, wohl aber die Reibung an den Zapfen (für welche wir uns immer einen Bolzen denken). Man soll die Bewegung des Ganzen ausmitteln, unter der Voraussetzung, daß z, θ, r, R, S und μ' dieselben Bedeutungen haben, wie im vorhergehenden (§. 32.).

Da nach der Zeit t das Seil an m, welches für $t=0$ die Länge λ hatte, um Rz länger geworden ist, also die Länge $\lambda+Rz$ und das Gewicht $pg(\lambda+Rz)$ hat; da ferner zu derselben Zeit das Seil an m', welches anfänglich die Länge λ' hatte, um rz kürzer geworden ist, also nur noch die Länge $\lambda'-rz$, folglich auch nur noch das Gewicht $pg(\lambda'-rz)$ hat, so sind dasmal die verlorenen Kräfte von m in der vertikalen Richtung

$$=(m+p\lambda+pRz)(g-R\cdot\partial^2 z),$$

von m' dagegen, auch in vertikaler Richtung,

$$=(m'+p\lambda'-prz)(g+r\cdot\partial^2 z);$$

wo man, um nur einen einzigen Veränderlichen zu behalten, sogleich $\partial^2 z$ statt $\partial\theta$ geschrieben hat.

Die Gleichungen des Gleichgewichts werden nun:

$$\text{I.}\quad S\cdot\cos\varphi-\mu'\cdot S\cdot\sin\varphi=0,\quad\text{oder}\quad \cot g\,\varphi=\mu';$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned}&-S\cdot\sin\varphi-\mu' S\cdot\cos\varphi\\&\qquad+(m+p\lambda+pRz)(g-R\cdot\partial^2 z)\\&\qquad+(m'+p\lambda'-prz)(g+r\cdot\partial^2 z)\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{aligned}&-\mu' S\cdot\varrho\\&\qquad+(m+p\lambda+pRz)(g-R\cdot\partial^2 z)\cdot R\\&\qquad-(m'+p\lambda'-prz)(g+r\cdot\partial^2 z)\cdot r\end{aligned}\right\}=0.$$

Substituirt man nun (aus I.) den Werth von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ in die (II.) und aus dieser dann den Werth von S in die (III.), so erhält man eine Differenzial-Gleichung, welche sich sogleich auf die Form

$$\text{IV.}\qquad \partial^2 z=\frac{A+Bz}{C+Dz}$$

bringen läßt, wo A, B, C, D konstant sind.

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit dem integrirenden

Faktor ∂z und integrirt man dann sogleich links und rechts, so ergiebt sich

$$\text{V.} \quad \tfrac{1}{2}(\partial z)^2 = \int \frac{A+Bz}{C+Dz} \cdot dz = F_z + c,$$

wo F_z das gefundene Integral und c die zugehörige unbestimmte Konstante vorstellt, welche sich dadurch leicht bestimmt, daß man die Anfangs-Werthe von z und ∂z (oder θ) kennt. Diese Gleichung giebt dann

$$\text{VI.} \quad \partial z = \pm\sqrt{2F_z+c}, \quad \text{also} \quad \partial t_z = \frac{1}{\sqrt{2F_z+c}},$$

so daß zuletzt

$$\text{VII.} \quad t = \int \frac{1}{\sqrt{2F_z+c}} \cdot dz + C$$

sich ergiebt, wo C aus dem Anfangs-Werthe von z seine Bestimmung findet. — Diese Urgleichung zwischen t und z giebt nun z, also auch die Wege rz und Rz der Massen m' und m; ferner, weil $\partial z = \theta$ ist, auch θ, und die Geschwindigkeiten $r\theta$ und $R\theta$ derselben Massen m' und m; alles ist t ausgedrückt. —

§. 34.

So wie man sich im nächst vorhergehenden Paragraphen $p=0$ denkt, d. h. die Masse, also auch das Gewicht der Seile außer Acht läßt, so hat man für dieselbe Aufgabe und dieselbe Figur (Fig. 20.) diese drei Gleichungen,

$$\text{I.} \quad S \cdot \cos\varphi - \mu' S \cdot \sin\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad \cot g\,\varphi = \mu',$$

$$\text{II.} \quad -S \cdot \sin\varphi - \mu' S \cdot \cos\varphi + m(g - R \cdot \partial^2 z) + m'(g + r \cdot \partial^2 z) = 0,$$

$$\text{III.} \quad -\mu' S \cdot \varrho + m(g - R \cdot \partial^2 z) \cdot R - m'(g + r \cdot \partial^2 z) \cdot r = 0.$$

Aus der (I.) folgt $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu'^2}}$, $\cos\varphi = \frac{\mu'}{\sqrt{1+\mu'^2}} = \varkappa$, wenn man diese kleine, von μ' nur sehr wenig verschiedene Zahl durch $\varkappa$ bezeichnet, während jedoch immer $\varkappa < \mu'$ ist. Die Gleichung (II.) giebt dann

$$\text{IV.} \quad S = \frac{m(g - R \cdot \partial^2 z) + m'(g + r \cdot \partial^2 z)}{\sqrt{1+\mu'^2}}.$$

Wird nun dieser Werth von S in die (III.) substituirt, so ergiebt sich

$$\text{V.} \quad -\varkappa\varrho[m(g-R\cdot\partial^2 z)+m'(g+r\cdot\partial^2 z)]$$
$$+m(g-R\cdot\partial^2 z)\cdot R-m'(g+r\cdot\partial^2 z)\cdot r=0.$$

Diese letztere Gleichung liefert nun, wenn man wiederum $\partial\theta$ statt $\partial^2 z$ schreibt,

$$\text{VI.} \qquad \partial\theta=\frac{mR-m'r-\varkappa\varrho(m+m')}{mR^2+m'r^2-\varkappa\varrho(mR-m'r)}\cdot g.$$

Es ist also dasmal wiederum $\partial^2 z$ oder $\partial\theta$ konstant, so daß daraus ∂z oder θ ohne weiteres sich ergiebt, und zwar so, daß θ mit der Zeit t proportional wird.

Und in der That ist die jetzige Aufgabe keine andere als die des (§. 32.), nur mit dem Unterschiede, daß hier die dortigen Winkel α und γ als rechte Winkel gedacht werden müssen. — Auch gehen wirklich die Gleichungen (§. 32. NNr. 1—3.) augenblicklich in die hiesigen (I.—III.) über, sobald $\alpha=\gamma=90^0$ gesetzt wird.

§. 35.

Nimmt man noch $R=r$, d. h. nimmt man statt des „Rades an der Welle" eine bloße Rolle, so geht dieses Resultat noch über, wenn man $\frac{\varkappa\varrho}{r}$, d. h. $\frac{\mu'}{\sqrt{1+\mu'^2}}\cdot\frac{\varrho}{r}$, $=\varepsilon$ setzt, wo ε ein sehr kleiner Bruch ist, in

$$r\cdot\partial\theta=\frac{m-m'-\varepsilon(m+m')}{m+m'-\varepsilon(m-m')}\cdot g,$$

wo $r\cdot\partial\theta=\partial(r\theta)$ die beschleunigende Kraft der Massen m und m' vorstellt, weil $r\theta$ selbst ihre Geschwindigkeit bezeichnet.

Anmerk. 1. Vergleicht man diese Resultate mit denen früher für den Fall erhaltenen, daß die Reibung des „Rades an der Welle" (oder der Rolle) an den Zapfen nicht in Rechnung gebracht wird, so wird man finden, daß unter übrigens gleichen Umständen letztere in erstere übergehen, sobald $\mu'=0$, d. h. $\varepsilon=0$ gesetzt wird, wie dies auch seyn muß.

Anmerk. 2. Wollte man auch diese letztern Aufgaben (§§.

32. — 35.) nicht mittelst der direkten Anwendung des d'Alembert'schen Princips, sondern wie wir solches in den Anmerkungen zu den (§§. 29. und 31.) gethan haben, mittelst des Satzes (§. 13.) lösen, nach welchem letztern die Kraft von P Pfunden auf die Masse von Q Pfunden, wenn beide an einer und derselben Stelle sich befinden, eine beschleunigende Kraft $= \frac{P}{Q} \cdot g$ hervorbringt; — so sieht man nicht sogleich, wie dasmal der Druck gegen die Zapfen direkt soll aufgefunden werden können. — Einige ältere Lehrer der Mechanik führen an, daß dieser Druck S (z. B. in dem Falle des §. 34.) von der Summe der beiden rechts und links hängenden Gewichte mg und m'g herrühre; dann müßte er, weil ihn die Reibung wieder etwas vermindert,

$$= \frac{(m + m')g}{\sqrt{1 + \mu'^2}}$$

seyn, welches von dem (im §. gefundenen) Werthe

$$S = \frac{(m + m')g - (mR - m'r) \cdot \partial\theta}{\sqrt{1 + \mu'^2}}$$

verschieden und zu groß ist. — Andere Lehrer meinen dagegen so verfahren zu müssen:

Sie suchen (um bei der Aufgabe des §. 34. zu bleiben) zuerst die unbekannte Kraft Z, welche da, wo die Ueberwucht ist, statt des Gewichtes mg angebracht werden müßte, um mit dem Gewichte m'g an der Welle das Gleichgewicht zu erhalten. Dies führt sie (für die Aufgabe des §. 34.) zu den drei Gleichungen, nämlich

1) $S \cdot \cos\varphi - \mu' \cdot S \cdot \sin\varphi = 0$, oder $\cot g\, \varphi = \mu'$,

2) $m'g + Z - S \cdot \sin\varphi - \mu' \cdot S \cdot \cos\varphi = 0$,

welche letztere $S = \frac{m'g + Z}{\sqrt{1 + \mu'^2}}$

liefert; — und

3) $Z \cdot R - m'g \cdot r - \mu' \cdot S \cdot \varrho = 0$,

d. h. $R \cdot Z - m'g \cdot r - \varkappa\varrho m'g - \varkappa\varrho Z = 0$,

woraus $Z = \frac{m'(r + \varkappa\varrho)}{R - \varkappa\varrho} g$,

und dann $S=\left(\frac{m'}{\sqrt{1+\mu'^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\mu'^2}}\cdot\frac{m'(r+\varkappa\varrho)}{R-\varkappa\varrho}\right)\cdot g$

hervorgeht.

Hernach nehmen sie

$$mg-Z,\quad \text{oder}\quad \frac{m(R-\varkappa\varrho)-m'(r+\varkappa\varrho)}{R-\varkappa\varrho}\cdot g$$

für die Größe P der Uebenwucht rechts, wo die Masse m (am Rade) hängt; reduciren die Masse m' an der Welle eben dahin (nach dem Verfahren §. 31. Anmerk. 4. I.), so daß sie als die rechts befindliche und zu bewegende Masse Q erhalten:

$$m+\frac{m'r^2}{R^2};$$

— und erschließen nun für die beschleunigende Kraft $R\cdot\partial\theta$ der Masse m (nach §. 13.) den Werth

$$\frac{R^2}{R-\varkappa\varrho}\cdot\frac{m(R-\varkappa\varrho)-m'(r+\varkappa\varrho)}{mR^2+m'r^2}\cdot g,$$

so daß sie dann, wenn durch R dividirt wird,

$$\partial\theta=\frac{R}{R-\varkappa\varrho}\cdot\frac{mR-mr-\varkappa\varrho(m+m')}{mR^2+m'r^2}\cdot g$$

erhalten. — Dies Resultat weicht von dem wahren (im §. 34. VI. gefundenen) dann freilich desto weniger ab, je kleiner der Reibungs-Koefficient μ' und der Halbmesser des Zapfens ϱ (gegen r und R) ist, in so ferne beide für $\mu'=0$, also für $\varkappa=0$, in ein und dasselbe $\partial\theta=\frac{mR-m'r}{mR^2+m'r^2}\cdot g$ übergehen. Diese geringere Abweichung in den Ziffern-Resultaten ist aber nur dem Umstande zuzuschreiben, das der Einfluß der Reibung am Zapfen überhaupt nicht sehr bedeutend ist.

Wie die Auflösung der Aufgaben der vorstehenden Paragraphen lehrt, so ist die letztere der so eben angeführten Ansichten, daß nämlich der Druck nur von den Kräften herrühre, welche einander das Gleichgewicht halten, nicht aber von der Uebenwucht, ziemlich richtig, nur mit dem Unterschiede, daß die Uebenwucht eben in dem Zuwachs an „Größe der Bewegung" sich zeigt, den die einzelnen Massen in dem zu Ende der Zeit t nächst

folgenden Zeittheilchen dt erhalten. Diese Ueberwucht rechnet man daher dadurch ab, daß man diese Zuwachse an „Größe der Bewegung" in entgegengesetzter Richtung zu den am Ende der Zeit t hinzugetretenen Kräften noch hinzunimmt, um die Kräfte zu haben, die sich am Ende der Zeit t gerade im Gleichgewicht erhalten, und daher auch den Druck des „Rades an der Welle" (oder der Rolle) gegen den Bolzen hervorbringen.

Bei diesen letztern Problemen (der §§. 32.—35.), wo der Druck auf den Zapfen, wegen der Reibung daselbst noch in Rechnung gebracht werden muß, sieht man sich also, wenn man auch von der Absicht ausgeht, sie bloß mittelst der Anwendung des (§. 13.) zu lösen, doch allemal auf das d'Alembert'sche Princip zurückgeführt.

Daher empfehlen wir unsern Lesern wiederholt, überall und in allen Fällen (statt den §. 13. anzuwenden) unmittelbar das d'Alembert'sche Princip in Anwendung zu bringen, weil solches in der Theorie strenge erwiesen und in der Anwendung eben so einfach als bequem ist.

§. 36.

Bewegung eines physikalischen Pendels.

Wir beschließen dieses Kapitel mit folgender Aufgabe, welche der Leser hier an dieser Stelle ebenfalls nur als ein Beispiel der Anwendung des d'Alembert'schen Princips betrachten möge.

Eine feste Masse M kann sich um eine absolut feste und horizontale Dreh-Axe OX (Fig. 4.) drehen; sie wird aus dem Gleichgewicht gebracht, so daß der Schwer-Punkt S der Masse M nicht vertikal über oder unter der Dreh-Axe sich befindet, und dann ihrer eigenen Schwere überlassen. Eine solche Vorrichtung nennt man einen zusammengesetzten Pendel, oder einen physikalischen Pendel, im Gegensatz des im (§. 51. des I. Th. Mech.) betrachteten mathematischen oder einfachen Pendels. Man soll mittelst des d'Alembert'schen Princips die entstehende Bewegung näher bestimmen.

Um

Um diese Aufgabe zu lösen, lege man außer der Dreh-Axe OX, welche in der (Fig. 4.) gar nicht zu sehen ist, noch eine Koordinaten-Axe OY horizontal und senkrecht auf OX, so wie die dritte Koordinaten-Axe OZ vertikal, so daß die Dreh-Axe OX auf der Ebene YOZ, welche letztere wir auch noch durch den Schwer-Punkt S des Körpers gehen lassen wollen, senkrecht steht. Nun zerlegen wir die ganze Masse M in unendlich viele unendlich-kleine Massen-Elementchen, welche wir durch dM bezeichnen wollen. Diese Massen-Elementchen entstehen bekanntlich (nach II. Th. §. 52.) entweder dadurch, daß man die Polar-Koordinaten, oder dadurch, daß man die Parallel-Koordinaten zwischen ihren äußersten Grenz-Werthen um unendlich wenig wachsen läßt, jede von der kleinsten Grenze an bis zu ihrem größten Grenz-Werthe hin. Will man hier aber z. B. Parallel-Elemente haben, so darf man doch nicht übersehen, daß für dieses Zerlegen der Masse M in Elementchen durch unendlich weniges Wachsen der Parallel-Koordinaten-Werthe, Koordinaten-Axen vorausgesetzt werden, die im Körper fest liegen, damit während der Bewegung des Körpers die Elemente dieselben bleiben. Deshalb sieht man sich hier veranlaßt, außer den hier gedachten Koordinaten-Axen OX, OY und OZ, auch noch drei andere Koordinaten-Axen OX′, OY′ und OZ′ auf einander senkrecht, aber in dem Körper fest vorauszusetzen und mit diesen letztern Koordinaten-Ebenen X′OY′, X′OZ′ und Y′OZ′ parallel, die Zerlegung der ganzen Masse M in rechtwinkliche Parallelepipeda vorzunehmen, deren Inhalt $= dx' \cdot dy' \cdot dz'$, und deren Masse

1) $$dM = \varrho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

ist, wenn ϱ die Dichtigkeit des Elementchens an seiner, durch die Koordinaten-Werthe x′, y′, z′ (die sich auf die im Körper festen Axen OX′, OY′, OZ′ beziehen) gegebenen Stelle vorstellt. Dabei kann man OX′ mit der Dreh-Axe OX, weil diese auch im Körper fest vorausgesetzt ist, zusammenfallen lassen, während wir dann OZ′ durch den Schwer-Punkt S der Masse M hin-

durchgehen lassen wollen, so daß OY' in der Ebene YOZ, aber senkrecht auf OZ' zu liegen kommt.

Betrachten wir nun irgend ein solches durch x', y' und z' gegebenes Massen-Elementchen dM des Körpers, so beschreibt solches während der Bewegung einen Kreis, welcher mit der Ebene YOZ parallel läuft, wenn er nicht mit ihr zusammenfällt, und welcher den senkrechten Abstand r des Elementes dM von der Dreh-Axe OX zum Radius hat. Nennen wir nun x, y, z die Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM, aber in Bezug auf die horizontalen und vertikalen Axen OX, OY und OZ, gegen welche der Körper während der Bewegung, seine Lage ändert, so sind offenbar y und z Funktionen der Zeit t, und nur x allein ($= x'$) konstant (nach t). Dabei ist noch

2) $$y^2 + z^2 = r^2,$$

aber r ebenfalls (nach t) konstant, so daß, wenn man nach allem t differenziirt,

3) $$y \cdot \partial y + z \cdot \partial z = 0$$

sich ergiebt. Um alles in der (Fig. 4.) recht bequem anschaulich machen zu können, denken wir uns den vom beliebigen Element dM beschriebenen Kreis auf die Ebene YOZ, in welcher auch der Schwer-Punkt S der Masse liegt, projicirt, so daß m die Projektion des Elementes dM, also $Om = r$, $OA = Bm = y$ und $Am = OB = z$ wird.

Während also die Projektion m des Elements dM in der Zeit t den Bogen $Dm = s$ beschrieben hat, dessen Centri-Winkel $DOm = w$ seyn mag, im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, so daß

4) $$s = r \cdot w \quad \text{und} \quad \partial s = r \cdot \partial w$$

ist, —, ist zu Ende der Zeit t die Stelle des Elementes dM durch die Koordinaten-Werthe x, y, z, und die Stelle seiner Projektion m durch die Koordinaten-Werthe y und z als Funktionen von t ausgedrückt; seine, mit OY und OZ parallelen Seiten-Geschwindigkeiten sind daher bezüglich ∂y und ∂z, und die Zuwachse dieser Seiten-Geschwindigkeiten in dem unmittelbar nach t folgenden unendlich-kleinen Zeittheilchen dt, sind bezüglich $\partial^2 y \cdot dt$

und $\partial^2 z \cdot dt$; also die Zuwachse an „Größe der Bewegung" bezüglich $dM \cdot \partial^2 y \cdot dt$ und $dM \cdot \partial^2 z \cdot dt$. — Diese letzteren als Kräfte gedacht und in entgegengesetzter Richtung genommen,

also $\quad -dM \cdot \partial^2 y \cdot dt$ parallel mit OY,

und $\quad -dM \cdot \partial^2 z \cdot dt$ parallel mit OZ,

bilden nun den einen Theil der verlorenen Kräfte (nach §. 18. II.).

Auf der andern Seite hat zu Ende der Zeit t auf das Element dM bloß die Schwere $g \cdot dt$ gewirkt, also die bewegende Kraft $dM \cdot g \cdot dt$ parallel mit OZ. — Diese ist also ebenfalls zu den verlorenen Kräften zu zählen. — Die verlorenen Kräfte sind daher für das Element dM

$-dM \cdot \partial^2 y \cdot dt$ parallel mit OY,

$dM(g - \partial^2 z) \cdot dt$ parallel mit OZ.

Nach der Theorie vom Hebel halten sich aber diese verlorenen Kräfte aller Elementchen dM, um die Axe OX das Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf OX als Momenten-Axe genommen, der Null gleich ist, d. h. wenn

$$\Sigma([(g - \partial^2 z) \cdot y + z \cdot \partial^2 y] \cdot dM) = 0$$

ist, wo wir sogleich durch den, allen zu summirenden Gliedern gemeinschaftlichen Faktor dt wegdividirt haben, aber nicht durch dM wegdividiren konnten, weil die Masse dM der verschiedenen Elementchen verschieden seyn kann. — Weil aber auch g in allen zu addirenden Gliedern dasselbe bleibt, so kann man diese Gleichung auch noch so schreiben

$$(\odot) \cdots \quad \Sigma[(z \cdot \partial^2 y - y \cdot \partial^2 z) \cdot dM] + g \cdot \Sigma(y \cdot dM) = 0;$$

und diese Gleichung in Verbindung mit der andern, nach welcher $y^2 + z^2 = r^2$ ist, bildet nun den Ansatz unserer Aufgabe; — sie giebt, wenn man sie gehörig auflöst, die Werthe von y und z, d. h. die Lage des Elementes dM zu jeder Zeit t, seine Seiten-Geschwindigkeiten ∂y, ∂z, seine wahre Geschwindigkeit ∂s und auch die, allen Elementchen gemeinschaftliche Winkel-Geschwindigkeit der ganzen Masse M, zu jeder Zeit t.

Um aber die Rechnungen bequemer durchführen zu können, führe man statt der Koordinaten-Werthe $OA = y$ und $OB = z$

lieber die Polar-Koordinaten W. ZOm $= \psi$ und Om $=$ r ein, oder, in so ferne SOm $= \alpha$ ein von der Zeit t ganz unabhängiger Winkel ist, lieber ZOS $= \theta$ statt ψ, so daß

5) $\psi = \theta + \alpha$ und $\partial\psi = \partial\theta$, so wie $\partial^2\psi = \partial^2\theta$

ist. Man hat dann

6) $r \cdot \cos\psi = z, \qquad r \cdot \sin\psi = y,$

und wenn man differenziirt, weil r konstant (nach t) ist,

7) $-r \cdot \sin\psi \cdot \partial\psi = \partial z, \qquad r \cdot \cos\psi \cdot \partial\psi = \partial y,$

und

$$8) \quad \begin{cases} -r \cdot \cos\psi \cdot \partial\psi^2 - r \cdot \sin\psi \cdot \partial^2\psi = \partial^2 z, \\ -r \cdot \sin\psi \cdot \partial\psi^2 + r \cdot \cos\psi \cdot \partial^2\psi = \partial^2 y. \end{cases}$$

Diese Werthe geben

9) $z \cdot \partial^2 y - y \cdot \partial^2 z = r^2 \cdot \partial^2\psi = r^2 \cdot \partial^2\theta.$

Wird nun OS $=$ a gesetzt, so daß a der senkrechte Abstand des Schwer-Punktes S von der Dreh-Axe OX ist, und ist SE $= y_1$ der senkrechte Abstand des Schwer-Punktes S von der Ebene XOZ und von OZ, so hat man

10) $y_1 = a \cdot \sin\theta,$

und daher nach der Theorie vom Schwer-Punkte (II. Th. §. 55.)

11) $\Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_1 = M \cdot a \cdot \sin\theta.$

Substituirt man nun diese Werthe (aus 9. und 11.) in die Gleichung (⊙) der Bewegung, und bedenkt man, daß der Faktor $\partial^2\theta$ in allen Gliedern von $\Sigma(r^2 \cdot \partial^2\theta \cdot dM)$ einen und denselben Werth hat, daß daher

$$\partial^2\theta \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) \quad \text{statt} \quad \Sigma(r^2 \cdot \partial^2\theta \cdot dM)$$

gesetzt werden kann, so geht sie dadurch über in

$$(☾) \cdots \qquad \partial^2\theta + g\frac{Ma}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} \cdot \sin\theta = 0;$$

und dieß ist also die Gleichung, welche, integrirt, die Winkel-Geschwindigkeit $\partial\psi$, nämlich $-\partial\theta$, und den Winkel θ zu jeder Zeit t giebt, also die Schwingungs-Zeit, rc.; während M die schwingende Masse, a die Entfernung ihres Schwer-Punktes von der Dreh-Axe, g die örtliche Schwere und $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ ein von der Form der schwingenden Masse abhängiger Ausdruck ist, dessen Berechnung wir weiter unten näher besprechen wollen.

Ist l die Länge eines einfachen Pendels, wie wir solchen im (I. Th. Mech. §. 51.) näher betrachtet haben, so findet man, wenn θ sein Abstand ist von der Vertikalen (im Bogen für den Radius 1) zu Ende der Zeit t (nach I. Th. S. 451. Note)

$$\partial^2\theta + \frac{g}{l}\cdot \sin\theta = 0.$$

Soll also dieses einfache Pendel genau dieselben Schwingungen machen, wie das obige (☾), so muß man

$$(♅)\cdots \qquad l = \frac{\Sigma(r^2\cdot dM)}{Ma},$$

und außerdem die Anfangs-Werthe von $\partial\theta$ und θ in beiden Pendeln (dem physikalischen und dem mathematischen) bezüglich dieselben nehmen. Diesen Werth von l, wie er sich hier (aus ♅) mittelst des physikalischen Pendels ausrechnet, setzt man dann in die (§. 51. I. Th. Mech.) gefundenen Formeln, und man erhält die dort gewünschten Resultate, wie wenn man einen mathematischen Pendel hätte schwingen lassen.

Das Produkt $r^2\cdot dM$ aus der Masse dm in das Quadrat r^2 seiner senkrechten Entfernung von der Dreh-Axe nennt man das Trägheits-Moment dieses Elementes dM in Bezug auf diese Dreh-Axe. Die Summe $\Sigma(r^2\cdot dM)$ ist also die Summe der Trägheits-Momente aller Elementchen in Bezug auf dieselbe Dreh-Axe; und diese Summe wird auch das Trägheits-Moment der ganzen Masse M in Bezug auf diese Dreh-Axe genannt *). Solches wird nun nach (II.

*) Ist ω die Winkel-Geschwindigkeit eines sich um eine Axe OX drehenden Körpers zu irgend einer Zeit t, so ist $r\omega$ die wahre Geschwindigkeit des Elementchens dM, welches in der Entfernung r von der Dreh-Axe liegt, und $r\omega\cdot dM$ ist daher die in dem Elementchen dM vorhandene „Größe der Bewegung," welche bekanntlich der Kraft gleich ist, die man dem sich bewegenden aber isolirt gedachten Elemente dM gerade entgegensetzen müßte, wenn die Bewegung selbst vernichtet seyn soll, welche also die in dem bewegten Elemente dM vorhandene Kraft ausdrückt. Das Produkt $r^2\omega\cdot dM$, oder $\omega\cdot r^2\cdot dM$ ist also das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die Dreh-Axe, und $\Sigma(r^2\omega\cdot dM)$, oder $\omega\cdot\Sigma(r^2\cdot dM)$ ist deshalb die Summe der statischen Momente der in allen bewegten Elementchen augenblicklich (zu Ende der Zeit t) vorhandenen Kräfte. — Dies ist der Grund, warum man bei allen

Th. §. 53.) berechnet, diese Berechnung selbst aber in dem nächsten Kapitel näher beschrieben.

Anmerk. 1. Man konnte die vorliegende Aufgabe von vorne herein etwas kürzer behandeln. Man konnte nämlich das Gewicht $g \cdot dm$ des Massen-Elementchens dM, welches vertikal wirkt, sogleich in zwei Kräfte zerlegen, die eine $g \cdot dM \cdot \frac{y}{r}$ senkrecht auf r, die andere $g \cdot dm \cdot \frac{z}{r}$ in der verlängerten Richtung von r. Da die Richtung der letztern durch die Dreh-Axe geht, so ist ihr Moment $= 0$, und sie kann daher sogleich weggelassen werden, so daß man zu Ende der Zeit t als neu hinzutretende Kraft nur die auf r senkrechte $g \cdot dM \cdot \frac{y}{r}$ in Rechnung zu bringen braucht.

Auf der andern Seite kann man wohl sagen, daß die Geschwindigkeit des Elementes dM zu Ende der Zeit t, $= -r \cdot \partial\theta$, die „Größe der Bewegung" also, $= -r \cdot \partial\theta \cdot dM$ ist, und daher der zu Ende der Zeit t, senkrecht auf r gewonnene Zuwachs an „Größe der Bewegung" in die Druck-Einheit ausgedrückt *),

---

Bewegungen von Massen um eine Dreh-Axe (Rolle, Rad an der Welle, Hebel überhaupt) immer wieder auf's neue zu den Trägheits-Momenten geführt wird, sobald man die Massen dieser sich drehenden Körper mit in die Rechnung zieht. — Da nun auch bei Maschinen die meisten Bewegungen solche drehende Bewegungen um feste Axen sind, so spielen die Trägheits-Momente bei der Bewegung der Massen eine nicht unwichtige Rolle, und deshalb haben wir einen Theil des nächst folgenden Kapitels bloß der Berechnung dieser Trägheits-Momente in mehreren und den gewöhnlichern Beispielen gewidmet.

*) Genau genommen ändert sich in der unmittelbar nach t folgenden Zeit dt die „Größe der Bewegung" nicht bloß ihrer Größe, sondern auch ihrer Richtung nach, so das eigentlich dieses Verfahren, von hier ab durch die früher entwickelte Theorie nicht gerechtfertigt ist. Betrachtet man freilich die Reihe genauer, so findet man, daß der Unterschied in der Rechnung hier keinen Einfluß ausübt, und in so ferne ist dann das auf diesem Wege gewonnene Resultat wiederum nothwendig mit dem zuerst erhaltenen übereinstimmend. — Will man jedoch allen möglichen Einwendungen im Voraus begegnen, so wird man das oben im Paragraphen selbst beobachtete Verfahren gebrauchen müssen.

$= -r \cdot \partial^2\theta \cdot dM$ ist, so daß die zum Element dm gehörige verlorene Kraft

$$= \left(g \cdot \frac{y}{r} + r \cdot \partial^2\theta\right) \cdot dM$$

sich ausweiset, in einer Richtung, welche senkrecht auf r ist, so daß das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die Dreh-Axe

$$= (gy + r^2) \cdot \partial^2\theta \cdot dM$$

wird. — Da nun die Summe dieser statischen Momente, wegen des Gleichgewichts der verlorenen Kräfte, = 0 seyn muß, so hat man die Gleichung

$$\Sigma(gy \cdot dM) + \Sigma(r^2 \cdot \partial^2\theta \cdot dM) = 0,$$

oder
$$g \cdot \Sigma(y \cdot dM) + \partial^2\theta \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = 0.$$

Ist aber $y_1 = a \cdot sin\theta$ die Entfernung des Schwer-Punktes S von OZ, so hat man

$$\Sigma(y \cdot dM) = y_1 \cdot M = Ma \cdot sin\theta;$$

und so erhält man also genau wieder die obige Gleichung (☾).

Anmerk. 2. Hätte man auch diese (Pendel-) Aufgabe mittelst Anwendung des (§. 13.) und scheinbar ohne Zuziehung des d'Alembert'schen Princips lösen wollen, so hätte man wiederum die Kräfte alle auf einen Punkt reduciren müssen und eben an denselben Punkt hin auch alle Massen, um sagen zu können, daß an dieser einzigen Stelle eine Masse von Q Pfunden von einer eben daselbst befindlichen Kraft von P Pfunden in Bewegung gesetzt werde. Wir wollen den Punkt Π in OSZ', welcher von O um die Längen-Einheit entfernt ist, nehmen und auf ihn alle Massen und alle Kräfte reduciren.

Nach der (Anmerk. 4. des §. 31. Nr. I.) ist es einerlei, ob die Masse dM in der Entfernung r von der Dreh-Axe, in Bewegung gesetzt werden soll, oder ob man lieber dafür die Masse $r^2 \cdot dM$ an dem Punkte Π in der Entfernung 1 von der Dreh-Axe anbringt *). Also erfordert es dieselbe Kraft, die ganze

*) Eigentlich ist solches am angeführten Orte nur für den Fall behauptet, daß Π in der durch das Element dM auf die Dreh-Axe senkrecht gelegten Ebene liegt. Es läßt sich jedoch das hier Behauptete auf ganz analoge Weise rechtfertigen.

Masse M um die Axe OX in Bewegung zu setzen, als erfordert würde, um eine Masse $= \Sigma(r^2 \cdot dM)$ in den einzigen Punkt Π concentrirt, in dieselbe Bewegung zu versetzen; und so sieht sich also die Masse M auf den Punkt Π reducirt, indem man daselbst eine Masse $= \Sigma(r^2 \cdot dM)$ angebracht sich denkt.

Was nun die Kraft $g \cdot dM$ an dem Elemente dM betrifft, so ist ihr statisches Moment in Bezug auf die Dreh-Axe, $= g \cdot y \cdot dM$. Will man daher an dem Punkte Π eine Kraft anbringen, welche dasselbe leistet, so muß ihr statisches Moment in Bezug auf die Dreh-Axe ebenfalls $= g \cdot y \cdot dM$ seyn; oder es muß, weil der Arm des Momentes, wenn man die Kraft in Π senkrecht auf OZ′ sich denkt, $= 1$ ist, — statt der Kraft $g \cdot dM$ an dM eine Kraft in Π senkrecht auf OZ′ angebracht werden, welche $= gy \cdot dM$ ist. — Statt der an allen Elementchen wirkenden Schwere kann man also in Π, senkrecht auf OZ′ eine Kraft

$$= \Sigma(g \cdot y \cdot dM) = g \cdot \Sigma(y \cdot dM) = g \cdot M \cdot y_1 = g \cdot M \cdot a \cdot \sin\theta$$

anbringen, und man kann nun überzeugt seyn, daß die Wirkung dieselbe ist.

An dem Punkte Π liegt nun die Masse $\Sigma(r^2 \cdot dM)$, deren Gewicht $Q = g \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)$ (in Pfunden) ist, und auf dieselbe wirkt an derselben Stelle Π die Kraft $P = gM \cdot a \cdot \sin\theta$ (in Pfunden) senkrecht auf OZ′; also erhält der Punkt Π senkrecht auf OZ′ die beschleunigende Kraft (nach §. 13.)

$$\frac{P}{Q} \cdot g, \quad \text{oder} \quad \frac{Ma \cdot \sin\theta}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} \cdot g,$$

oder

$$\frac{g}{l} \cdot \sin\theta, \text{ wenn } \frac{\Sigma(r^2 \cdot dM)}{M \cdot a} = l \text{ gesetzt wird.}$$

Da nun der von demselben Punkte Π in der Zeit t durchlaufene Raum $= \beta - \theta$ ist, wenn man den Anfangs-Werth von θ, $= \beta$ setzt, so ist seine Geschwindigkeit zu Ende der Zeit t, $= \partial(\beta - \theta) = -\partial\theta$, und daher seine beschleunigende Kraft $= \partial^2(\beta - \theta) = -\partial^2\theta$ in derselben Richtung, nämlich senk-

recht auf OZ'. — Also hat man die beschleunigende Kraft doppelt ausgedrückt, und daher die Gleichung

$$-\partial^2\theta = \frac{g}{l}\cdot sin\,\theta, \quad \text{oder} \quad \partial^2\theta + \frac{g}{l}\cdot sin\,\theta = 0;$$

welche Gleichung gerade dieselbe ist, die wir oben nach dem d'Alember'schen Principe gefunden haben.

Schluß-Anmerkung.

Wir werden später noch einmal auf den Pendel zurückkommen, da wo wir überhaupt jede Bewegung um eine feste Axe betrachten. Vorläufig wollten wir in dem vorliegenden Kapitel bloß beispielsweise zeigen:

1) Wie alle Aufgaben der Bewegnng der Massen mittelst des d'Alembert'schen Princips erledigt werden können.

2) Wie die Lösung derselben Aufgaben durch Anwendung des (§. 13.), also ohne direkte Zuziehung des d'Alembert-schen Princips versucht werden kann, indem man alle Massen und alle wirkenden Kräfte auf eine und dieselbe Stelle reducirt; daß jedoch dieses Verfahren als ein indirektes nicht gerade zu empfehlen ist.

3) Daß bei drehender Bewegung um Zapfen oder Bolzen, oder Wellen, also um eine unbewegliche Dreh-Axe, die Reduktion der Massen von einer Stelle nach einer andern mittelst der Gleichheit der Trägheits-Momente, in dem d'Alembert'schen Principe selbst seinen Grund habe, daß aber gerade hier die Anwendung des Verfahrens (des §. 13.) ganz unausführbar ist, so oft der Druck der Maschine gegen die Zapfen, Bolzen oder Welle noch berücksichtigt werden muß, weil dieser Druck nur von den verlorenen Kräften (des d'Alembert'schen Princips) herrührt.

4) Daß es daher (die allereinfachsten Beispiele etwa abgerechnet) immer rathsamer ist, in allen Fällen von Massen-Bewegung das d'Alembert'sche Princip in Anwendung zu bringen, durch welches jede Aufgabe mittelst der Bedingungs-Glei-

chungen des Gleichgewichts zwischen den verlorenen Kräften augenblicklich angesetzt, d. h. in Gleichung gebracht ist.

Soviel besondere Bewegungen von Massen wir daher im Laufe dieses Bandes noch betrachten werden, eben so oft werden wir die augenblickliche und schnellste Bildung der Gleichungen (des Ansatzes der Aufgabe) dem d'Alembert'schen Principe zu verdanken haben.

Die Dynamik fester Körper.

Viertes Kapitel.

Von der Drehung eines Körpers um eine feste Axe.

§. 37.

I. Es seyen OX, OY, OZ drei auf einander senkrechte Axen (Fig. 21.) und ein Körper habe in irgend einem Augenblicke das Bestreben, um die eine dieser Axen, z. B. um OZ, mit der Winkel-Geschwindigkeit ω sich zu drehen. Ist nun in m ein beliebiges Massen-Elementchen dM dieses Körpers, dessen Koordinaten-Werthe wir durch x, y, z bezeichnen wollen; denkt man sich aber durch m eine Ebene X′O′Y′ parallel mit XOY, welche der OZ in O′ begegnet, so sind x, y und 0 (Null) die drei Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM in Bezug auf die Axen O′X′, O′Y′ und O′Z. Wird nun die Entfernung O′m des Elementes dM von der Dreh-Axe OZ, durch r bezeichnet, so hat man

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Das Elementchen dM würde nun bei der Umdrehung des Körpers in der Ebene X′O′Y′ um den Mittelpunkt O′ einen Kreis beschreiben, wie solcher in der Figur angedeutet ist, und welcher den Radius r hat. Daher ist die wahre Geschwindigkeit (weil wir die Winkel-Geschwindigkeit $= \omega$ vorausgesetzt haben) offenbar $= r\omega$ und senkrecht auf den Radius O′m, und zwar in der Richtung mA oder mB, je nachdem die Drehung

von OY nach OX hin, oder in entgegengesetzter Richtung statt hat. Diese Geschwindigkeit $r\omega$ in der Richtung $\begin{Bmatrix} mA \\ mB \end{Bmatrix}$ macht daher mit den Koordinaten-Axen OX, OY und OZ Winkel, deren Kosinusse bezüglich

$$\pm\frac{y}{r}, \quad \mp\frac{x}{r} \quad \text{und} \quad 0 \text{ (Null)}$$

sind. Das Element dM, welches die Geschwindigkeit $r\omega$ hat, hat eben deshalb die „Größe der Bewegung" $r\omega \cdot dM$, und diese Kraft $r\omega \cdot dM$ zerlegt sich sogleich nach dreien Axen OX, OY und OZ in die drei (d. h. dasmal nur zwei) Kräfte

$\pm\omega y \cdot dM$ parallel mit OX

oder $\mp\omega x \cdot dM$ parallel mit OY,

wo die obern (+ oder —) Zeichen gelten, oder die untern, je nachdem die Drehung von OY nach OX, oder von OX nach OY hin statt hat, d. h. je nachdem mA oder mB die Richtung der wahren Geschwindigkeit des Elementes dM ist.

Diese, in dem Augenblicke, wo die Winkel-Geschwindigkeit ω ist, in den einzelnen Elementen dM steckenden „Größen der Bewegung" $r\omega \cdot dM$, oder die andern mit den Axen OX und OY parallelen Kräfte $\pm\omega y \cdot dM$ und $\mp\omega x \cdot dM$, welche an ihre Stelle treten können, mögen die „in diesem Augenblicke vorhandenen Dreh-Kräfte um die Axe OZ" genannt werden.

Setzt man nun voraus, daß diese Drehung durch gleichzeitige (von Stößen herrührende) Kräfte P_1, P_2 2c. 2c. entstanden ist, so kommen in den Gleichungen der Bewegung, wie sie nach dem d'Alembert'schen Principe gebildet werden müssen, dieselben hier so eben erwähnten „Größen der Bewegung," aber in entgegengesetzter Richtung genommen, unter den verlorenen Kräften mit vor. Daher wollen wir diese letzteren, nämlich

$\mp\omega y \cdot dM$ parallel mit OX

und $\pm\omega x \cdot dM$ parallel mit OY,

wo wiederum die obern (+ oder —) Zeichen oder die untern gelten, je nachdem die wirkliche Drehung des Körpers von OY

nach OX hin, oder in der entgegengesetzten Richtung statt hat, — die „verlorenen Dreh-Kräfte um die Axe OZ" nennen.

Da bei dem Gleichgewicht der verlorenen Kräfte, sobald man die unbekannten (Gegen-) Drucke auf die feste Dreh-Axe noch gehörig in Rechnung bringt, sechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts statt finden müssen, und zwar

a) die Summe der nach den Axen zerlegten Kräfte einzeln der Null gleich; und

b) die Summe der statischen Momente in Bezug auf jede der drei Axen, als Momenten-Axen genommen, einzeln der Null gleich (vergl. II. Th. §. 29.) — so kommen unter den erstern beiden Gleichungen allemal vor die Summen

$$\Sigma(\omega y \cdot dM), \quad \text{oder} \quad \omega \cdot \Sigma(y \cdot dM)$$

und

$$\Sigma(\omega x \cdot dM), \quad \text{oder} \quad \omega \cdot \Sigma(x \cdot dM).$$

Weil aber, wenn x_0, y_0, z_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes vorstellen, nach der Theorie vom Schwer-Punkte allemal

$$\Sigma(x \cdot dM) = M \cdot x_0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_0$$

ist, wenn M die Masse des Körpers vorstellt, so folgt, daß

$$\mp \omega \cdot My_0 \quad \text{und} \quad \pm \omega \cdot Mx_0$$

allemal die in den beiden erstern der Gleichungen (a.) von den verloren Dreh-Kräften $r\omega \cdot dM$ herrührenden Glieder seyn werden; wo die oberen Zeichen gelten oder die unteren, je nachdem die wirkliche Drehung des Körpers von OY nach OX hin, oder in der entgegengesetzten Richtung statt hat.

II. Die Summe der statischen Momente der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf die Momenten-Axe OZ, und wenn man diejenigen Momente positiv nimmt, deren Richtung von OY nach OX hin gezählt wird (vergl. II. Th. §. 34.), ist offenbar

$$= \mp \Sigma(r^2 \omega \cdot dM) = \mp \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM),$$

wo das obere (—) Zeichen gilt, oder das untere (+) Zeichen, je nachdem der Körper mit der Winkel-Geschwindigkeit ω von OY nach OX hin, oder in der entgegengesetzten Richtung wirk-

lich dreht, wobei man bemerken kann, daß, weil $r^2 = x^2 + y^2$ ist, auch seyn muß

$$\Sigma(r^2 \cdot dM) = \Sigma(x^2 \cdot dM) + \Sigma(y^2 \cdot dM).$$

Das Glied $\omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)$ ist also dasjenige, welches in der ersten der obigen Gleichungen (b.) von allen den, durch $r\omega \cdot dM$ ausgedrückten verlorenen Dreh-Kräften herrührt.

In der nächsten der Gleichungen (b.) kommt nun das statische Moment der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf die Momenten-Axe OY vor. Setzt man statt der verlorenen Dreh-Kraft $r\omega \cdot dM$ die beiden gleichgeltenden Kräfte

$$\mp \omega \cdot y \cdot dM \text{ parallel mit OX}$$

und

$$\pm \omega \cdot x \cdot dM \text{ parallel mit OY,}$$

so findet sich das eben gedachte statische Moment augenblicklich, — in so ferne der Theil desselben Null wird, welcher von der mit OY parallelen Kraft herrührt,

$$= \pm \omega \cdot yz \cdot dM,$$

wenn die positive Richtung des Moments von OX nach OZ hin gedacht wird; — und die Summe der statischen Momente, welche von allen durch $r\omega \cdot dM$ ausgedrückten verlorenen Dreh-Kräften herrühren, in Bezug auf OY als Momenten-Axe, ist daher

$$= \pm \Sigma(\omega \cdot yz \cdot dM) = \pm \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM),$$

wo die positive Richtung des Moments, von OX nach OZ hin, gedacht worden ist, während überall die obern Zeichen gelten, wenn ω von OY nach OX hin zählt, die untern dagegen, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Man darf dabei nur nicht übersehen, daß die verlorene Dreh-Kraft $r\omega \cdot dM$, deren Momente und Seiten-Kräfte wir hier betrachten, der wirklichen Drehung genau entgegenwirkend gedacht werden muß.

Endlich ist die Summe der statischen Momente derselben verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, in Bezug auf die Axe OX als Momenten-Axe, aus demselben Grunde, und wenn die positive Richtung der Momente von OZ nach OY hin gedacht wird,

$$= \pm \Sigma(\omega \cdot xz \cdot dM) = \pm \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM).$$

Dieses Glied wird sich also in der dritten der Gleichungen (b) befinden.

III. Außer den angeführten Gliedern

$$\omega \cdot My_0;\quad \omega \cdot Mx_0;\quad 0;\quad \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM),\quad \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM),$$
$$\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM),$$

welche bezüglich in der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Gleichung der Bewegung, die das d'Alembert'sche Princip liefert, vorkommen und von den verlorenen Dreh-Kräften $r\omega \cdot dM$ herrühren, kommen dann nur noch die Glieder der übrigen verlorenen Kräfte vor, welche mit den eben betrachteten verlorenen Dreh-Kräften das Gleichgewicht halten müssen, d. h. also die Glieder, die von denjenigen Kräften herrühren, welche diese drehende Bewegung erzeugen.

IV. Betrachtete man eine Drehung derselben Masse M um die andere Axe OY, so würden in den Gleichungen der Bewegung die Glieder

$$\omega' \cdot Mz_0;\quad 0;\quad \omega' \cdot Mx_0;\quad \omega' \cdot \Sigma(yz \cdot dM);\quad \omega' \cdot \Sigma(x^2+z^2) \cdot dM;$$
$$\omega' \cdot \Sigma(xy \cdot dM)$$

erscheinen, wenn ω' die jetzige Winkel-Geschwindigkeit vorstellte.

V. Und betrachtete man eine Drehung derselben Masse M um die Axe OX mit der Winkel-Geschwindigkeit ω'', so würden in den Gleichungen der Bewegung vorkommen die Glieder

$$0;\quad \omega'' \cdot Mz_0;\quad \omega'' \cdot My_0;\quad \omega'' \cdot \Sigma(xz \cdot dM),\quad \omega'' \cdot \Sigma(xy \cdot dM),$$
$$\omega'' \cdot \Sigma(y^2+z^2) \cdot dM.$$

VI. Dabei können die Winkel-Geschwindigkeiten ω, ω' und ω'' konstant, oder Funktionen der Zeit t seyn, weil in dem Augenblicke, wo man die Bewegung betrachtet und das Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften herstellt, die Winkel-Geschwindigkeit doch immer nur einen bestimmten Werth haben kann. Auch können diese ω, ω', rc. rc. bloß Zuwachse an Winkel-Geschwindigkeit vorstellen.

VII. In den Untersuchungen über drehende Bewegung gegebener Massen, und eben deshalb fast in allen Untersuchungen über Bewegung der Massen, spielen also die sechs Summen

$$\Sigma(x^2 \cdot dM);\quad \Sigma(y^2 \cdot dM);\quad \Sigma(z^2 \cdot dM);\quad \Sigma(yz \cdot dM),$$
$$\Sigma(xz \cdot dM),\quad \Sigma(xy \cdot dM),$$

zugleich mit dem Schwer-Punkte der bewegten Masse, allemal eine sehr wichtige Rolle, weshalb es zunächst nothwendig ist, diese Summen etwas näher zu betrachten.

Erste Abtheilung.

Berechnung der Trägheits-Momente.

§. 38.

Unter **Trägheits-Moment** irgend eines festen Körpers in Bezug auf irgend eine in ihm angenommene, oder mit ihm fest gedachte Gerade UU', versteht man die Summe $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ der Produkte aus den einzelnen Massen-Elementchen dM multiplicirt mit dem Quadrat ihrer senkrechten Entfernung r von dieser gedachten Geraden UU'. Diese letztere Gerade UU' mag dabei die **Momenten-Axe** oder auch schlechtweg die **Axe** heißen *).

Ist daher der Körper ein Normal-Körper, in Bezug auf das gebrauchte Koordinaten-System, so wird sein Trägheits-Moment durch dreifache Integration gefunden, genau so wie solches im (II. Th. Kap. VI. §§. 50. — 53.) beschrieben steht.

Ist aber der Körper kein solcher Normal-Körper in Bezug auf das gebrauchte Koordinaten-System, so muß man ihn in solche Normal-Körper zerlegen und von jedem Theil sein Trägheits-Moment in Bezug auf die gegebene Momenten-Axe (durch dreifache Integration) finden. Zuletzt werden diese einzelnen Träg-

---

*) Das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ mit ω multiplicirt, giebt also die Summe der zur Momenten-Axe UU' gehörigen statischen Momente der Dreh-Kräfte, im Falle eine augenblickliche Drehung um UU' mit der Winkel-Geschwindigkeit ω statt findet. — Für $\omega = 1$ ist das Trägheits-Moment an sich schon diese Summe der statischen Momente.

Trägheits-Momente addirt oder subtrahirt, je nachdem der gegebene Körper als eine Summe oder als eine Differenz dieser Normal-Körper gedacht worden ist. Das End-Resultat ist dann das Trägheits-Moment des gegebenen Körpers in Bezug auf dieselbe gegebene Momenten-Axe (alles nach II. Th. Kap. VI.)

Diese Rechnungen mögen nun in einigen Beispielen näher nachgewiesen werden.

Ist namentlich der Körper, dessen Trägheits-Moment gefunden werden soll, in Bezug auf rechtwinkliche Koordinaten-Axen ein Normal-Körper, während man die dritte Koordinaten-Axe OZ mit der Momenten-Axe hat zusammenfallen lassen, so daß die beiden andern Koordinaten-Axen OX und OY auf einander und auf der Momenten-Axe OZ senkrecht stehen, so ist die Entfernung r jedes Massen-Elementes ($dM =$) $\varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ (dessen Dichtigkeit ϱ ist, und welches an der durch die Koordinaten-Werthe x, y, z gegebenen Stelle sich befindet) gegeben durch die Gleichung

$$r = +\sqrt{x^2+y^2};$$

daher ist das Trägheits-Moment desselben Massen-Elementchens in Bezug auf die Axe OZ,

$$= (x^2+y^2) \cdot dM = \varrho \cdot (x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

und deshalb ist nun das Trägheits-Moment des ganzen Körpers in Bezug auf dieselbe Axe OZ (nach II. Th. Kap. VI. §§. 50. — 53.)

$$(\odot) \qquad = \int\int\int \varrho (x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

und wenn der Körper noch homogen ist,

$$(☾) \cdots \qquad = \varrho \cdot \int\int\int (x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

wo jedes Integral zwischen den Grenzen genommen werden muß, welche den verschiedenen Grenzflächen des Körpers zukommen.

§. 39.

I. In dem besondern Falle, wo zwei auf die Momenten-Axe senkrechte Ebenen, welche durch die auf OZ zu nehmenden Koordinaten-Werthe k und l gegeben sind, wobei $l > k$ seyn mag, den Körper begrenzen, wird also das Trägheits-Moment dessel-

den Körpers in Bezug auf OZ als Momenten-Axe und unter der Voraussetzung, daß der Körper homogen ist (nach §. 38. C.)

$$= (l-k)\cdot\varrho\cdot\int\int(x^2+y^2)\cdot dx\cdot dy,$$

wo die Integrale nach y und nach x noch zwischen denjenigen Grenzen genommen werden müssen, welche den übrigen Grenzflächen des Körpers entsprechen *).

II. In dem allgemeinern Falle dagegen, wo statt dieser, durch k und l gegebenen Ebenen, zwei krumme Flächen den Körper begrenzen, deren Koordinaten-Werthe z' und z'', an jeder zu x und y gehörigen Stelle (als Funktionen von x und y) gegeben sind, erhält man dagegen das Trägheits-Moment des wiederum homogen gedachten Körpers (aus §. 38. C.)

$$= \varrho\int\int(z''-z')\cdot(x^2+y^2)\cdot dx\cdot dy.$$

§. 40.

Soll also z. B. das Trägheits-Moment eines rechtwinklichen und homogenen Parallelepipedums gefunden werden, dessen drei Kanten a, b, c sind, in Bezug auf die Kante c als Momenten-Axen, so lasse man die Axen OX, OY und OZ mit den Kanten a, b, c zusammenfallen.

Dann hat man (nach §. 39. I.) das gesuchte Trägheits-Moment T ausgedrückt durch

$$1)\qquad T = \varrho c\cdot\int_{a\div 0}\left(\int_{b\div 0}(x^2+y^2)\cdot dy\right)\cdot dx$$

$$= \varrho c\cdot\int_{a\div 0}(bx^2+\tfrac{1}{3}b^3)\cdot dx$$

$$= \varrho c\cdot(\tfrac{1}{3}ba^3+\tfrac{1}{3}ab^3) = \tfrac{1}{3}\varrho abc\cdot(a^2+b^2).$$

Ist M die Masse des Körpers, so hat man

$$2)\qquad M = \varrho abc;$$

folglich findet sich noch

$$3)\qquad T = \tfrac{1}{3}M\cdot(a^2+b^2).$$

---

*) Dies findet sich natürlich auch sogleich (aus §. 38.) direkt, wenn man den Körper in lauter Prismen zerlegt sich denkt, von der Höhe l—k und von der Grundfläche dx·dy.

Weil a^2+b^2 das Quadrat der Entfernung der mit OZ parallelen und diagonal entgegengesetzten Kante c von OZ ist, so ist das hier gesuchte Trägheits-Moment gerade so, wie wenn $\frac{1}{3}$ der Masse M in dem End-Punkt dieser Diagonale (welche $=\sqrt{a^2+b^2}$ ist) concentrirt wäre, und das Trägheits-Moment dieses Massen-Punktes genommen würde.

§. 41.

Soll das Trägheits-Moment eines senkrechten Cylinders (einer Rolle, einer radförmigen Scheibe ꝛc. ꝛc.) gefunden werden, dessen Querschnitt (Grundfläche) den Radius R, und welcher die Höhe h hat (die Dicke der Rolle, der Scheibe, ꝛc. ꝛc.) in Bezug auf die Axe des Cylinders als Momenten-Axe genommen, so hat man, wenn solches durch T bezeichnet wird (nach §. 39. I.)

$$T = \varrho h \cdot \int_{R \div (-R)} \left(\int_{y'' \div y'} (x^2+y^2) \cdot dy \right) \cdot dx,$$

wo $y'' = +\sqrt{R^2-x^2}$ und $y' = -\sqrt{R^2-x^2}$ ist. — Dies giebt

$$T = 2\varrho h \cdot \int_{R \div (-R)} \left(\int_{\sqrt{R^2-x^2} \div 0} (x^2+y^2) \cdot dy \right) \cdot dx$$

$$= \tfrac{2}{3} \varrho h \cdot \int_{R \div (-R)} (R^2+2x^2) \cdot \sqrt{R^2-x^2} \cdot dx.$$

Ohne die Integration weiter fortzusetzen, welche jeder Anfänger nun vollends durchführen kann, wenn er Integral-Tafeln zu Hülfe nimmt, wollen wir lieber bemerken, daß man in diesem Beispiele viel leichter zum Ziele kommt, wenn man den ganzen Cylinder durch lauter concentrische Cylinderflächen, in unendlich viele concentrische Ringstücke zerlegt sich denkt. Ist nun u der Radius der innern und u+du der Radius der äußern Cylinderfläche des Ringstücks, so ist die Masse dieses Ringstücks

$$= \varrho \pi h [(u+du)^2 - u^2) = 2\varrho \pi h u \cdot du.$$

Da nun alle Theile dieses Ringstücks von der Momenten-Axe um gleichviel, nämlich um u entfernt sind, so ist das Trägheits-Moment dieses ganzen Ringstücks in Bezug auf diese Axe

$$= 2\varrho\pi h \cdot u^3 \cdot du;$$

und daher ist das Trägheits-Moment des ganzen Cylinders (nach I. Th. §. 35. Analys.)

$$1) \qquad T = 2\varrho\pi h \cdot \int_{R \div 0} u^3 \cdot du = \tfrac{1}{2}\varrho\pi h R^4.$$

Ist M die Masse des Cylinders, so hat man

$$2) \qquad M = \varrho\pi h R^2;$$

und daraus folgt dann

$$3) \qquad T = \tfrac{1}{2} M \cdot R^2;$$

d. h. das Trägheits-Moment eines Cylinders in Bezug auf seine Axe als Momenten-Axe, ist gerade so, wie wenn seine halbe Masse im Mantel des Cylinders concentrirt wäre.

Anmerk. Wollte man das Trägheits-Moment einer homogenen Rolle haben, deren Radius R ist, welche aber auf einem Zapfen läuft, dessen Radius r ist, während die Rolle die Dicke h hat, so findet sich hieraus (und nach §. 38.) dieses Trägheits-Moment in Bezug auf die Axe der Rolle als Momenten-Axe,

$$= \tfrac{1}{2}\varrho\pi h \cdot (R^4 - r^4) \text{ *)}.$$

§. 42.

Das Trägheits-Moment des durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegebenen und homogen gedachten Ellipsoids zu berechnen, in Bezug auf die Axe OZ, welche hier zugleich durch den Mittelpunkt O des Ellipsoids hindurch geht, und mit dem Haupt-Durchmesser 2c des Ellipsoids zusammenfällt.

---

*) Dies ist auch das Trägheits-Moment des Kranzes eines Rades, dessen Breite R—r, und dessen Dicke h ist, und welches den äußern Radius R hat, — in Bezug auf die Axe des Rades als Momenten-Axe. Findet man dann noch die Trägheits-Momente der Theile, welche zu Verbindungsstücken dienen, in Bezug auf dieselbe Momenten-Axe, so hat man das Trägheits-Moment des ganzen Rades in Bezug auf dieselbe Momenten-Axe, sobald man alle diese einzelnen Trägheits-Momente addirt.

Man hat wiederum, wenn T das gesuchte Trägheits-Moment ist,

$$2)\qquad T = \varrho\cdot\int(\int[\int(x^2+y^2)\cdot dz]\cdot dy)\cdot dx,$$

nur daß das Integral nach z zwischen den Grenzen

$$z' = -c\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

und

$$z'' = +c\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)},$$

hernach das Integral nach y zwischen den Grenzwerthen y' und y'' von y genommen werden muß, welche man aus der Gleichung (1.) zieht, wenn man daselbst $z=0$ setzt, weil man eben dadurch die größten und kleinsten Werthe von y erhält, nämlich

$$y' = -b\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} \quad \text{und} \quad y'' = +b\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

Die dritte Integration nach x wird dann zwischen den Grenzen $x' = -a$ und $x'' = +a$ genommen, weil letztere die größten und kleinsten Werthe von x sind.

Die erste Integration (nach z) giebt nun, zwischen den bekannten Grenzen z' und z'' genommen das Resultat

$$3)\qquad 2\varrho c(x^2+y^2)\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Dieses Resultat, wenn man mit x^2+y^2 wirklich multiplicirt, zerfällt in zwei addirte Theile. Um nun die nächsten Integrationen bequemer durchsetzen zu können, nehme man einstweilen bloß den einen

$$4)\qquad 2\varrho cx^2\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

dieser Theile, und führe für ihn die Integrationen, zuerst nach y, dann nach x durch. Da nämlich der andere dieser beiden Theile, d. h.

$$5)\qquad 2\varrho cy^2\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)},$$

sich von dem erstern (in 4.) nur dadurch unterscheidet, daß, wo dort x und y stehen, hier umgekehrt y und x zu finden sind, so kann man ihn offenbar dadurch eben so bequem weiter inte-

griren, daß man für ihn die Ordnung der Integrationen umkehrt, so nämlich, daß er zuerst nach x zwischen den Grenzen $\mp a \cdot \sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$, und dann nach y zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$ integrirt wird. Ja das End-Resultat, welches dieser zweite Theil (5.) ergiebt, kann offenbar von dem aus dem erstern Theil (4.) hervorgehenden End-Resultat nur dadurch verschieden seyn, daß, wo dort a steht, hier b, und wo dort b steht, hier a zu stehen kommt; also braucht man die Rechnung nur für den erstern Theil (4.) zu Ende zu führen, in dem End-Resultat a statt b, und b statt a zu setzen, und beide Ergebnisse zuletzt zu addiren, um das gesuchte Trägheits-Moment zu haben.

Der Theil (4.), nach y integrirt, giebt aber (nach I. Th. Analys. §. 32.), wenn man der Kürze wegen

$$6) \qquad b \cdot \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = r$$

setzt, zum Resultat

$$\frac{2\varrho c x^2}{b} \int_{r \div (-r)} \sqrt{r^2-y^2} \cdot dy = \frac{2\varrho c x^2}{b} \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2,$$

oder, wenn man statt r^2 wieder seinen Werth substituirt,

$$7) \qquad \pi\varrho \frac{bc}{a^2}(a^2x^2-x^4).$$

Wird nun dieses Resultat zuletzt noch nach x zwischen den Grenz-Werthen $-a$ und $+a$ von x integrirt, so ergiebt sich

$$8) \qquad \tfrac{4}{15}\pi\varrho \cdot a^3bc$$

als der Theil des gesammten End-Resultates, der aus (4.) hervorgeht.

Setzt man nun hier a statt b, und b statt a, so erhält man

$$9) \qquad \tfrac{4}{15}\pi\varrho \cdot ab^3c$$

als den Theil des gesammten End-Resultats, der aus (5.) hervorgeht. Addirt man aber zuletzt beide Theile (8. und 9.), so erhält man das gesuchte Trägheits-Moment T des Ellipsoids in Bezug auf die Axe OZ, welche mit dem Haupt-Durchmesser 2c zusammenfällt; nämlich

10) $$T = \frac{4}{15}\pi\varrho\cdot abc(a^2+b^2).$$

Weil aber der Inhalt des Ellipsoids $= \frac{4}{3}\pi\cdot abc$, also seine Masse $M = \frac{4}{3}\pi\varrho\cdot abc$ ist, so wird

11) $$T = \frac{1}{5}M\cdot(a^2+b^2),$$

wenn M die Masse des Ellipsoids ist.

Anmerk. I. Setzt man hier $a = b = c$, so hat man das Trägheits-Moment T einer homogenen Kugel, in Bezug auf einen beliebigen ihrer Durchmesser 2c als Momenten-Axe genommen. — Man findet für diese homogene Kugel

$$T = \frac{2}{5}Ma^2 = \frac{8}{15}\pi\varrho a^5,$$

wo a der Halbmesser der Kugel ist.

II. Setzt man aber bloß $a = b$, so erhält man $T = \frac{2}{5}Mb^2$ und dies ist das Trägheits-Moment eines Umdrehungs-Ellipsoids, welches OZ zur Umdrehungs-Axe hat, in Bezug auf diese als Momenten-Axe genommen.

§. 43.

Das Trägheits-Moment einer Kugel, deren Halbmesser a ist, und die aus concentrischen homogenen Kugelschichten besteht, in Bezug auf irgend einen ihrer Durchmesser als Momenten-Axe zu finden.

Nennt man R den Radius einer, die unendlich-kleine Dicke dr habenden Kugelschicht, und ist f_r die Funktion von r, welche die Dichtigkeit ϱ dieser Schicht vorstellt, so thut man hier am besten, für irgend ein Massen-Element dM dieser Kugelschicht Polar-Koordinaten einzuführen.

Zu dem Ende lege man durch den Mittel-Punkt O der Kugel die Ebene XOY und nehme OX zur Momenten-Axe. Ist dann θ der Winkel, den die durch OX und das Element dM gelegte Ebene mit der XOY macht, und φ der Winkel, den der von O aus nach dem Elementchen dM hin gedachte Radius-Vektor r mit OX macht, so ist das Volumen dieses Elementes (nach II. Th. Kap. VI. §§. 50. — 52.)

$$= r^2\cdot \sin\varphi\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta,$$

und dessen Masse $= f_r\cdot r^2\cdot \sin\varphi\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta$.

Die senkrechte Entfernung desselben Elementchens dM von der OX ist dagegen

$$= r \cdot \sin\varphi;$$

folglich ist das Trägheits-Moment dieses Elementchens dM in Bezug auf die Axe OX,

$$= f_r \cdot r^4 \cdot \sin\varphi^3 \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta;$$

und daher das Trägheits-Moment T der ganzen Kugel jetzt:

$$1) \qquad T = \int_{a \div 0}\left[\int_{\pi \div 0}\left(\int_{2\pi \div 0} f_r \cdot r^4 \cdot \sin\varphi^3 \cdot d\theta\right) \cdot d\varphi\right] \cdot dr.$$

Integrirt man hier nun zuerst nach θ, so erhält man

$$2) \qquad 2\pi \cdot f_r \cdot r^4 \cdot \sin\varphi^3.$$

Integrirt man dieses Integral nun nach φ, so ist $2\pi f_r \cdot r^4$ ein konstanter Faktor, und außerdem ist noch

$$\int \sin\varphi^3 \cdot d\varphi = \int(\tfrac{3}{4}\sin\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi) \cdot d\varphi = -\tfrac{3}{4}\cos\varphi + \tfrac{1}{12}\cos 3\varphi;$$

also erhält man, weil das Integral nach φ zwischen den Grenzen 0 und π genommen werden muß, als End-Resultat dieser Integration

$$3) \qquad \tfrac{8}{3}\pi \cdot f_r \cdot r^4.$$

Das gesuchte Trägheits-Moment T der ganzen Kugel ist daher

$$4) \qquad T = \tfrac{8}{3}\pi \cdot \int_{a \div 0} f_r \cdot r^4 \cdot dr.$$

Um diese letztere Integration noch durchführen zu können, muß die Funktion f_r, welche die Dichtigkeit der Kugelschicht ausdrückt, noch speciell gegeben seyn.

Ist z. B. $f_r = \varrho$ und nach r konstant, so wird (aus 4.)

$$T = \tfrac{8}{3}\pi\varrho \cdot \int_{a \div 0} r^4 \cdot dr = \tfrac{8}{15}\pi\varrho \cdot a^5,$$

d. h. genau so, wie solches Trägheits-Moment bereits (in der Anmerkung zu §. 42.) gefunden ist.

Anmerk. Man konnte die vorliegende Aufgabe auch so lösen. Nach (Anmerk. zu §. 42.) ist das Trägheits-Moment einer Kugel, deren Radius r ist, und welche durchweg die Dichtigkeit ϱ hat, in Bezug auf einen ihrer Durchmesser als Momenten-Axe genommen

1) $$= \tfrac{8}{15}\pi\varrho\cdot r^5;$$

also ist auch das Trägheits-Moment einer Kugel, welche durchaus dieselbe Dichtigkeit ϱ hat, aber den Halbmesser $r+dr$,

2) $$= \tfrac{8}{15}\pi\varrho\cdot(r+dr)^5;$$

folglich ist das Trägheits-Moment der Kugelschicht, welche zwischen den Halbmessern r und $r+dr$ liegt, und welche dieselbe Dichtigkeit ϱ hat,

3) $$= \tfrac{8}{15}\pi\varrho\cdot[(r+dr)^5 - r^5] = \tfrac{8}{3}\pi\varrho\cdot r^4\cdot dr,$$

wenn man die Glieder wegläßt (nach I. Th. Analys. §. 20.) welche die höheren Potenzen vom unendlich-kleinen dr enthalten. Setzt man nun statt ϱ die Dichtigkeit f_r der Kugelschicht, so bekommt man nun zuletzt das Trägheits-Moment aller dieser concentrischen Kugelschichten, d. h. das Trägheits-Moment der ganzen Kugel (in Bezug auf einen ihrer Durchmesser als Momenten-Axe)

$$= \tfrac{8}{3}\pi\cdot\int_{r\div 0} f_r\cdot r^4\cdot dr,$$

wie oben auch.

Dieses letztere Trägheits-Moment ist größer oder kleiner als das Trägheits-Moment einer homogenen Kugel, deren Dichtigkeit der der innersten Schicht gleich kommt, je nachdem die Dichtigkeit nach Außen hin immerfort wächst, oder immerfort abnimmt, wie sogleich in die Augen fällt, wenn man sich das Integral als eine Summe denkt.

§. 44.

Wird das Trägheits-Moment eines Umdrehungs-Körpers gesucht, der durch Umdrehung einer durch die Gleichung

$$y = y_x$$

gegebenen Kurve, um die Abscissen-Axe OX entsteht, so kann man sich den Körper durch Ebenen, welche auf OX senkrecht stehen, in lauter Kreis-Scheiben zertheilt denken, welche die Dicke dx haben.

Soll nun das Trägheits-Moment in Bezug auf dieselbe Axe OX gefunden werden, so denkt man sich noch jede solche Kreis-

Scheibe, z. B. die an den End-Punkt der Abscisse x anstoßende, in lauter concentrische Ringstücke von der Dicke dr zerlegt. Jedes Massen-Element dM eines solchen Ringstückes hat nun dieselbe Entfernung r von der Momenten-Axe, also ist für denselben Ring $\Sigma(r^2 \cdot dM) = r^2 \cdot \Sigma(dM)$, d. h. das Trägheits-Moment des ganzen Ringstücks findet sich, wenn man die Masse desselben $2\varrho\pi r \cdot dr \cdot dx$ mit dem Quadrat seiner Entfernung r multiplicirt, so daß man als Resultat erhält

$$2\varrho\pi r^3 \cdot dr \cdot dx.$$

Dies nach r zwischen den Grenzen 0 und y_x integrirt, giebt, wenn wir die Dichtigkeit ϱ als konstant, folglich die Scheibe homogen voraussetzen,

$$\tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot y_x{}^4 \cdot dx$$

als Trägheits-Moment der ganzen Scheibe; und dieses Resultat, noch nach x integrirt zwischen den Grenz-Werthen von x, giebt als Trägheits-Moment des ganzen Umdrehungs-Körpers

$$\text{(I.)} \cdots \qquad T = \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{b \div a} y_x{}^4 \cdot dx,$$

wenn a und b die Grenz-Werthe von x sind, und wenn wiederum ϱ als konstant, d. h. der ganze Umdrehungs-Körper homogen vorausgesetzt wird.

Anmerk. 1. Sollte das Trägheits-Moment eines Stücks des Umdrehungs-Körpers gefunden werden, welches durch zwei Ebenen gebildet wird, die durch die Umdrehungs-Axe OX gehen, und unter sich einen Winkel $= n^0$ bilden; und ist die Umdrehungs-Axe zugleich wieder zur Momenten-Axe genommen, so findet sich das Trägheits-Moment dieses Stückes offenbar, wenn solches wiederum homogen gedacht wird,

$$\text{(II.)} \cdots \qquad = \frac{n}{360} \cdot \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{b \div a} y_x{}^4 \cdot dx.$$

Und soll das Trägheits-Moment eines Hohl-Körpers gefunden werden, welcher von zwei Umdrehungs-Flächen begrenzt wird, die eine gemeinschaftliche Umdrehungs-Axe OX haben, während

dieselbe Axe zu gleicher Zeit zur Momenten-Axe genommen wird; und wird

$$y = y'_x$$

die Gleichung der zweiten Erzeugungs-Kurve, so ist das Trägheits-Moment dasmal offenbar, wenn nur der ganze Körper homogen gedacht wird,

$$\text{(III.)} \cdots \quad = \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{b \div a} (y'^4_x - y_x^4) \cdot dx,$$

wo für jeden Werth von x zwischen a und b, $y'_x > y_x$ gedacht ist.

Endlich ist das Trägheits-Moment eines Stückes dieses Hohl-Körpers, welches von zweien Ebenen begrenzt wird, die sich in OX schneiden und daselbst einen Winkel $= n^0$ bilden, in Bezug auf dieselbe Axe OX als Momenten-Axe genommen,

$$\text{(IV.)} \cdots \quad = \frac{n}{360} \cdot \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{b \div a} (y'_x - y_x^4) \cdot dx.$$

Wenden wir dieses in einigen Beispielen auf die Kugel, den Kegel, den Cylinder und das Umdrehungs-Ellipsoid an.

1stes Beispiel. Nimmt man nämlich $y_x = c$ und c konstant, so giebt diese mit OX parallele Gerade, bei ihrer Umdrehung um OX, einen senkrechten Cylinder, dessen Grundfläche den Radius c hat. Ist nun l die Länge oder Höhe des Cylinders, und befindet sich O in dem einen Ende dieser Länge l, so ist $a = 0$, $b = l$; und das Trägheits-Moment dieses homogenen Cylinders, um seine eigene Axe als Momenten-Axe, ist daher (nach I.)

$$T = \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{l \div 0} c^4 \cdot dx = \tfrac{1}{2}\varrho\pi c^4 l.$$

Der Inhalt dieses Cylinders ist $= \pi c^2 l$; daher ist seine Masse M gegeben durch die Gleichung

$$M = \varrho\pi c^2 l.$$

Mithin ist dasselbe Trägheits-Moment, in Bezug auf dieselbe Axe, auch

$$T = \tfrac{1}{2} M c^2;$$

gerade so wie oben auch (§. 41.).

2tes Beispiel. Nimmt man $y_x = px$, so giebt diese Erzeugungs-Kurve bei ihrer Umdrehung um OX einen senkrechten Kegel, dessen Seiten mit der Axe OX einen Winkel bilden, dessen (trigonometrische) Tangente $= p$ ist, wärend die Spitze dieses Kegels in O liegt, und der Radius

R seiner Grundfläche, wenn l seine Höhe ist, $= pl$ gefunden wird. Das Trägheits-Moment dieses Kegels ist daher in Bezug auf dieselbe Axe OX als Momenten-Axe (nach I.)

$$= \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{l \div 0} p^4 x^4 \cdot dx = \tfrac{1}{10}\varrho\pi p^4 l^5.$$

Der Inhalt desselben Kegels findet sich $= \tfrac{1}{3}\pi p^2 l^3$; seine Masse M ist daher

$$= \tfrac{1}{3}\varrho\pi p^2 l^3.$$

Folglich ist auch das so eben gefundene Trägheits-Moment

$$= \tfrac{3}{10} M p^2 l^2 = \tfrac{3}{10} M \cdot R^2,$$

wo R der Radius der Grundfläche des Kegels ist.

3tes Beispiel. Es sey

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

die Gleichung der Ellipse, deren Umdrehung um OX ein Umdrehungs-Ellipsoid beschreibt, dessen Trägheits-Moment in Bezug auf dieselbe Axe OX als Momenten-Axe gefunden werden soll. Man findet nun letzteres (nach I.)

$$= \tfrac{1}{2}\varrho\pi \frac{b^4}{a^4} \int_{a \div (-a)} (a^2 - x^2)^2 \cdot dx = \tfrac{8}{15}\varrho\pi a b^4.$$

Der Inhalt desselben Ellipsoids findet sich $= \tfrac{4}{3}\pi a b^2$; daher seine Masse $M = \tfrac{4}{3}\varrho\pi a b^2$; und deshalb findet sich dasselbe Trägheits-Moment auch

$$= \tfrac{2}{5} M b^2,$$

wie wir dasselbe früher schon eben so gefunden haben (§. 42. Anmerk.).

4tes Beispiel. Das letztere Resultat bekommt man aber auch für die Kugel, deren Radius b, und deren Masse M ist. — Will man jedoch dieses Beispiel direkt behandeln und von der Scheitel-Gleichung

$$y = \sqrt{2bx - x^2}$$

des Kreises ausgehen, dessen Umdrehung die Kugel beschreibt, so hat man (nach I.) das Trägheits-Moment derselben in Bezug auf den Durchmesser OX

$$= \tfrac{1}{2}\varrho\pi \cdot \int_{2b \div 0} (2bx - x^2)^2 \cdot dx = \tfrac{8}{15}\varrho\pi b^5 = \tfrac{2}{5} M b^2,$$

wenn $M (= \tfrac{4}{3}\varrho\pi b^3)$ die Masse der homogenen Kugel vorstellt.

Auch dies stimmt genau mit dem früher erhaltenen Resultate.

§. 45.

Kennt man das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ eines Körpers, der die Masse M hat, in Bezug auf eine Momenten-Axe, die durch seinen Schwer-Punkt geht, so ist sein Trägheits-Moment $\Sigma(r'^2 \cdot dM)$ in Bezug auf

jede andere mit der erstern parallele und von jener (d. h. vom Schwer-Punkt) um a entfernte, übrigens beliebige Momenten-Axe, allemal sofort aus der Gleichung

(I.)... $\Sigma(r'^2 \cdot dM) = \Sigma(r^2 \cdot dM) + M \cdot a^2$

zu berechnen.

Dieses Resultat ergiebt sich, wenn man das Trägheits-Moment $\Sigma(r'^2 \cdot dM)$ geradezu berechnet. — Man lege nämlich durch den Schwer-Punkt S des Körpers die drei auf einander senkrechten Koordinaten-Axen SX, SY und SZ, so jedoch, daß SZ mit der durch den Schwer-Punkt gedachten Momenten-Axe zusammenfällt. Da nun die zweite, von dieser SZ (oder vom Schwer-Punkt S) um a entfernte Momenten-Axe, ebenfalls senkrecht auf der Ebene XSY steht, so folgt, daß wenn α und β die Koordinaten-Werthe ihres Durchschnitts-Punktes mit XSY vorstellen, dann allemal

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2$$

ist. Ist nun dM irgend ein Massen-Elementchen des Körpers, und r sein senkrechter Abstand von der Axe OZ, so wie r' sein senkrechter Abstand von der zweiten Momenten-Axe, und sind x, y, z die Koordinaten-Werthe des Elementchens dM; so hat man

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r'^2,$$

d. h. $$r^2 - 2\alpha x - 2\beta y + a^2 = r'^2.$$

Demnach ist

$$\Sigma(r'^2 \cdot dM) = \Sigma(r^2 \cdot dM) - 2\alpha\Sigma(x \cdot dM) - 2\beta\Sigma(y \cdot dM) + \Sigma(a^2 \cdot dM).$$

Weil aber, wenn x_0 und y_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes sind, allemal (II. Th. §. 55.)

$$\Sigma(x \cdot dM) = M \cdot x_0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_0$$

ist; dasmal aber, wo die Koordinaten-Axen durch den Schwer-Punkt gelegt sind, $x_0 = y_0 = 0$ ist, so ist dasmal

$$\Sigma(x \cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y \cdot dM) = 0,$$

während

$$\Sigma(a^2 \cdot dM) = a^2\Sigma(dM) = Ma^2$$

wird. So geht also die vorstehende Gleichung, welche $\Sigma(r'^2 \cdot dM)$ liefert, in die oben gegebene über.

§. 46.

Daraus folgt sogleich noch:

1) Das Trägheits-Moment eines Körpers in Bezug auf eine durch seinen Schwer-Punkt gehende Momenten-Axe ist allemal kleiner als das Trägheits-Moment desselben Körpers in Bezug auf jede andere mit der ersteren parallele Momenten-Axe.

2) Die Trägheits-Momente eines und desselben Körpers in Bezug auf beliebig viele unter sich parallele, aber von seinem Schwer-Punkt gleich weit entfernte Momenten-Axen, sind alle einander gleich.

3) Die Trägheits-Momente eines und desselben Körpers in Bezug auf beliebig viele unter sich parallele Momenten-Axen wachsen mit den Entfernungen der Momenten-Axen vom Schwer-Punkte.

§. 47.

Kennt man die Trägheits-Momente A, B und C eines und desselben Körpers in Bezug auf drei auf einander senkrechte übrigens beliebig liegende Koordinaten-Axen OX, OY und OZ als Momenten-Axen genommen (wo O eben so gut der Schwer-Punkt des Körpers, als auch jeder andere Punkt seyn kann), so ist das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ desselben Körpers in Bezug auf jede durch O hindurchgehende vierte Momenten-Axe, welche mit den drei erstern OX, OY und OZ die Winkel α, β und γ macht, allemal zu berechnen nach der Gleichung

$$(\text{II.}) \cdots \quad \Sigma(r^2 \cdot dM) = A \cdot \cos\alpha^2 + B \cdot \cos\beta^2 + C \cdot \cos\gamma^2 \\ - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \Sigma(xy \cdot dM) \\ - 2\cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \Sigma(xz \cdot dM) \\ - 2\cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \Sigma(yz \cdot dM),$$

wo sich die $\Sigma(xy \cdot dM)$, $\Sigma(xz \cdot dM)$, $\Sigma(yz \cdot dM)$ wiederum über den ganzen Körper erstrekken, also in der Regel durch dreifache Integration gefunden werden müssen (nach Anleitung des II. Th. Kap. VI. §. 53.).

Auch dies ergiebt sich, wenn man das Trägheits-Moment in Bezug auf diese vierte Momenten-Axe direkt berechnet. — Ist nämlich D der Abstand eines durch die Koordinaten-Werthe x, y, z seiner Lage nach gegebenen Massen-Elementes vom Anfangs-Punkte O der Koordinaten; ist ferner δ der Winkel, welchen dieser Abstand D mit der vierten Momenten-Axe macht; und ist r der senkrechte Abstand dieses Elementchens dM von der vierten Momenten-Axe, so ist

$$r = D \cdot \sin\delta,$$

also $r^2 = D^2 \cdot \sin\delta^2 = D^2 - D^2 \cdot \cos\delta^2$.
Auf der andern Seite ist aber (nach I. Th. Geom. §. 1. VII. u. §. 3. I. II.)

$$D \cdot \cos\delta = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma;$$

folglich wird, wenn man diesen Werth statt $D \cdot \cos\delta$ in die nächst vorhergehende Gleichung substituirt, und weil $D^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist,

$$r^2 = x^2(1 - \cos\alpha^2) + y^2(1 - \cos\beta^2) + z^2 \cdot (1 - \cos\gamma^2)$$
$$- 2xy \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2xz \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma - 2yz \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

Weil aber (nach I. Th. Geom. §. I. V.)

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist, so kann man

statt	$1 - \cos\alpha^2$	auch	$\cos\beta^2 + \cos\gamma^2$
"	$1 - \cos\beta^2$	"	$\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2$
"	$1 - \cos\gamma^2$	"	$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2$

schreiben, und man thut dies, damit sich Gruppen bilden, welche die Faktoren $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$, $y^2 + z^2$ haben, weil die drei Trägheits-Momente

$$\Sigma(x^2 + y^2) \cdot dM = C, \quad \Sigma(x^2 + z^2) \cdot dM = B, \quad \Sigma(y^2 + z^2) \cdot dM = A$$

gegeben sind, und man das neue vierte auf diese dreie zurückführen will. — Man findet jetzt in der That sogleich, aus der obigen Gleichung für r^2,

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cdot \cos\alpha^2 + (x^2 + z^2) \cdot \cos\beta^2 + (x^2 + y^2) \cdot \cos\gamma^2$$
$$- 2xy \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2xz \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma - 2yz \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dM und nimmt man dann die Summe aller dieser Ausdrücke zur Linken und zur Rechten für alle, den ganzen Körper bildenden Elemente, so erhält man das obige Resultat (II.) ohne weiteres. —

§. 48.

Hat man aber die drei Trägheits-Momente eines solchen Körpers in Bezug auf alle drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ, letztere als Momenten-Axen angesehen, berechnet, und sind solche bezüglich A, B, C gefunden, so hat man, weil

$$\Sigma(x^2 + y^2) \cdot dM = \Sigma(x^2 \cdot dM) + \Sigma(y^2 \cdot dM)$$

ist,

$$\Sigma(x^2 \cdot dM) + \Sigma(y^2 \cdot dM) = C,$$

auch
$$\Sigma(x^2 \cdot dM) + \Sigma(z^2 \cdot dM) = B,$$

und
$$\Sigma(y^2 \cdot dM) + \Sigma(z^2 \cdot dM) = A;$$

und daraus finden sich die drei Summen $\Sigma(x^2 \cdot dM)$, $\Sigma(y^2 \cdot dM)$ und $\Sigma(z^2 \cdot dM)$ unmittelbar, nämlich

$$\Sigma(x^2 \cdot dM) = \tfrac{1}{2}(-A + B + C),$$
$$\Sigma(y^2 \cdot dM) = \tfrac{1}{2}(+A - B + C),$$

und
$$\Sigma(z^2 \cdot dM) = \tfrac{1}{2}(+A + B - C).$$

Dabei ist es augenfällig, daß nicht bloß diese drei Trägheits-Momente A, B, C allemal positiv seyn müssen, sondern daß auch $\Sigma(x^2 \cdot dM)$, $\Sigma(y^2 \cdot dM)$, $\Sigma(z^2 \cdot dM)$ einzeln nothwendig positiv sind, daß daher die Summe je zweier der drei Trägheits-Momente A, B, C immer größer seyn muß, als das dritte.

Anmerk. Ist endlich das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ eines Körpers in Bezug auf eine Gerade UU′ gefunden, so darf man selbiges nur mit der Winkel-Geschwindigkeit ω, mit welcher sich der ganze Körper um dieselbe Gerade UU′ dreht, multipliciren, um die Summe aller statischen Momente der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, in Bezug auf UU′ als Momenten-Axe genommen, zu haben.

Wir kommen nun zu den andern Summen der statischen Momente derselben verlornen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, in Bezug auf Momenten-Axen, welche durch einen beliebigen Punkt O der Dreh-Axe UU′ hindurchgehen und auf der Dreh-Axe senkrecht stehen. Diese letzteren, welche unter den Voraussetzungen des (§. 37.) in Bezug auf die beiden Koordinaten-Axen OX und OY bezüglich

$$\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) \quad \text{und} \quad \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$$

sind, können offenbar eben so gut positiv, als auch negativ, und wohl auch der Null gleich werden.

Zweite Abtheilung.

Von den Haupt-Dreh-Axen und den Haupt-Trägheits-Momenten.

§. 49.

I. Es ist UU′ oder OZ eine Dreh-Axe, um welche sich der Körper mit der Winkel-Geschwindigkeit ω dreht. Durch einen Punkt O derselben gehen zwei Momenten-Axen OX und OY senkrecht auf sie und auf einander. Die Summen der statischen

tischen Momente der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf jede dieser beiden Momenten-Axen OX und OY seyen bekannt. Man soll die Summe der statischen Momente finden derselben verlorenen Dreh-Kräfte in Bezug auf irgend eine dritte Momenten-Axe OX′, welche ebenfalls auf der Dreh-Axe UU′ oder OZ senkrecht steht (also in der Ebene XOY liegt), übrigens aber mit der OX (von OX nach OY hin gezählt) den beliebigen Winkel φ macht.

Denkt man sich noch OY′ auf OX′ und OZ senkrecht, und sind x, y z die Koordinaten-Werthe irgend eines Elementes dM des Körpers in Bezug auf die Koordinaten-Axen OX, OY und OZ; sind dagegen x′, y′, z′ die Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM in Bezug auf die drei andern Koordinaten-Axen OX′, OY′ und OZ, so ist in beiden Koordinaten-Systemen die dritte Ordinate z eine und dieselbe; die übrigen hängen aber zusammen mittelst der Gleichungen

1) $x' = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi$ und 2) $y' = -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$.

Nach (§. 37.) sind nun die gegebenen Summen der statischen Momente der verlorenen Dreh-Kräfte in Bezug auf die Momenten-Axen OX und OY bezüglich

$$\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) \quad \text{und} \quad \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM);$$

und die gesuchte Momenten-Summe in Bezug auf die Momenten-Axe OX′ ist offenbar

$$= \omega \cdot \Sigma(x'z \cdot dM).$$

Substituirt man nun in letzterem Ausdrucke statt x′ seinen Werth (aus 1.), so erhält man sogleich

3) $\omega \cdot \Sigma(x'z \cdot dM) = \omega \cdot \cos\varphi \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + \omega \cdot \sin\varphi \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$,

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Auf dieselbe Weise findet man auch noch die Momenten-Summe derselben verlorenen Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf die Axe OY′, nämlich

4) $\omega \cdot \Sigma(y'z \cdot dM) = -\omega \cdot \sin\varphi \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + \omega \cdot \cos\varphi \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$.

II. Diese beiden Gleichungen (3. und 4.) lassen noch sehen, daß wenn von den vier Momenten-Summen

$$\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM), \quad \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM), \quad \omega \cdot \Sigma(x'z \cdot dM), \quad \omega \cdot \Sigma(y'z \cdot dM)$$

irgend zwei der Null gleich sind, dann die übrigen allemal auch der Null gleich seyn werden.

III. Es läßt sich jetzt auch leicht erkennen, daß wenn die Summe der statischen Momente aller verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ zweimal der Null gleich ist, in Bezug auf zwei ganz beliebige auf der Dreh-Axe UU′ oder OZ senkrechte Momenten-

Axen OX und OX′, die in einer und derselben (auf OZ senkrechten) Ebene liegen, — daß dann auch allemal die Summe der statischen Momente derselben verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ der Null gleich seyn wird in Bezug auf jede beliebige dritte auf der Dreh-Axe UU′ oder OZ senkrechte und durch denselben Punkt O hindurchgehende Momenten-Axe OX″.

Denn man lasse alles wie in (I.), dagegen errichte man in der auf OZ senkrechten Ebene, in welcher die Momenten-Axen OX, OY, OX′, OY′ und OX″ liegen, noch eine Gerade OY″ senkrecht auf OX″, setze voraus, daß ψ der Winkel ist, welchen OX″ mit OX macht, von OX nach OY hin gezählt, und daß x'', y'', z die Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM sind in Bezug auf OX″, OY″ und OZ als Koordinaten-Axen, für welches wir früher die Koordinaten-Werthe durch x, y, z und x' y' z ausgedrückt hatten, als andere Koordinaten-Axen zu Grunde gelegt waren. Nun hat man sogleich (nach I.)

5) $\omega \cdot \Sigma(x''z \cdot dM) = \omega \cdot \cos\psi \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + \omega \cdot \sin\psi \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$.

Es ist aber nach der Voraussetzung

$$\Sigma(xz \cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(x'z \cdot dM) = 0,$$

also (nach II.) auch

$$\Sigma(yz \cdot dM) = 0,$$

und deshalb nun (nach 5.) auch $\omega \cdot \Sigma(x''z \cdot dM)$ der Null gleich, während (nach §. 37.) $\omega \cdot \Sigma(x''z \cdot dM)$ die Summe der statischen Momente der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf OX″, als Momenten-Axe genommen, vorstellt.

§. 50.

So oft in der Dreh-Axe UU′ ein solcher Punkt O existirt, der die Eigenschaft hat, daß die Summe der statischen Momente aller der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, zu jeder beliebigen, durch O gelegten und auf UU′ senkrechten Momenten-Axe, allemal (also nach §. 49. III. nur zweimal) der Null gleich ist, so oft nennen wir diese Dreh-Axe UU′ eine zu diesem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe; und das Trägheits-Moment, in Bezug auf jede solche Haupt-Dreh-Axe wird dann ein Haupt-Trägheits-Moment genannt.

§. 51.

I. Die nächste Frage ist nun die, — wenn UU′ eine zu dem (in ihr liegenden) Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe

ist, ob dann nicht jeder andere Punkt O′ derselben Geraden UU′ dieselbe Eigenschaft hat.

Um diese Frage zu beantworten, lasse man die Koordinaten-Axe OZ mit UU′ zusammenfallen, und denke sich die beiden andern unter sich rechtwinklichen Koordinaten-Axen OX und OY senkrecht darauf. Dann lege man durch einen beliebigen Punkt O′, der in Bezug auf dieses Koordinaten-Axen-System die Koordinaten-Werthe 0, 0, c haben mag, der also wiederum in der Axe OZ liegt, O′X′ parallel mit OX, und O′Y′ parallel mit OY; so sind die Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM in Bezug auf diese neuen Koordinaten-Axen O′X′, O′Y′, O′Z, offenbar bezüglich x, y, z — c, wenn sie in Bezug auf die alten Axen OX, OY, OZ bezüglich x, y, z genannt worden sind.

Die Summe der statischen Momente aller Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, in Bezug auf die Momenten-Axe O′X′ ist daher nun (nach §. 37.), $= \omega \cdot \Sigma x(z-c) \cdot dM$, also

$$= \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) - \omega c \cdot \Sigma(x \cdot dM);$$

oder, — wenn x_0, y_0, z_0 die auf OX, OY und OZ bezogenen Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes vorstellen, so daß

$$\Sigma(x \cdot dM) = M \cdot x_0,$$
$$\Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_0$$

ist, — es ist die Summe der fraglichen statischen Momente in Bezug auf die Axe O′X′

$$= \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) - c\omega \cdot Mx_0.$$

Dagegen ist die Summe der statischen Momente derselben Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf O′Y′ als Momenten-Axe

$$= \omega \cdot \Sigma y(z-c) \cdot dM = \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) - c\omega \cdot \Sigma(y \cdot dM)$$
$$= \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) - c\omega \cdot My_0.$$

Daraus folgt sogleich:

1) Die Summen der statischen Momente aller Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf die beiden mit einander parallelen um $\pm c$ von einander entfernten und auf der Dreh-Axe UU′ senkrechten Momenten-Axen OX und O′X′ sind daher um $c\omega \cdot Mx_0$ von einander verschieden, und nur dann einander gleich, wenn $x_0 = 0$

ist, d. h. wenn die durch den Schwer-Punkt und durch die Dreh-Axe gelegte Ebene auf diesen Axen OX und O′X′ senkrecht steht.

2) Desgleichen sind die Summen der statischen Momente derselben Kräfte in Bezug auf die beiden parallelen und auf der Dreh-Axe senkrechten Momenten-Axen OY und O′Y′, um $c\omega \cdot My_0$ von einander verschieden und nur dann einander gleich, wenn $y_0 = 0$ ist, d. h. wenn die durch den Schwer-Punkt und durch die Dreh-Axe gelegte Ebene auf diesen Momenten-Axen OY und O′Y′, senkrecht steht. — Also:

3) Nur wenn die Dreh-Axe UU′ durch den Schwer-Punkt geht, sind die Summen der statischen Momente aller der verlorenen Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf je zwei auf UU′ senkrechte und mit einander parallele Momenten-Axen, allemal einander gleich. — Daraus folgt:

4) Geht die Dreh-Axe UU′ nicht durch den Schwer-Punkt; ist sie aber doch eine zu dem (in ihr liegenden) Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe, so liegt in ihr kein zweiter Punkt O′ mehr, in Bezug auf welchen sie ebenfalls Haupt-Dreh-Axe seyn könnte.

5) Geht aber die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt des Körpers, und ist sie zugleich in Bezug auf einen (in ihr liegenden) Punkt O Haupt-Dreh-Axe, so ist sie dasselbe auch in Bezug auf jeden andern in ihr liegenden Punkt O′.

Oder mit andern Worten:

Ist die Summe der statischen Momente aller Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf jede durch O gehende und auf der Dreh-Axe UU′ senkrechte Momenten-Axe, der Null gleich, so ist dies auch der Fall in Bezug auf jede durch einen andern Punkt O′ der Dreh-Axe gehende und ebenfalls auf letzterer senkrechte Momenten-Axe, so oft die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt des Körpers geht; außerdem aber nicht.

II. Untersuchen wir nun die Frage: ob in jeder beliebigen Dreh-Axe UU′ ein Punkt O′ allemal existirt, in Bezug auf welchen sie Haupt-Dreh-Axe ist? —

Behalten wir alle Zeichen der vorigen Nummer (I.) bei, und setzen wir bloß voraus, daß die Dreh-Axe UU′ in Bezug auf den Punkt O keine Haupt-Dreh-Axe ist, also daß $\Sigma(xz \cdot dM)$ und $\Sigma(yz \cdot dM)$ nicht beide zugleich Null sind, so müßten, vermöge der (I.), sollte der durch das unbestimmte c gegebene Punkt O′ ein solcher Punkt seyn, zu welchem UU′ Haupt-Dreh-Axe wird, die beiden Gleichungen erfüllt seyn, nämlich

1) $$\Sigma(xz \cdot dM) - c \cdot Mx_0 = 0,$$

und

2) $$\Sigma(yz \cdot dM) - c \cdot My_0 = 0.$$

Dies führt zu der Bedingungs-Gleichung

(⊙)... $$y_0 \cdot \Sigma(xz \cdot dM) = x_0 \cdot \Sigma(yz \cdot dM).$$

Ist also diese Bedingungs-Gleichung (⊙) von der Lage des Schwer-Punktes nicht erfüllt, so ist die Dreh-Axe UU′ in Bezug auf keinen ihrer Punkte Haupt-Dreh-Axe. Ist aber diese Bedingungs-Gleichung erfüllt *), so findet sich der Ordinaten-Werth

3) $$c = \frac{\Sigma(xz \cdot dM)}{M \cdot x_0} = \frac{\Sigma(yz \cdot dM)}{M \cdot y_0}$$

augenblicklich dazu, durch welchen die Lage des Punktes O′ bestimmt ist, zu dem die UU′ oder OZ eine Haupt-Dreh-Axe wird, wenn nur nicht $x_0 = y_0 = 0$ ist; d. h. wenn nur nicht die Dreh-Axe UU′ durch den Schwer-Punkt geht.

Die Bedingungs-Gleichung (⊙) drückt übrigens aus, daß

---

*) Es fällt in die Augen, daß wenn

$$y_0 \cdot \Sigma(xz \cdot dM) = x_0 \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$$

ist, dann auch allemal

$$y_0 \cdot \Sigma x(z-b) \cdot dM = x_0 \cdot \Sigma y(z-b) \cdot dM$$

seyn müsse, weil der subtrahirte Theil auf beiden Seiten ein und derselbe ist, d. h. wenn diese Bedingung (⊙) für irgend einen Punkt O erfüllt ist, so ist sie es auch für jeden andern Punkt O″, welcher von O um das beliebige $\pm b$ entfernt ist.

wenn man durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe eine Ebene legt, die Summe der statischen Momente aller Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf irgend- eine durch die Dreh-Axe UU' gelegte und auf der so eben erwähnten Ebene senkrechte Momenten-Axe der Null gleich ist *). — Also nur, wenn die so eben ausgesprochene Bedingung von der Lage der Dreh-Axe gegen den Schwer-Punkt erfüllt ist, giebt es einen Punkt O in ihr (und dann wiederum nur einen einzigen) in Bezug auf welchen sie Haupt-Dreh-Axe ist.

III. Jetzt kommt die Frage an die Reihe; ob man zu jedem gegebenen Punkte O allemal die Lage einer durch ihn gehenden Dreh-Axe UU' finden könne, so daß solche eine zu diesem gegebenen Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe wird?

Zur Beantwortung dieser Frage lege man durch O zuerst drei beliebige auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY, OZ; und nehme an, daß die gesuchte Dreh-Axe UU' mit diesen drei Axen bezüglich die Winkel α'', β'', γ'' macht, so daß α'', β'', γ'' die Unbekannten sind, welche der Aufgabe entsprechend gesucht werden, während bereits

$$\cos\alpha''^2 + \cos\beta''^2 + \cos\gamma''^2 = 1$$

seyn muß.

Nun lege man durch den Punkt O noch drei neue auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX_1, OY_1, OZ_1, so daß OZ_1 mit der Dreh-Axe UU' zusammenfällt, die beiden andern Axen OX_1 und OY_1 aber bezüglich mit den alten Axen OX, OY, OZ die Winkel α, β, γ, und α', β', γ' machen. Sind dann x_1, y_1, z_1 die neuen Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM, dessen alte Koordinaten-Werthe x, y, z sind, so

*) Man findet dieses Resultat am leichtesten, wenn man eine der beiden Koordinaten-Ebenen XOZ oder YOZ durch den Schwer-Punkt selbst gehen läßt, und indem man das Resultat (II_1. oder II_2.) zu Hülfe nimmt, welches lehrt, daß wenn die Summe der statischen Momente der Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ der Null gleich ist, in Bezug auf eine auf der Schwer-Punkts-Ebene senkrecht stehende Momenten-Axe, solches in Bezug auf jede andere mit ihr parallele auch der Fall seyn müsse, wenn nur die Momenten-Axen durch OZ hindurchgehen.

sind (nach §. 37.) die statischen Momente aller der verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, in Bezug auf die Momenten-Axen OY_1 und OX_1 bezüglich

$$\omega \cdot \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) \quad \text{und} \quad \omega \cdot \Sigma(x_1 z_1 \cdot dM);$$

und damit UU' oder OZ_1 eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe sey, so müssen diese beiden statischen Momente der Null gleich werden, so daß die beiden Gleichungen

$$2) \quad \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad 3) \quad \Sigma(x_1 z_1 \cdot dM) = 0$$

in Verbindung mit der obigen (1.) zur Bestimmung der drei Winkel α'', β'', γ'' dienen müssen, d. h. zur Bestimmung der Lage der gesuchten Haupt-Dreh-Axe UU'.

Man hat aber nach (I. Th. Geom. §. 3. IV.) zwischen den alten und neuen Koordinaten-Werthen die Gleichungen

$$4) \quad \begin{cases} x_1 = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma, \\ y_1 = x \cdot \cos\alpha' + y \cdot \cos\beta' + z \cdot \cos\gamma', \\ z_1 = x \cdot \cos\alpha'' + y \cdot \cos\beta'' + z \cdot \cos\gamma''; \end{cases}$$

während zwischen den neun Winkeln

$$\alpha, \ \alpha', \ \alpha''; \ \beta, \ \beta', \ \beta''; \ \gamma, \ \gamma', \ \gamma''$$

(außer der 1.) noch fünf Bedingungs-Gleichungen existiren, in so fern die Koordinaten-Axen auf einander senkrecht stehen. Substituirt man daher diese Werthe (aus 4.) statt x_1, y_1 und z_1 in die Gleichungen (2. und 3.), so kann man nun die Winkel α'', β'', γ'' finden, während die Lage der neuen Abscissen-Axe OX_1 in der auf OZ_1 senkrechten Ebene noch völlig unbestimmt bleibt.

Es wird aber noch bequemer, die Lage der neuen Axen OX_1, OY_1 und OZ_1 mittelst der drei Stücke φ, ψ und θ so zu bestimmen, wie solches im (I. Th. Geom. §. 3. IV.) näher zu sehen ist. Ist nämlich DOD' die Durchschnitts-Linie der Ebenen X_1OY_1 und XOY (die Knoten-Linie), φ der Winkel DOX, ψ der Winkel DOX_1 und $\theta = \gamma''$ die Neigung, d. h. der Winkel, welchen die beiden Ebenen X_1OY_1 und XOY mit einander machen, so kann man $DOY = 90^0 + \varphi$, $DOY_1 = 90^0 + \psi$ nehmen. Unter diesen Voraussetzungen hat man aber die neun Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} \gamma'' = \theta; \\ \cos\beta'' = -\cos\varphi\cdot\sin\theta; \\ \cos\alpha'' = -\sin\varphi\cdot\sin\theta; \\ \cos\gamma' = \cos\psi\cdot\sin\theta; \\ \cos\beta' = \sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta; \\ \cos\alpha' = -\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta; \\ \cos\gamma = \sin\psi\cdot\sin\theta; \\ \cos\beta = -\sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\theta; \\ \cos\alpha = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\theta. \end{cases}$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichungen (4.), so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{rl} x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi & \text{durch } X \\ x\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta + y\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta + z\cdot\sin\theta & \text{durch } Y \end{array}\right\}\ldots(6)$$

bezeichnet wird, so daß X und Y von ψ ganz unabhängig sind, jetzt

$$7)\quad \begin{cases} x_1 = Y\cdot\sin\psi + X\cdot\cos\psi, \\ y_1 = Y\cdot\cos\psi - X\cdot\sin\psi, \\ z_1 = -x\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta - y\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta + z\cdot\cos\theta. \end{cases}$$

Substituirt man ferner diese Werthe von x_1 und y_1 in die Gleichungen (2. und 3.), d. h. in

$$\Sigma(y_1 z_1\cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(x_1 z_1\cdot dM) = 0,$$

so erhält man

$$8)\quad \cos\psi\cdot\Sigma(Yz_1\cdot dM) - \sin\psi\cdot\Sigma(Xz_1\cdot dM) = 0$$

und $$9)\quad \sin\psi\cdot\Sigma(Yz_1\cdot dM) + \cos\psi\cdot\Sigma(Xz_1\cdot dM) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen führen aber, wenn man ψ aus ihnen eliminirt, zu diesen andern beiden:

$$10)\quad \Sigma(Yz_1\cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad 11)\quad \Sigma(Xz_1\cdot dM) = 0,$$

aus welchen nun die beiden Unbekannten φ und θ gefunden werden müssen. Zu dem Ende substituire man nun vollends statt z_1 seinen Werth (aus 7.). In den entstehenden Gleichungen erscheinen dann die Faktoren

$$\Sigma(x^2\cdot dM),\ \Sigma(y^2\cdot dM),\ \Sigma(z^2\cdot dM),\ \Sigma(yz\cdot dM),\ \Sigma(xz\cdot dM),\ \Sigma(xy\cdot dM),$$

welche sich auf die alten Axen beziehen, welche daher berechnet werden können, und deren Werthe als bekannt bezüglich durch

$$f, \quad g, \quad h, \quad f', \quad g', \quad h'$$

bezeichnet seyn mögen. Die Gleichungen (10. und 11.) werden dann

$$12) \quad (f \cdot \sin\varphi^2 + 2h' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + g \cdot \cos\varphi^2 - h) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ - (g' \cdot \sin\varphi + f' \cdot \cos\varphi) \cdot (\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0;$$

$$13) \quad [h' \cdot (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + (f - g) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi] \cdot \sin\theta \\ - (g' \cdot \cos\varphi - f' \cdot \sin\varphi) \cdot \cos\theta = 0.$$

Dividirt man diese letztere durch $\cos\theta$ und setzt man

$$14) \quad tg\,\varphi = u, \text{ also } \sin\varphi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \; \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

so erhält man

$$15) \quad tg\,\theta = \frac{(g' - f'u) \cdot \sqrt{1+u^2}}{h'(1-u^2) + (f-g)u}.$$

Die (12.) wird dadurch, daß man sie durch $\cos\theta^2$ dividirt und statt $tg\,\theta$ diesen Werth (aus 15.), so wie statt $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die Werthe (aus 14.) substituirt, zuletzt aber die ganze Gleichung noch durch $1+u^2$ dividirt, die nachstehende;

$$16) \quad [(gg' - hg' - f'h') + (hf' - ff' + g'h')u] \cdot [h'(1-u^2) + (f-g)u] \\ + (g'u + f') \cdot (f'u - g')^2 = 0;$$

und dies ist also die Gleichung, welche u, d. h. $tg\,\varphi$ zu liefern hat. Die Gleichung (15.) giebt dann $tg\,\theta$ dazu, und so wie φ die Lage der Knoten-Linie DOD' giebt, so giebt θ die Lage der Ebene X_1OY_1 gegen XOY ganz und vollständig, also auch die Lage von OZ_1, d. h. von UU' ganz und vollständig; und zwar hängen alle diese Stücke, wie sich erwarten ließ, durchaus nicht vom Winkel ψ ab, d. h. nicht von der Lage der Axe OX_1, in der auf OZ_1 senkrechten Ebene.

Die Gleichung (16.) ist nach u vom dritten Grade, hat daher mindestens einen reellen Werth; sie hat aber vielleicht auch jedesmal drei reelle Werthe. Zu jedem Werth von u oder $tg\,\varphi$ gehören dann zwei Werthe von φ, die um 180° von einander verschieden sind, und welche daher eine und dieselbe Knoten-Linie DOD' (nämlich die beiden Richtungen OD und OD' derselben)

liefern. Zu jedem Werthe von u gehört ein einziger Werth von $tg\theta$, also zwei Werthe von θ, welche wiederum um 180° von einander verschieden sind, und welche daher wieder eine und dieselbe Lage der Ebene X_1OY_1 liefern; deshalb zeigt jeder reelle Werth von u die Existenz einer zu dem Punkte O gehörigen Haupt-Dreh-Axe an. Die drei erstern der Gleichungen (5.) geben zugleich auch, wenn φ und θ gefunden sind, noch α'', β'' und γ'' dazu, wodurch die Lage der Haupt-Dreh-Axe UU' oder OZ_1 gegen die Axen OX, OY und OZ bestimmt ist.

Es bleibt jetzt nur noch zu untersuchen übrig, ob zu jedem Punkte O nur eine, oder allemal drei solche Haupt-Dreh-Axen gehören, d. h. ob die Gleichung (16.) nur einen reellen Werth von u liefert, oder ob allemal drei reelle Werthe von u sich ergeben. — Weil aber in der ganzen Rechnung die drei Koordinaten-Axen OX_1, OY_1 und OZ_1 ganz symmetrisch eingehen, so giebt dies der gerechten Vermuthung Raum, daß zu jedem Punkte O allemal drei Haupt-Dreh-Axen existiren, welche auf einander senkrecht stehen. — Um diese Vermuthung zur Gewißheit zu erheben, sey OZ_1 als Haupt-Dreh-Axe bereits gefunden; und nun versuche man, ob in der Ebene X_1OY_1 noch eine zweite Haupt-Dreh-Axe OX_1 existirt, welches letztere der Fall ist, wenn außer $\Sigma(y_1z_1\cdot dM) = 0$ noch $\Sigma(x_1y_1\cdot dM) = 0$ ist. Weil aber OZ_1 schon eine Haupt-Dreh-Axe seyn soll, so ist bereits (nach 2. und 3., wegen der 10. und 11., oder der 8. und 9.)

$$\Sigma(y_1z_1\cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(x_1z_1\cdot dM) = 0;$$

und es fragt sich daher bloß, ob man den Winkel ψ so bestimmen könne, daß auch noch

$$17) \qquad \Sigma(x_1y_1\cdot dM) = 0$$

wird. Substituirt man aber hier herein die Werthe von x_1 und y_1 (aus 7.), so geht diese Gleichung, wenn man zugleich die Bezeichnungen (6.) gebraucht, über in

$$18) \quad \sin 2\psi\cdot\Sigma(X^2 - Y^2)\cdot dM = 2\cos 2\psi\cdot\Sigma(XY\cdot dM),$$

oder

$$19) \qquad tg\,2\psi = \frac{2\Sigma(XY\cdot dM)}{\Sigma(X^2 - Y^2)\cdot dM},$$

während X und Y (nach 6.) kein ψ enthalten. Diese Gleichung giebt daher zu dem einzigen reellen Werthe von u oder $tg\varphi$, welcher die Haupt-Dreh-Axe OZ_1 geliefert hat, noch $tg2\psi$ so dazu, daß auch OX_1 eine Haupt-Dreh-Axe wird. Weil aber $tg2\psi$ zu diesem Werthe von u oder $tg\varphi$ nur einen Werth bekommt, so hat 2ψ nur zwei Werthe, die um 180^0 von einander verschieden sind; und deshalb hat ψ zwei Werthe, die um 90^0 von einander verschieden sind. Wenn daher der eine derselben die Haupt-Dreh-Axe OX_1 bestimmt hat, so giebt der andere dieser Werthe noch eine Haupt-Dreh-Axe, welche auf der erstern OX_1 senkrecht steht, d. h. die Lage von OY_1 annimmt.

Dadurch ist nun außer Zweifel gesetzt, daß zu jedem Punkte O drei Haupt-Dreh-Axen existiren, die alle drei auf einander senkrecht stehen; d. h. durch jeden Punkt O kann man allemal drei auf einander senkrechte Linien dergestalt legen, daß, wenn der Körper sich um irgend eine derselben dreht, mit irgend einer Winkel-Geschwindigkeit ω, so daß jedes Element dM der Masse, welches von dieser Dreh-Axe um r entfernt ist, die Größe der Bewegung $r\omega \cdot dM$ hat, — dann die Summe der statischen Momente aller dieser Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ (in ihrer eigenen Richtung genommen, oder auch in ihren genau entgegengesetzten Richtungen genommen, so daß sie dann zu den verlorenen Kräften des d'Alembert'schen Princips gezählt werden) in Bezug auf jede Momenten-Axe, welche durch O senkrecht auf diese Dreh-Axe gelegt ist, allemal der Null gleich wird.

IV. Nimmt man aber diese, zu dem Punkte O gehörigen, allemal existirenden und auf einander senkrechten drei Haupt-Dreh-Axen zu Koordinaten-Axen, und sind dann x_1, y_1, z_1 die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Massen-Elementes dM, so hat man allemal

$$1)\quad \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) = 0; \qquad 2)\quad \Sigma(x_1 z_1 \cdot dM) = 0;$$
$$3)\quad \Sigma(x_1 y_1 \cdot dM) = 0.$$

Und umgekehrt: Sind für irgend drei durch O hindurchgehende und rechtwinkliche Koordinaten-Axen OX_1, OY_1, OZ_1 diese drei

Gleichungen erfüllt, so sind diese Koordinaten-Axen allemal die zu dem Punkte O gehörigen drei Haupt-Dreh-Axen.

Daraus kann man sogleich folgern, daß wenn ein Körper durch drei auf einander senkrechte Ebenen jedesmal in kongruente Theile getheilt wird, die Durchschnitts-Linien dieser Ebenen dann allemal die zu dem Durchschnitts-Punkte derselben gehörigen Haupt-Dreh-Axen seyn werden, so oft der Körper zu gleicher Zeit homogen ist; in so fern nämlich dann gewiß eben so viele positive $x_1 y_1 \cdot dM$ als negative existiren werden.

Daher sind die sogenannten Haupt-Durchmesser eines homogenen Ellipsoids allemal auch die zu dem Schwer-Punkte desselben gehörigen Haupt-Dreh-Axen.

V. Wenn wir auch im Allgemeinen gefunden haben, daß zu jedem Punkte O allemal drei, aber auch im Allgemeinen nicht mehr als drei Haupt-Dreh-Axen existiren, — weil die beiden Gleichungen (III. 2. 3. oder III. 10. 11. oder III. 12. 13.), welche die Lage einer jeden Haupt-Dreh-Axe zu bestimmen haben, zu einer kubischen Gleichung (III.-16.) führen, welche allemal drei, aber auch nie mehr als drei reelle Werthe von u oder $tg\varphi$ liefert, — so können doch in Ausnahms-Fällen dieselben beiden Gleichungen vielleicht beide identisch werden, vielleicht aber in eine einzige zusammenfallen. In solchen Ausnahms-Fällen werden aber zu dem Punkte O unzählich viele Haupt-Dreh-Axen gehören.

Um dies recht gründlich zu untersuchen, wollen wir annehmen, daß bereits die Axen OX, OY und OZ mit drei zu O gehörigen Haupt-Dreh-Axen zusammenfallen, daß also schon

$$1)\quad \Sigma(yz \cdot dM) = 0;\quad \Sigma(xz \cdot dM) = 0;\quad \Sigma(xy \cdot dM) = 0,$$

d. h. daß schon (nach III.)

$$2)\qquad f' = 0;\qquad g' = 0;\qquad h' = 0$$

ist; und wollen nun eine vierte Haupt-Dreh-Axe OZ_1 mittelst der beiden Gleichungen (III. 2. 3. oder III. 12. 13.) zu bestimmen suchen. Diese Gleichungen werden aber nun folgende, nämlich:

$$3)\quad (f \cdot \sin\varphi^2 + g \cdot \cos\varphi^2 - h) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = 0$$

und $$4)\quad (f - g) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta = 0.$$

Diesen beiden Gleichungen wird nun zunächst genügt durch

$\sin\theta = 0$, welches die Haupt-Dreh-Axe OZ wieder giebt. Dividirt man nun durch $\sin\theta$, so erhält man

$$5) \quad (f\cdot\sin\varphi^2 + g\cdot\cos\varphi^2 - h)\cdot\cos\theta = 0$$

und

$$6) \quad (f-g)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi = 0.$$

Der letztern wird genügt durch

$$7)\ f-g=0, \text{ oder } 8)\ \sin\varphi=0, \text{ oder } 9)\ \cos\varphi=0;$$

der erstern dagegen durch

$$10)\ f\cdot\sin\varphi^2 + g\cdot\cos\varphi^2 - h = 0, \text{ oder } 11)\ \cos\theta = 0.$$

Allen beiden zugleich wird also durch sechs Kombinationen genügt, welche wir nun einzeln durchnehmen wollen.

Die Kombination (7. und 10.) giebt

$$f = g = h,$$

d. h.

$$(\odot)\cdots \quad \Sigma(x^2\cdot dM) = \Sigma(y^2\cdot dM) = \Sigma(z^2\cdot dM).$$

Ist also diese Bedingung ($\odot$) erfüllt, so ist jede beliebige durch den Punkt O gelegte Gerade eine Haupt-Dreh-Axe, weil jetzt θ und φ alle möglichen Werthe haben können. Es ist aber diese Bedingung allemal und nur dann erfüllt, so oft die zu diesen Haupt-Dreh-Axen OX, OY, OZ gehörigen Haupt-Momente der Trägheit, nämlich

$$\Sigma(x^2+y^2)\cdot dM, \quad \Sigma(x^2+z^2)\cdot dM, \quad \Sigma(y^2+z^2)\cdot dM$$

alle drei einander gleich sind.

Die Kombination (7. und 11.) giebt

$$(☾)\cdots \quad f = g \text{ oder } \Sigma(x^2\cdot dM) = \Sigma(y^2\cdot dM)$$

und $\theta = 90^0$, während φ unbestimmt bleibt.

Ist also die Bedingung (☾) erfüllt, so ist jede durch O in der Ebene XOY gelegte Gerade eine Haupt-Dreh-Axe. Diese Bedingung (☾) ist aber allemal und nur dann erfüllt, wenn die beiden zu OX und OY gehörigen Haupt-Momente der Trägheit, nämlich

$$\Sigma(y^2+z^2)\cdot dM \quad \text{und} \quad \Sigma(x^2+z^2)\cdot dM$$

einander gleich sind.

Die Kombination (8. und 10.) giebt

$$g = h \quad \text{und} \quad \varphi = 0, \quad \text{oder} \quad = 180^\circ.$$

Ist also diese Bedingung $g = h$ erfüllt, so ist jede in der Ebene YOZ durch O gelegte Gerade eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe.

Die Kombination (9. und 10.) giebt

$$f = h \quad \text{und} \quad \varphi = 90^\circ.$$

Ist also diese Bedingung erfüllt, so ist jede in der Ebene XOZ durch O gelegte Gerade eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe.

Die Kombinationen (8. und 11.) und (9. und 11.) geben die Axen OY und OX wieder als Haupt-Dreh-Axen zu erkennen.

Diese drei letzteren Kombinationen liefern also nichts Neues.

Dies sind demnach die einzigen Fälle, wo zu einem Punkte O mehr als drei Haupt-Dreh-Axen, und zwar unendlich viele in einer und derselben Ebene liegende und dann noch eine darauf senkrechte, existiren, oder wo gar alle durch O gelegten Geraden ohne Ausnahme, Haupt-Dreh-Axen sind.

VI. Wir wollen nun noch jeden der Punkte O suchen, welche die letztere Eigenschaft haben, daß nämlich jede durch ihn gelegte Gerade allemal eine Haupt-Dreh-Axe des gegebenen Körpers ist.

Zu dem Ende wollen wir vom Schwer-Punkte S des Körpers ausgehen, seine drei Haupt-Dreh-Axen SX, SY, SZ zu Koordinaten-Axen nehmen, und für diese die Koordinaten-Werthe irgend eines Elementes dM durch x, y, z bezeichnen; so hat man, weil S der Schwer-Punkt ist,

1) $\Sigma(x \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(y \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(z \cdot dM) = 0;$

zugleich aber auch, weil SX, SY, SZ Haupt-Dreh-Axen sind,

2) $\Sigma(yz \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(xz \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(xy \cdot dM) = 0.$

Die drei zugehörigen Haupt-Trägheits-Momente selbst wollen wir durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen, so nämlich, daß

3) $\Sigma(x^2 + y^2) \cdot dM = \mathfrak{C}$,

4) $\Sigma(x^2 + z^2) \cdot dM = \mathfrak{B}$,

5) $\Sigma(y^2 + z^2) \cdot dM = \mathfrak{A}$

ist.

In Bezug auf diese Koordinaten-Axen seyen nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten-Werthe eines der gesuchten Punkte O und durch den letztern seyen drei neue Koordinaten-Axen OX′, OY′, OZ′

parallel mit den alten gelegt, so daß, wenn x', y', z' die neuen Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM vorstellen, allemal

6) $x' = x - \mathfrak{x}$, $y' = y - \mathfrak{y}$, $z' = z - \mathfrak{z}$

seyn muß.

Sollen nun alle durch O gehende Geraden allemal Haupt-Dreh-Axen seyn, so müssen die Koordinaten-Axen OX', OY', OZ' ebenfalls zu den Haupt-Dreh-Axen gehören, und außerdem müssen noch die drei zugehörigen Haupt-Trägheits-Momente alle drei einander gleich seyn. Man hat aber

$$\Sigma(x'y' \cdot dM) = \Sigma(x - \mathfrak{x})(y - \mathfrak{y}) \cdot dM$$
$$= \Sigma(xy \cdot dM) - \mathfrak{x} \cdot \Sigma(y \cdot dM) - \mathfrak{y} \cdot \Sigma(x \cdot dM) + \mathfrak{x}\mathfrak{y} \cdot \Sigma(dM),$$

d. h. (wegen der Gleichungen 1. u. 2. und weil $\Sigma(dM)$ nichts anderes als die ganze Masse M des Körpers ist)

7) $$\Sigma(x'y' \cdot dM) = M \cdot \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y};$$

und eben so auch

8) $$\Sigma(x'z' \cdot dM) = M \cdot \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{z};$$

9) $$\Sigma(y'z' \cdot dM) = M \cdot \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{z}.$$

Diese drei Werthe müssen nun alle drei Null werden, wenn OX', OY', OZ' Haupt-Dreh-Axen seyn sollen; also müssen von den drei Werthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zwei der Null gleich seyn. Der gesuchte Punkt O liegt daher in einer der, durch den Schwer-Punkt S gehenden drei Haupt-Dreh-Axen.

Setzen wir

10) $\mathfrak{x} = 0$ und $\mathfrak{y} = 0$,

so daß der Punkt O in der Axe SZ und um $\mathfrak{z}$ vom Schwer-Punkte S abliegt; so sind die drei neuen Haupt-Trägheits-Momente (nach §. 45.) bezüglich

$$\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} + M\mathfrak{z}^2, \quad \mathfrak{A} + M \cdot \mathfrak{z}^2.$$

Da nun diese drei Haupt-Trägheits-Momente alle drei einander gleich werden müssen, so giebt dies noch die Gleichungen

11) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und 12) $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + M \cdot \mathfrak{z}^2$.

Die (11.) ist eine Bedingungs-Gleichung der Existenz eines solchen Punktes O, und die (12.) giebt dann

$$\mathfrak{z} = \pm\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{M}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{M}\right)},$$

so daß zwei vom Schwer-Punkte gleich weit ab, übrigens in der Axe SZ liegende Punkte O gefunden werden, so oft die beiden zu dem Schwer-Punkte S und zu den Axen SX und SY gehörigen Haupt-Trägheits-Momente 𝔄 und 𝔅 einander gleich sind, und dabei das dritte zugehörige Haupt-Moment ℭ größer als jedes der beiden andern ist. Diese beiden Punkte können innerhalb auch außerhalb des Körpers fallen.

So oft also zwei der drei Haupt-Momente der Trägheit für die drei auf einander senkrechten Haupt-Dreh-Axen, die durch den Schwer-Punkt des Körpers gehen, einander gleich sind und das dritte größer ist, so oft existiren zwei Punkte O, welche in der dritten durch den Schwer-Punkt gehenden Haupt-Dreh-Axe liegen, vom Schwer-Punkte gleich weit entfernt sind, und von denen jeder die Eigenschaft hat, daß jede durch ihn gelegte Gerade eine Haupt-Dreh-Axe ist. Sind aber diese beiden Bedingungen nicht erfüllt, so existirt gar kein solcher Punkt.

Und sind die zu dem Schwer-Punkte S gehörigen Haupt-Momente der Trägheit alle drei einander gleich, so ist der Schwer-Punkt selbst ein solcher Punkt O und dann auch der einzige.

In einem homogenen Ellipsoid mit drei ungleichen Haupt-Durchmessern giebt es also (nach §. 42. und nach IV.) gar keinen solchen Punkt O, so nämlich, daß jede durch ihn hindurchgehende Axe allemal eine Haupt-Dreh-Axe wäre. Für ein Umdrehungs-Ellipsoid, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre große Axe entstanden ist, giebt es auch keinen solchen Punkt (nach §. 42.). — Ist das letztere aber durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden, so giebt es zwei solcher Punkte; und diese stehen vom Mittel-Punkte des Ellipsoids, welcher der Schwer-Punkt ist, um $z = \sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{5}\right)}$ ab, wenn a die kleinere, b die größere halbe Axe der Ellipse ist, weil man dasmal (nach §§. 42. 44.)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \tfrac{1}{5}M\cdot(a^2+b^2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = \tfrac{2}{5}Mb^2$$

hat. Diese beiden Punkte liegen auf der Umdrehungs-Axe innerhalb oder außerhalb des Ellipsoids, je nachdem $b^2<6a^2$ oder $b^2>6a^2$ ist. Für $b^2=6a^2$ fallen sie mit den Polen des Ellipsoids zusammen.

Denkt man sich ein homogenes Parallelepipedum mit drei ungleichen Kanten 2a, 2b, 2c, so sind die drei zu dem Schwer-Punkte gehörigen Haupt-Momente der Trägheit, nämlich (nach §. 40.)

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{3}M(b^2+c^2); \quad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{3}M(a^2+c^2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

alle

alle drei einander ungleich; und es existirt dann kein solcher Punkt O, wie er hier gesucht wurde. Sind aber zwei Kanten 2a und 2b einander gleich, so wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, und ist dann die dritte Kante 2c die kleinste, so daß $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$, auch $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}$ wird, so existiren wieder zwei solche Punkte O, in der durch den Schwer-Punkt mit der Kante 2c parallel hindurch gehenden Geraden, welche von diesem Schwer-Punkte (der zugleich der mittelste Punkt des Parallelepipedums ist) um $z = \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{3}\right)}$ abstehen. Und diese Punkte liegen, je nachdem $a < 2c$, oder $a > 2c$ ist, oder $a = 2c$, innerhalb des Parallelepipedums, außerhalb desselben, oder in dessen Grenz-Flächen.

VII. Wir haben oben (in I.) gesehen, daß wenn SZ eine zu dem Schwer-Punkte S gehörige Haupt-Dreh-Axe ist, solche dann auch zu jedem andern Punkte O in ihr eine Haupt-Dreh-Axe seyn müsse. — Weil aber zu jedem Punkte O drei Haupt-Dreh-Axen OX′, OY′, OZ′ gehören, die wiederum auf einander senkrecht stehen, so kann die Frage entstehen, ob OX′ und OY′ bezüglich mit SX und SY parallel laufen werden oder nicht? —

Um diese Frage zu beantworten, sey der auf die Koordinaten-Axe SZ bezogene Ordinaten-Werth von O, $= c$, und die auf dieselben Axen SX, SY, SZ bezogenen Koordinaten-Werthe irgend eines Elementes dM der Masse bezüglich x, y und z. — Hernach lege man durch O, die Koordinaten-Axen OX_1 und OY_1 parallel mit SX und SY, und nenne die auf OX_1, OY_1, OZ bezogenen Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM bezüglich x_1, y_1 und z_1, so hat man

1) $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z - c$.

Endlich mache OX′ mit OX_1 den Winkel φ (von OX_1 nach OY_1 hin gezählt) und in Bezug auf diese, zu O gehörigen Haupt-Dreh-Axen OX′, OY′, OZ′ seyen x', y', z' die Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM, so daß man hat

2) $x' = x_1 \cdot \cos\varphi + y_1 \cdot \sin\varphi$; $y' = -x_1 \cdot \sin\varphi + y_1 \cdot \cos\varphi$; $z' = z_1$,

d. h. weil $x_1 = x$ und $y_1 = y$ ist;

3) $x' = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi$; $y' = -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$; $z' = z - c$.

Da nun OX′, OY′, OZ Haupt-Dreh-Axen sind, so hat man (nach IV.) die drei Gleichungen

4) $\Sigma(y'z' \cdot dM) = 0$; $\Sigma(x'z' \cdot dM) = 0$; $\Sigma(x'y' \cdot dM) = 0$;

d. h., wenn man hierin statt x', y', z' ihre Werthe (aus 3.) substituirt, die drei Gleichungen

$$5)\quad \begin{cases} \Sigma(-x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi)(z-c) \cdot dM = 0; \\ \Sigma(x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi)(z-c) \cdot dM = 0; \\ \Sigma(x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi)(-x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi) \cdot dM = 0. \end{cases}$$

Weil aber SX, SY, SZ die durch den Schwer-Punkt S gehenden Haupt-Dreh-Axen sind, so daß

$$\Sigma(x \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(y \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(z \cdot dM) = 0;$$
$$\Sigma(yz \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(xz \cdot dM) = 0; \quad \Sigma(xy \cdot dM) = 0$$

ist, so werden die beiden erstern dieser Gleichungen (5.) identisch $0 = 0$. Die dritte aber wird

$$6)\quad [\Sigma(y^2 \cdot dM) - \Sigma(x^2 \cdot dM)] \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0,$$

so daß diese Gleichung zur Bestimmung von φ, d. h. zur Bestimmung der Lage der durch O hindurch gehenden Haupt-Dreh-Axen dienen muß.

Ist daher

$$\Sigma(x^2 \cdot dM) = \Sigma(y^2 \cdot dM),$$

d. h. sind die beiden zu den Axen SX und SY gehörigen Haupt-Trägheits-Momente

$$\Sigma(x^2 + z^2) \cdot dM \quad \text{und} \quad \Sigma(y^2 + z^2) \cdot dM$$

einander gleich, d. h. (nach V.) ist jede durch S in der Ebene XSY gelegte Gerade eine zu S gehörige Haupt-Dreh-Axe, so bleibt φ ganz willkührlich, und es ist also dann auch jede in der Ebene X_1OY_1 durch O gelegte Gerade eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe. —

Ist aber nicht $\Sigma(x^2 \cdot dM) = \Sigma(y^2 \cdot dM)$, so ist entweder

$$\sin\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad \cos\varphi = 0,$$

d. h. entweder $\varphi = 0$, oder $\varphi = 90^0$,

und dies zeigt, daß die durch O gehenden Haupt-Dreh-Axen OX', OY' mit denen durch den Schwer-Punkt S gehenden allemal parallel sind, so oft der Punkt O in der, zu dem Schwer-Punkte S gehörigen dritten

Haupt-Dreh-Axe liegt, während unter dieser dritten jede der drei zusammengehörigen verstanden werden kann *).

§. 52.

Einige Eigenschaften der Haupt-Trägheits-Momente.

I. Sind 𝔄, 𝔅, ℭ die drei zu den Haupt-Dreh-Axen OX, OY, OZ gehörigen Haupt-Trägheits-Momente; ist nämlich, wenn OX, OY, OZ zu Koordinaten-Axen genommen werden,

$$\Sigma(y^2+z^2)\cdot dM = \mathfrak{A}, \qquad \Sigma(x^2+z^2)\cdot dM = \mathfrak{B},$$
$$\Sigma(x^2+y^2)\cdot dM = \mathfrak{C},$$

so wird das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ desselben festen Körpers M in Bezug auf jede durch denselben Punkt O gehende vierte Axe, welche mit den drei vorgenannten Haupt-Dreh-Axen, OX, OY, OZ bezüglich die Winkel α, β, γ macht, allemal berechnet aus der Gleichung

$$\Sigma(r^2 \cdot dM) = \mathfrak{A}\cdot \cos\alpha^2 + \mathfrak{B}\cdot \cos\beta^2 + \mathfrak{C}\cdot \cos\gamma^2.$$

Solches folgt unmittelbar aus (§. 47.) in Verbindung mit (§. 51. IV.).

Daraus folgt noch:

II. Das größte der drei Haupt-Trägheits-Momente 𝔄, 𝔅, ℭ, ist zu gleicher Zeit auch größer als das nach der vorstehenden Formel berechnete vierte Trägheits-Moment desselben Körpers, welches sich auf eine beliebige aber durch denselben Punkt O hindurch gehende vierte Momenten-Axe bezieht.

Denn setzt man in der Formel (I.) $1-\cos\beta^2-\cos\gamma^2$ statt $\cos\alpha^2$, so nimmt sie die Form an:

$$\Sigma(r^2 \cdot dM) = \mathfrak{A} - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot \cos\beta^2 - (\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\cdot \cos\gamma^2.$$

Ist daher $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ und auch $\mathfrak{A} > \mathfrak{C}$, so sind $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}$ positiv; folglich ist $\Sigma(r^2 \cdot dM) < \mathfrak{A}$.

III. Das kleinste der drei zusammengehörigen Haupt-Momente der Trägheit ist dagegen auch allemal kleiner, als das (nach der Formel in I.) berechnete vierte.

---

*) Poisson lehrt in seiner „Mécanique" 2te Ausgabe 2ter Theil S. 91. das Gegentheil; er sagt nämlich: en sorte que le long de l'axe OZ, les deux autres axes principaux ne seront pas, en général, parallèles à eux-mêmes.

Setzt man nämlich (in I.) $1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2$ statt $\cos\gamma^2$, so nimmt sie diese Form an, nämlich:

$$\Sigma(r^2\cdot dM) = \mathfrak{C}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\cdot\cos\alpha^2+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\cdot\cos\beta^2.$$

Ist also $\mathfrak{C}<\mathfrak{A}$ und auch $\mathfrak{C}<\mathfrak{B}$, so sind $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}-\mathfrak{C}$ positiv, und daher ist $\Sigma(r^2\cdot dM)>\mathfrak{C}$.

IV. Sind diese drei Haupt-Trägheits-Momente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ alle drei einander gleich, so ist das vierte (nach I. berechnete) gerade eben so groß; weil solches sich dann, wenn $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ ist, $=\mathfrak{A}(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)$ ausweiset, während

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2 = 1$$

ist *).

V. Sind zwei der drei Haupt-Trägheits-Momente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einander gleich, ist z. B. $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, so findet sich (aus I.)

$$\begin{aligned}\Sigma(r^2\cdot dM) &= \mathfrak{A}\cdot\sin\gamma^2+\mathfrak{C}\cdot\cos\gamma^2\\ &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\cdot\sin\gamma^2+\mathfrak{C}\\ &= \mathfrak{A}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\cdot\cos\gamma^2;\end{aligned}$$

d. h. dann ist das Trägheits-Moment in Bezug auf alle vierten Momenten-Axen, welche durch denselben Punkt O hindurchgehen, und dabei gegen die Axe OZ des dritten ungleichen Trägheits-Moments gleiche Neigung γ haben, allemal ein und dasselbe **).

Und liegt zugleich die vierte Axe in der Ebene XOY, so daß $\gamma=90^0$, $\cos\gamma=0$ wird, so ist

$$\Sigma(r^2\cdot dM) = \mathfrak{A} = \mathfrak{B};$$

d. h. sind zwei der Haupt-Trägheits-Momente $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einander gleich, so sind alle Trägheits-Momente eben so groß, welche zu Momenten-Axen gehören, die in der Ebene der beiden erstern (Haupt-) Dreh-Axen liegen und durch denselben Punkt O hindurchgehen.

---

*) Dies ist daher z. B. in der homogenen Kugel der Fall, wenn alle Momenten-Axen durch den Mittel-Punkt der Kugel gedacht werden.

**) Dies ist also z. B. der Fall in einem homogenen Umdrehungs-Ellipsoid in Bezug auf jede Momenten-Axe, welche durch den Mittel-Punkt des Ellipsoids geht, und welche dabei mit der Umdrehungs-Axe denselben Winkel γ bildet.

VI. Unter allen Trägheits-Momenten eines und desselben Körpers ist daher das kleinste der zu dem Schwer-Punkte S gehörigen drei Haupt-Trägheits-Momente, allemal zugleich auch das allerkleinste (nach §. 46. Nr. 1.).

Dritte Abtheilung.

Bestimmung des Anfangs-Zustandes im Falle einer Drehung um eine feste Dreh-Axe.

§. 53.

Ein Körper von beliebiger Gestalt ist um zwei gegebene und absolut feste Punkte U und U', also um eine absolut feste Axe UU' beweglich, übrigens in Ruhe; — (Stoß-) Kräfte P_1, P_2, ꝛc. wirken an beliebigen Punkten des Körpers nach beliebigen Richtungen gleichzeitig, und bringen den Körper dahin, eine Umdrehung um UU' mit einer unbekannten Winkel-Geschwindigkeit ω zu beginnen. Man soll die Gleichung zwischen ω und den Kräften P_1, P_2, ꝛc. ꝛc. angeben.

Nach dem d'Alembert'schen Princip müssen, wenn r die Entfernung irgend eines Elementes dM von der Dreh-Axe UU' vorstellt, alle verlorenen Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$, in entgegengesetzter Richtung genommen, mit den Kräften P_1, P_2, ꝛc. ꝛc., welche ebenfalls zu den verlorenen Kräften gezählt werden müssen, um die absolut feste Dreh-Axe das Gleichgewicht halten. Also muß die Summe der statischen Momente der erstern, nämlich

$$-\omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM),$$

nebst der Summe der statischen Momente der letztern in Bezug auf UU' als Momenten-Axe, welche letztere durch L bezeichnet seyn mag, der Null gleich seyn (nach II. Th. §§. 82. 83.).

Die verlangte Gleichung ist daher

$$1) \quad \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = L, \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{L}{\Sigma(r^2 \cdot dM)},$$

wenn man unter L die Summe aller Produkte versteht, aus den auf eine Ebene, die auf der Dreh-Axe in einem beliebigen ihrer Punkte O senkrecht steht, projicirten Kräften P_1, P_2, ꝛc. ꝛc., mit den senkrechten Entfernungen dieser Projektionen von O multiplicirt, und dabei (nach II. Th. §. 29.) positiv oder negativ in Rechnung gebracht; — während $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ wiederum das Trägheits-Moment der Masse M ist, in Bezug auf die Dreh-Axe UU', und die Drehung in dem Sinne vorausgesetzt worden ist, in welchem bei der Bestimmung der Summe L die positiven Drehungen angenommen worden sind; — so daß wenn ω (aus 1.) einen negativen Werth annimmt, solches anzeigt, daß die Drehung in einer Richtung beginnt, welche der angenommenen gerade entgegengesetzt ist.

Anmerk. Wirken nur zwei Stöße P_1 und P_2, welche ein Gegen-Paar bilden, dessen Moment $= Q$ ist, und dessen Ebene mit der Ebene XOY den Winkel ν bildet, so muß (nach II. Th. §. 11.) in der vorstehenden Formel (1.) statt L jetzt $Q \cdot cos\,\nu$ gesetzt werden, und man hat daher dann

$$\omega = \frac{Q \cdot cos\,\nu}{\Sigma(r^2 \cdot dM)}.$$

§. 54.

Rühren die Kräfte P_1, P_2, ꝛc. ꝛc. von bewegten Massen-Elementen m_1, m_2, ꝛc. her, welche unmittelbar nach dem Stoße an dem erst gedachten Körper hängen bleiben, und mit diesem eine Gesammtmasse bilden, und ist v_1 die Projektion der Geschwindigkeit des Elementes m_1 auf die Ebene XOY, so wie f' die Entfernung der Richtung v_1 von der Dreh-Axe; haben v_2 und f'' eine analoge Bedeutung für die andere Masse m_2, u. s. f.; so ist in diesem Falle

$$2) \qquad L = m_1 v_1 f' + m_2 v_2 f'' + \cdots,$$

während in der Gleichung (1. des §. 53.) die Summe $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ über die Gesammtmasse $M + m_1 + m_2 + \cdots$ sich erstrekken muß.

Sind aber m_1, m_2, ꝛc. ꝛc. Massen-Elemente dm einer und derselben Masse m, welche alle einerlei Geschwindigkeit in paral-

lelen Richtungen haben, deren Projektion auf die Ebene XOY, $= v$ seyn mag, während f die Entfernung dieser Projektion von der Dreh-Axe vorstellt, so wird

$$3) \qquad L = \Sigma(fv \cdot dm) = v \cdot \Sigma(f \cdot dm),$$

Es ist aber aus der Theorie vom Schwer-Punkte bekannt, daß wenn man durch die Axe OZ eine Ebene E legt parallel mit den einzelnen projicirten und unter sich parallelen Geschwindigkeiten v, und wenn f_1 die Entfernung des Schwer-Punktes der Masse m von dieser Ebene E ist, dann allemal

$$\Sigma(f \cdot dm) = f_1 \cdot m$$

ist. Daher geht nun die Gleichung (3.) in

$$4) \qquad L = f_1 m \cdot v,$$

und die Gleichung (1.) in

$$5) \qquad \omega = \frac{f_1 \cdot mv}{\Sigma(r^2 \cdot dM)}$$

über.

Diese Gleichung (5.) giebt also die Winkel-Geschwindigkeit ω, mit welcher die, nun eine einzige Gesammt-Masse $M+m$ bildenden Massen ihre Drehung um UU′ oder OZ **beginnen**, wenn man nur nicht vergißt, das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ im Nenner von ω, über die Gesammt-Masse auszudehnen (so daß man in der Regel zuerst das Trägheits-Moment von M allein, dann von dem andern an M hängenden m allein in Bezug auf die Dreh-Axe berechnen, und dann beide Resultate addiren wird müssen, um das $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ zu haben, wie solches jetzt genommen werden muß).

Anmerk. Wir setzen hier zunächst immer voraus, daß die stoßende Masse m unmittelbar nach dem Stoße mit M eine Gesammtmasse bildet, weil unter dieser Voraussetzung die Richtung der stoßenden Masse m zu gleicher Zeit die Richtung des Stoßes ist. Trifft aber eine stoßende Masse m einen Körper M, ohne mit letzterem sogleich eine Gesammtmasse zu bilden, so ist die Richtung des Stoßes von der Richtung der stoßenden Masse verschieden, und muß allemal erst (nach Anleitung eines spätern Kapitels) gefunden werden.

§. 55.

Stoßen mehrere Massen m_1, m_2, m_3, ꝛc. ꝛc., welche die auf XOY projicirten Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3, ꝛc. ꝛc., haben, gleichzeitig; und ist f_1 die Entfernung des Schwer-Punktes von m_1 von der durch OZ mit v_1 parallel gedachten Ebene; ist eben so f_2 die Entfernung des Schwer-Punktes von m_2 von der durch OZ mit v_2 parallel gedachten Ebene, u. s. w. f.; so findet sich, vermöge derselben Rechnung,

$$6) \qquad \omega = \frac{f_1 m_1 v_1 + f_2 m_2 v_2 + f_3 m_3 v_3 + \cdots}{\Sigma(r^2 \cdot dM)},$$

sobald nur vorausgesetzt wird, daß die Massen m_1, m_2, ꝛc. ꝛc. unmittelbar nach dem Stoße an dem erstern Körper M hängen bleiben und daß das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ auf die Gesammtmasse $M + m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ sich bezieht.

Die Formel (§. 54. Nr. 5.) zeigt nämlich, daß es für die Drehung um diese feste Axe UU′ einerlei ist, welche Richtung die Geschwindigkeit v gegen die Masse M hat, wenn nur f_1 die Entfernung ihres Schwer-Punktes von einer durch OZ mit v parallel gelegten Ebene ist. Daher ist es einerlei, ob man v_1, v_2, v_3, ꝛc. ꝛc. unter sich parallel denkt, oder nicht. Für den erstern Fall folgt aber die Formel (6.) unmittelbar aus (§. 54.).

§. 56.

Allgemeine Behandlung des Problems.

Will man das Problem des (§. 53.) ganz vollständig lösen, so muß man auch noch die Erschütterungen bestimmen, welche im Augenblicke des Beginns der Drehung um die feste Axe OZ, letztere erleidet. Zu dem Ende hätte man besser gethan, gleich vom Anfange an das Problem nach Anleitung des (II. Th. §§. 79. — 82.) zu behandeln, wie wir jetzt thun wollen.

Zuvörderst erleidet U eine unbekannte Erschütterung in unbekannter Richtung, die wir uns nach den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ in drei unbekannte Stöße $-u_1$, $-u_2$ und $-u_3$ zerlegt denken; wir bringen dann drei eben so große Gegen-Stöße an, nämlich u_1, u_2, u_3, und der Punkt U braucht nun (bei der Bestimmung des Gleichgewichts) nicht mehr fest

zu seyn. Ganz analoge gilt für den Punkt U', wenn wir daselbst parallel mit den Axen die drei Gegen-Stöße u'_1, u'_2, u'_3 anbringen, den Erschütteungen $-u'_1$, $-u'_2$, $-u'_3$, welche im Moment der beginnendn Bewegung der Punkt U' zu erleiden hat, genau gleich und atgegen.

Auf der andern Sete kann man alle gleichzeitig wirkenden Kräfte P_1, P_2, P_3, parallel mit sich nach dem Punkte O hin fortrücken und daselbst i eine einzige Kraft P vereinigen, welche mit den Axen OX, OY und OZ die Winkel α, β und γ machen mag; während dann noch eben so viele Gegen-Paare hinzutreten, welche wiederun in **ein** Gegen-Paar vereinigt werden können, dessen Moment durch Q vorgestellt seyn soll, und dessen positive Axen-Seite mit denselben drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die Winkel λ, μ, ν macht. (Vergl. II. Th. §§. 23. — 26.).

Die drei KoordinatenAxen selbst legen wir so, daß OZ mit der festen Dreh-Axe UU' zusammenfällt und O ein beliebiger Punkt dieser festen Dreh-Axe it, so daß die Ebene XOY auf der festen Dreh-Axe selbst, at einer beliebigen Stelle derselben, senkrecht steht. Nehmen wir übrigens noch alles wie im (§. 37.) an, so sind jetzt alle Drei-Kräfte $r\omega \cdot dM$, ferner die Kraft P, das Gegen-Paar Q und die sechs Gegen-Stöße u_1, u_2, u_3, u'_1, u'_2, u'_3 im ganz frei gedachten Körper im Gleichgewicht (nach dem d'Alembert'schen Princip und den allgemeinen Gesetzen der Statik). Dies giebt, wenn c und c' die auf OZ genommenen Ordinaten-Werthe von U und U' sind, und wenn x_0, y_0, z_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes vorstellen, die sechs Gleichungen (vergl. sorgfältig §. 37.)

1) $P \cdot \cos\alpha - \omega \cdot My_0 + u_1 + u'_1 = 0$,

2) $P \cdot \cos\beta + \omega \cdot Mx_0 + u_2 + u'_2 = 0$,

3) $P \cdot \cos\gamma + u_3 + u'_3 = 0$,

4) $Q \cdot \cos\nu - \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = 0$,

5) $Q \cdot \cos\mu + \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) - cu_1 - c'u'_1 = 0$,

6) $Q \cdot \cos\lambda + \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + cu_2 + c'u'_2 = 0$.

Von diesen sechs Gleichungen fällt die vierte genau mit der

Gleichung (§. 53. 1.) zusammen, weil das, was dort durch L bezeichnet ist (nach II. Th. §§. 27. 29. – 34.) genau unser jetziges Produkt $Q \cdot \cos \nu$ vorstellt. Diese Gleichung (4.) giebt also sogleich und unmittelbar die Winkel-Geschwindigkeit ω. — Die Gleichung (3.) giebt die Summe der Erschütterungen welche die Punkte U und U′ längs der Axe OZ auszuhalten haben (im Augenblick des Beginns der Drehung); es bleibt aber unbestimmt, wie viel davon auf jeden derselben kommt, und es müßte eine physikalische Eigenschaft der besonderen Materie, aus welcher der Körper besteht, benutzt werden, in so ferne dieses letztere einer Bestimmung fähig seyn sollte. — Die vier übrigen Gleichungen (1. 2. 5. und 6.) geben dagegen die Erschütterungen $-u_1$, $-u_2$, $-u'_1$ und $-u'_2$, welche die Punkte U und U′ parallel mit den Axen OX und OY (also senkrecht auf OZ) auszuhalten haben.

§. 57.

Besonderer Fall, wo nur eine einzige Kraft wirkt.

Betrachten wir nun zunächst den besondern Fall, wo überhaupt nur eine einzige (Stoß-) Kraft P wirkt und diese noch in einer Ebene, welche auf der festen Dreh-Axe UU′ senkrecht steht. —

A. In diesem besonderen Falle lassen wir die Ebene XOY mit dieser Ebene der Kraft P zusammenfallen, und indem wir nun P parallel mit sich nach dem Punkte O fortrücken, bekommen wir in O dieselbe Kraft P, welche mit den Axen OX und OY dieselben Winkel α und β macht, wie die gegebene; außerdem aber tritt ein Gegen-Paar hinzu, welches in derselben Koordinaten-Ebene XOY liegt, und dessen Moment $Q = P \cdot p$ ist, wenn wir unter p die senkrechte Entfernung der Richtung der gegebenen Kraft P von der Dreh-Axe UU′(OZ), oder von dem Punkte O vorstellen und positiv oder negativ genommen, je nachdem P von OY nach OX hin, oder in der entgegengesetzten Richtung drehen würde. Die sechs Gleichungen des (§. 56.) werden nun so:

$$1)\quad P\cdot\cos\alpha - \omega\cdot My_0 + u_1 + u'_1 = 0,$$
$$2)\quad P\cdot\cos\beta + \omega\cdot Mx_0 + u_2 + u'_2 = 0,$$
$$3)\quad u_3 + u'_3 = 0,$$
$$4)\quad P\cdot p - \omega\cdot\Sigma(r^2\cdot dM) = 0,$$
$$5)\quad \omega\cdot\Sigma(yz\cdot dM) - cu_1 - c'u'_1 = 0,$$
$$6)\quad \omega\cdot\Sigma(xz\cdot dM) + cu_2 + c'u'_2 = 0,$$

wo die Gleichung (3.) zeigt, was auch an sich schon in die Augen fällt, nämlich, daß dasmal eine Erschütterung der Axe OZ oder UU' längs ihrer Richtung gar nicht erfolgt. Bestimmen wir nun die Erschütterungen $-u_1$, $-u_2$, $-u'_1$ und $-u'_2$. Rücken wir die Erschütterungen $-u_1$ und $-u'_1$ parallel mit sich nach O fort, und vereinigen wir so die beiden mit einander parallelen Erschütterungen $-u_1$ an U, und $-u'_1$ an U' (nach II. Th. §§. 23. 26.) in eine durch O gehende und mit OX zusammenfallende Erschütterung

$$7)\quad X = -u_1 - u'_1,$$

und in das zugehörige, in der Ebene XOZ liegende Gegen-Paar von Erschütterungen, dessen Moment

$$8)\quad m' = cu_1 + c'u'_1$$

ist, wo wir die positive Richtung des Gegen-Paares in der Koordinaten-Ebene XOZ, von OX nach OZ hin vorausgesetzt haben. (Vergl. II. Th. §. 17.).

Vereinigen wir die andern beiden mit einander parallelen Erschütterungen $-u_2$ an U, und $-u'_2$ an U', ebenfalls in eine durch O gehende und mit OY zusammenfallende Erschütterung

$$9)\quad Y = -u_2 - u'_2,$$

und in das zugehörige, in der Ebene YOZ liegende Gegen-Paar von Erschütterungen, dessen Moment

$$10)\quad m'' = -cu_2 - c'u'_2$$

ist, wenn man die positive Richtung dieses Gegen-Paares von OY nach OZ hin voraussetzt.

Nun hat man (aus 1. 2. 5. und 6.) zur Bestimmung dieser Werthe X, Y, m', m'' die vier Gleichungen

$$11) \quad \begin{cases} X = P \cdot \cos\alpha - \omega \cdot My_0, \\ Y = P \cdot \cos\beta + \omega \cdot Mx_0, \\ m' = \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM), \\ m'' = \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM), \end{cases}$$

während in allen diesen Gleichungen statt ω ihr (aus 4. gezogener) Werth

$$\omega = \frac{P \cdot p}{\Sigma(r^2 \cdot dM)}$$

gesetzt werden muß.

Vereinigen wir ferner die beiden Erschütterungen X und Y an O in eine einzige Versammlungs-Kraft S, welche mit den Axen OX und OY die Winkel α_0 und β_0 macht, so hat man zu der Bestimmung der Größe und Lage von S die beiden Gleichungen

$$12) \quad \begin{cases} S \cdot \cos\alpha_0 = X = P \cdot \cos\alpha - \omega \cdot My_0, \\ S \cdot \cos\beta_0 = Y = P \cdot \cos\beta + \omega \cdot Mx_0. \end{cases}$$

Vereinigen wir die beiden Gegen-Paare von Erschütterungen in den Ebenen XOZ und YOZ, deren Momente m' und m'' sind, in ein einziges, welches mit seiner Ebene durch OZ geht, dessen Axe also in der Ebene XOY liegt, so sind die Winkel μ_0 und ν_0, welche die positive Richtung der Momenten-Axe mit den beiden Koordinaten-Axen OX und OY macht, so wie das Moment m_0 dieses einzigen Gegen-Paares, gegeben durch die Gleichungen

$$13) \quad \begin{cases} m_0 \cdot \cos\mu_0 = m'' = \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM), \\ m_0 \cdot \cos\nu_0 = m' = \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM); \end{cases}$$

(nach II. Th. §. 18.).

B. Existirt nun die Versammlungs-Kraft S in O, und noch das zugehörige Gegen-Paar m_0 wirklich; d. h. findet sich weder $S=0$ noch $m_0=0$, so sind folgende zwei Fälle möglich:

a) Entweder die Kraft S fällt mit ihrer Richtung nicht mit der Ebene des Gegen-Paares m_0 zusammen, und dann läßt sich nichts weiter machen. — Höchstens kann man in diesem Falle die beiden Erschütterungen $-u_1$ und $-u_2$ an U, in eine einzige R vereinigen, welche an U senkrecht auf OZ wirkt, —

während auch an U' die beiden Erschütterungen $-u'_1$ und $-u'_2$ in eine einzige Erschütterung R' vereinigt werden können, die ebenfalls auf OZ senkrecht, aber nicht mit R in einer und derselben Ebene wirkt.

b) Oder es fällt die Richtung der Erschütterung S mit der Ebene des Gegen-Paares m_0 zusammen. Dieß ist allemal, aber auch nur dann der Fall, wenn

$$\cos\alpha_0 \cdot \cos\mu_0 + \cos\beta_0 \cdot \cos\nu_0 = 0,$$

d. h. wenn

$$(\odot) \cdots \left\{ \begin{array}{c} (P\cdot\cos\alpha - \omega\cdot My_0)\cdot\Sigma(xz\cdot dM) \\ +(P\cdot\cos\beta + \omega\cdot Mx_0)\cdot\Sigma(yz\cdot dM) \end{array} \right\} = 0,$$

oder, im Falle statt ω sein Werth gesetzt wird, wenn

$$(☾) \cdots \left\{ \begin{array}{c} [\cos\alpha\cdot\Sigma(r^2\cdot dM) - pMy_0]\cdot\Sigma(xz\cdot dM) \\ +[\cos\beta\cdot\Sigma(r^2\cdot dM) + pMx_0]\cdot\Sigma(yz\cdot dM) \end{array} \right\} = 0$$

ist. — In diesem Falle vereinigt sich S mit m_0 in eine einzige Erschütterung, welche der Größe nach dieselbe S ist, mit der Richtung der Versammlungs-Kraft S in O parallel läuft, also mit den Axen OX und OY noch dieselben (in 12. bestimmten) Winkel α_0 und β_0 bildet, welche aber einen andern Punkt O' der Dreh-Axe angreift, dessen Entfernung c_0 von O, aus der Gleichung

$$c_0 = \frac{m_0}{S},$$

gefunden wird (nach II. Th. §. 29. G.). Weil aber in demselben Falle diese einzige Kraft S an O' sogleich wieder in die beiden Kräfte $S\cdot\cos\alpha_0$ und $S\cdot\cos\beta_0$ zerfällt, die ebenfalls an O' wirken, aber bezüglich in den Ebenen XOZ und YOZ liegen, so ist $S\cdot\cos\alpha_0$ an O' die einzige Kraft, in welche sich diesmal auch die Kraft X an O und das dazu gehörige Gegen-Paar m' in XOZ vereinigen lassen; — während noch $S\cdot\cos\beta_0$ an O' die einzige Kraft ist, in welche Y in O und das zugehörige Gegen-Paar m'' in YOZ vereinigt werden können. Daher ist (nach demselben §. 29. G. II. Th.) auch noch, wenn c_0 den (positiven oder negativen) Ordinaten-Werth von O' vorstellt,

$$c_0 = \frac{-m'}{X} = \frac{-m'}{S \cdot \cos \alpha_0} = \frac{-\omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM)}{P \cdot \cos \alpha - \omega \cdot My},$$

so wie auch

$$c_0 = \frac{m''}{Y} = \frac{m''}{S \cdot \cos \beta_0} = \frac{\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM)}{P \cdot \cos \beta + \omega \cdot Mx_0}.$$

Vergleicht man diese beiden letztern Werthe von c_0 mit einander, so erhält man wieder die Bedingungs-Gleichung (☉) oder (☾).

C. Ist $m_0 = 0$, also $m' = m'' = 0$, d. h. ist $\Sigma(xz \cdot dM) = 0$ und zugleich $\Sigma(yz \cdot dM) = 0$; d. h. ist die Dreh-Axe OZ oder UU' eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe; ist aber nicht zu gleicher Zeit $S = 0$, — so tritt derselbe Fall ein, wie in (B. b.), d. h. es existirt wiederum nur die einzige Erschütterung S, welche aber dasmal durch den Punkt O selbst hindurchgeht, für welchen OZ eine Haupt-Dreh-Axe ist *).

D. Ist $S = 0$, d. h. $X = Y = 0$, nämlich

$$(♂_1) \cdots \begin{cases} P \cdot \cos \alpha - \omega \cdot My_0 = 0, \\ \text{und } P \cdot \cos \beta + \omega \cdot Mx_0 = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man statt ω seinen Werth substituirt, ist

$$(♂_2) \cdots \begin{cases} \cos \alpha \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) - pMy_0 = 0, \\ \text{und } \cos \beta \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) + pMx_0 = 0, \end{cases}$$

so ist allemal und auch nur dann das Gegen-Paar von Erschütterungen allein vorhanden, dessen Ebene und Moment m_0 aus den Gleichungen (A. 13.) ihre Bestimmung erhalten. Die Stöße $-u_1$ und $-u'_1$ bilden dann selbst ein Gegen-Paar, dessen Moment $m' = \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$ (in A. 11.) bereits gefunden worden ist; — während in demselben Falle auch die beiden Stöße $-u_2$ und $-u'_2$ ein bloßes Gegen-Paar bilden, dessen Moment $m'' = \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM)$ ist.

Diese beiden Bedingungs-Gleichungen ($♂_1$) oder ($♂_2$) lassen sich aber durch je zwei andere ersetzen, die aus einem dieser

---

*) Ist in (B. b.) bloß der Punkt O', oder in (C.) bloß der Punkt O absolut fest, so beginnt die Drehung um OZ eben so, wie wenn die ganze Dreh-Axe fest wäre.

Paare (♂₁ oder ♂₂) abgeleitet werden können. Bringt man daher die Glieder pMy_0 und pMx_0 auf die andere Seite, und — dividirt man zuerst die entstehenden Gleichungen durch einander, — quadrirt und addirt man aber auch dieselben Gleichungen, — so erhält man

$$(♂_3)\ldots\begin{cases} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{y_0}{x_0}=0, \text{ oder } 1+\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=0, \\ \text{und} \\ \Sigma(r^2\cdot dM)=\pm pMr_0, \text{ oder } P=\pm\omega\cdot Mr_0, \end{cases}$$

wenn $r_0=+\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ gesetzt wird, so daß r_0 die Entfernung des Schwer-Punkts von der Dreh-Axe bedeutet und wo die obern (+ oder —) Zeichen gelten, wenn p positiv, die untern dagegen, wenn p negativ in Rechnung gebracht worden ist, weil der Ausdruck rechts (wie der zur Linken) in diesen letztern Gleichungen immer positiv seyn muß. — Die erstere dieser Gleichungen (♂₃) zeigt, daß jetzt die Richtung des Stoßes P senkrecht steht auf der Ebene, welche die Dreh-Axe OZ mit dem Schwer-Punkte verbindet*), während die andere der Gleichungen (♂₃) die Größe der Entfernung ±p (der Richtung des Stoßes von der Dreh-Axe) angiebt; — auch in ihrer zweiten Form zeigt, daß der Stoß P gleich ist der „Größe der Bewegung" des Schwer-Punktes, wenn in selbigem die ganze Masse M concentrirt gedacht wird.

Sind also diese beiden Bedingungen allein erfüllt, so bilden die Erschütterungen an U und U' (im Augenblicke des Stoßes P) ein bloßes Gegen-Paar, dessen Ebene und Moment (in A 13.) berechnet sind.

E) Endlich kann sich $m_0=0$ und gleichzeitig $S=0$ seyn. Dann allemal, und auch nur dann, erleidet die Dreh-

*) Man sieht dieß noch leichter ein, wenn man die Ebene XOZ durch den Schwer-Punkt gehen läßt, so daß $y_0=0$ und $x_0=r_0$ wird. Die erstere der Gleichungen (♂₃) giebt dann $\cos\alpha=0$, d. h. $\alpha=90°$, also P senkrecht auf die durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe gehende Ebene.

Axe (im Augenblicke des Stoßes P) gar keine Erschütterung, und ist daher eine **freiwillige** (axe spontané de rotation). Diese Erscheinung tritt also allemal ein, so oft die in (C. und D.) gemachten Bedingungen zu gleicher Zeit erfüllt sind.

Ist also OZ eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe des Körpers, und denkt man sich in O senkrecht auf diese Haupt-Dreh-Axe eine Ebene, so liegen in dieser Ebene die beiden andern, zu demselben Punkte O gehörigen Haupt-Dreh-Axen. Wird dann in dieser Ebene ein Stoß P geführt senkrecht auf die Ebene, welche den Schwer-Punkt mit OZ verbindet, von der Axe OZ um

$$\pm p = \frac{\Sigma(r^2 \cdot dI)}{Mr_0}$$

entfernt, wo r_0 die Entfernung des Schwer-Punktes von der Dreh-Axe vorstellt, — so erleidet die Dreh-Axe gar keine Erschütterung (im Augenblicke des Stoß) und der Körper **beginnt** daher die Umdrehung um die Haupt-Dreh-Axe OZ freiwillig, und ohne daß dieselbe irgendwie fest zu seyn braucht.

In diesem Falle wird der von OZ um $\pm p$ entfernte Punkt, wo der Stoß P der, den Schwer-Punkt mit OZ verbindenden Ebene begegnet, der **Mittel-Punkt** des **Stoßes** genannt.

F. Setzt man in allen diesen Rechnungen voraus, daß OX und OY so gelegt sind, daß die beginnende Drehung (mit der Winkel-Geschwindigkeit ω) von OY nach OX hin wirklich erfolgt, so sind vermöge der Annahmen ω und p immer positiv, und von dem Doppel-Zeichen in $\pm\omega$ oder $\pm p$ ist dann allemal bloß $+\omega$ oder $+p$ zu nehmen. Vertauschte man aber dann die Koordinaten-Axen OX und OY mit einander, so würde p negativ genommen werden müssen, und dann würde auch ω einen negativen Werth annehmen, in so ferne (aus A. 4.)

$$\omega = \frac{P \cdot p}{\Sigma(r^2 \cdot dI)}$$

gefunden wird, und dieser **negative** Werth von ω müßte dann überall statt ω gesetzt werden.

§. 58.

§. 58.

Wenn in diesem besondern Falle die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt geht.

Wir haben in dem vorstehenden (§. 57. B.—F.) stillschweigend vorausgesetzt, daß die Dreh-Axe nicht durch den Schwer-Punkt gehe, daß also nicht zu gleicher Zeit $x_0 = y_0 = 0$ sey. Betrachten wir nun den Fall, wo die Dreh-Axe OZ durch den Schwer-Punkt geht, d. h. wo $x_0 = y_0 = 0$ ist, besonders, und sehen wir zu, wie sich in diesem Falle die Erschütterungen $-u_1$ und $-u_2$ an U, desgleichen $-u'_1$ und $-u'_2$ an U' (im Augenblicke des Stoßes P) gestalten werden.

1) Die Gleichungen (§. 57. A. 11. 12.) lassen sehen, daß die Erschütterung S der Dreh-Axe in O nun mit dem Stoße P selbst parallel läuft und letzterem gleich ist; während das zugehörige Gegen-Paar m_0 von Erschütterungen immer noch von den Momenten-Summen $\Sigma(xz \cdot dM)$ und $\Sigma(yz \cdot dM)$ allein und gerade so abhängt, wie wenn die Dreh-Axe nicht durch den Schwer-Punkt ginge.

2) In dem Falle (§. 57. B. b.), wo alle Erschütterungen der Dreh-Axe sich in eine einzige vereinigen lassen, wird jetzt diese einzige Erschütterung S wiederum mit P parallel und dem P gleich; dagegen bestimmt sich der auf OZ genommene (positive oder negative) Ordinaten-Werth c_0 des Angriffs-Punktes O' dieser einzigen Erschütterung $S(=P)$ aus der etwas einfachern Gleichung

$$c_0 = -\frac{\omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM)}{P \cdot \cos\alpha} = -\frac{p \cdot \Sigma(yz \cdot dM)}{\cos\alpha \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)},$$

oder

$$c_0 = \frac{\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM)}{P \cdot \cos\beta} = \frac{p \cdot \Sigma(xz \cdot dM)}{\cos\beta \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)}.$$

Die Bedingungs-Gleichung (⊙. oder ☾.) aber, welche erfüllt seyn muß, damit dieser Fall (B. b.) eintritt, wird jetzt ebenfalls etwas einfacher, nämlich bloß

(⊙☾) ⋯ $\cos\alpha \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + \cos\beta \cdot \Sigma(yz \cdot dM) = 0;$

und diese Gleichung läßt sich durch die Richtung des Stoßes P ganz allein erfüllen, während die Entfernung p dieser Richtung von der Dreh-Axe dabei ganz unberührt bleibt *).

3) Der Fall (§. 57. C.) unter der jetzigen Voraussetzung (daß die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt geht) angesehen, bietet nichts besonderes. Er ist derselbe so eben (in 2.) betrachtete, nur daß O' jetzt in O selbst fällt. Man sieht bloß, daß wenn die Dreh-Axe eine zu dem Schwer-Punkte und daher (nach §. 51. I.) auch eine zu jedem andern O ihrer Punkte gehörige Haupt-Dreh-Axe ist, — dann derjenige Punkt O dieser Haupt-Dreh-Axe, welcher von der durch P auf diese Dreh-Axe senkrecht gelegten Ebene getroffen wird, eine Erschütterung S (gleich und parallel mit P) erleidet, und daß diese Erschütterung die einzige ist **).

4) Der Fall (§. 57. D.), daß nämlich die Gesammt-Erschütterung der Dreh-Axe (im Augenblicke des Stoßes P) bloß aus einem Gegen-Paare bestehe, kann jetzt, wo wir uns die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt gehend denken, gar nicht eintreten, weil die Bedingungs-Gleichungen zu P = 0 führen würden.

5) Eben so wenig kann aber, wenn die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt geht, der Fall (§. 57. E.) eintreten, d. h. der Fall, daß eine einzige Kraft P in einer auf OZ senkrechten Ebene wirkend, um OZ eine beginnende Drehung hervorbringen könnte, ohne die Dreh-Axe in demselben Augenblicke zu erschüttern. Eine solche einzige Kraft P kann daher nie eine freiwillig beginnende Drehung um eine Axe hervorbringen, welche durch den Schwer-Punkt des Körpers gedacht worden ist.

Anmerk. Am Schlusse dieser (§§. 57. 58.) muß noch ein-

---

*) Diese Bedingungs-Gleichung (⊙ ☾) drückt (nach §. 49. Nr. 3) aus, daß die Summe der statischen Momente aller Dreh-Kräfte rω·dM in Bezug auf die durch O mit der Richtung der Kraft P parallel gelegte Momenten-Axe OX' der Null gleich ist.

**) Ist daher (in 2.) bloß der Punkt O', oder (in 3.) bloß der Punkt O, absolut fest, so beginnt die Drehung um OZ gerade so, wie wenn die ganze Dreh-Axe absolut fest wäre.

mal hervorgehoben werden, daß wenn der Stoß P von einer Masse m herrührt, deren Punkte alle im Augenblicke des Stoßes einerlei Geschwindigkeit v in parallelen Richtungen haben, welche mit den Axen OX und OY bezüglich die Winkel α und β machen, dann allemal und überall mv statt P gesetzt werden muß, sobald noch vorausgesetzt wird, daß m an M haften bleibt. Die Entfernung p bezieht sich dann auf die Richtung des Schwer-Punktes von m im Augenblicke des Stoßes (vgl. §. 6.). Dann aber muß noch vorausgesetzt werden: 1) daß der Stoß wirklich an einem Punkte erfolgt, der in der Richtung dieser durch den Schwer-Punkt von m gedachten Kraft mv liegt; 2) daß die stoßende Masse m an der gestoßenen M hängen bleibt; und 3) daß in allen vorstehenden Formeln statt M die Gesammtmasse M+m, welche in Bewegung gesetzt ist, substituirt wird, und daß auch die Summen $\Sigma(xz \cdot dM)$, $\Sigma(yz \cdot dM)$ und $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ überall über die Gesammtmasse M+m sich erstrekkend gedacht werden.

§. 59.

Die Erschütterungen der Dreh-Axe im allgemeinen Falle.

In dem allgemeinen Falle (des §. 56.), wo beliebig viele gleichzeitige Kräfte P_1, P_2, ꝛc. wirken, die jedoch alle in eine einzige Kraft P vereinigt sind, welche durch den beliebig gewählten Ursprung O der Axen hindurch geht, und das zugehörige Gegen-Paar, dessen Moment Q ist, — haben wir die Summe der Erschütterungen — $(u_3 + u'_3)$, welche die beiden Punkte U und U′ längs der Axe UU′ selbst auszuhalten haben $= P \cdot \cos\gamma$ (aus der Gleichung §. 56. Nr. 3.) bereits gefunden. Wir wollen jetzt für denselben allgemeinen Fall aus den Gleichungen (§. 56. NNr. 1. 2. 5. und 6.) abermals die auf die Dreh-Axe senkrechten Erschütterungen $-u_1$, $-u_2$, $-u'_1$ und $-u'_2$ näher betrachten, und zwar genau nach dem Vorbilde der (§§. 57. 58.).

A. Wir vereinigen $-u_1$ und $-u'_1$ in die einzige Erschütterung X, welche mit OX zusammenfällt, und in das zuge-

hörige Gegen-Paar von Erschütterungen, welches das Moment m' hat. — Wir vereinigen eben so die Erschütterungen $-u_2$ und $-u'_2$ in die einzige Y, welche mit OY zusammenfällt und in das zugehörige Gegen-Paar, welches das Moment m'' hat. Wir finden dasmal wiederum

$$1)\quad \begin{cases} X = P\cdot\cos\alpha - \omega\cdot My_0, \\ Y = P\cdot\cos\beta + \omega\cdot Mx_0; \\ \text{dagegen} \\ m' = \omega\cdot\Sigma(yz\cdot dM) + Q\cdot\cos\mu, \\ m'' = \omega\cdot\Sigma(xz\cdot dM) + Q\cdot\cos\lambda, \end{cases}$$

indem für die in den Koordinaten-Ebenen XOZ, YOZ liegenden Gegen-Paare, die Richtungen von OX nach OZ, und von OZ nach OY hin, als die positiven gedacht sind, so daß m' und m'' positive auch negative Werthe annehmen können.

Wir bilden wieder die Versammlungs-Erschütterung S, aus X und Y, nämlich

$$2)\quad S\cdot\cos\alpha_0 = X \quad \text{und} \quad S\cdot\cos\beta_0 = Y,$$

welche den Punkt O angreift, senkrecht auf OZ, und welche mit den Axen OX und OY die Winkel α_0 und β_0 macht.

Wir vereinigen eben so die Gegen-Paare m' und m'' in ein einziges m_0 mittelst der Gleichungen

$$3)\quad m_0\cdot\cos\mu_0 = m'' \quad \text{und} \quad m_0\cdot\cos\nu_0 = m',$$

wo μ_0 und ν_0 die Winkel sind, welche die in XOY liegende Axe des zu S in O gehörigen Gegen-Paares von Erschütterungen mit OX und OY macht, während m_0 das Moment dieses zugehörigen Gegen-Paares vorstellt.

B. Wir unterscheiden wieder:

a) Wenn S in O, nicht in die durch O gedachte Ebene des Gegen-Paares m_0 fällt, wo dann die mit der Ebene XOY parallelen Erschütterungen der Dreh-Axe (im Augenblicke der Stöße) auf zwei nicht in einer und derselben Ebene liegende Erschütterungen sich zurückführen lassen.

b) Wenn

$$cos\,\alpha_0 \cdot cos\,\mu_0 + cos\,\beta_0 \cdot cos\,\nu_0 = 0,$$

oder

$$X \cdot m'' + Y \cdot m' = 0$$

ist, d. h. wenn die Richtung der (Versammlungs-) Kraft S in O mit der Ebene des Gegen-Paares zusammenfällt. Dann lassen sich alle Erschütterungen auf eine einzige zurückführen, welche wiederum = S und wiederum senkrecht auf OZ wirkt, welche aber einen Punkt O' angreift, dessen Koordinaten-Werth

$$c_0 = \frac{-m'}{X} = \frac{m''}{Y}$$

ist.

C. Verschwindet das Gegen-Paar m_0, so wird $c_0 = 0$ und der Punkt O' fällt nun wiederum mit O zusammen, genau wie in (C. des §. 57.), während dieser Fall von dem vorhergehenden (B. b.) nicht weiter verschieden ist.

D. Es kann wiederum S = 0 werden. Dies ist der Fall, wenn wiederum X = Y = 0, d. h. wenn wiederum

$$(\male_1)\cdots \begin{cases} P \cdot cos\,\alpha - \omega \cdot My_0 = 0, \\ \text{und}\quad P \cdot cos\,\beta + \omega \cdot Mx_0 = 0, \end{cases}$$

d. h. dasmal, wenn

$$(\male_2)\cdots \begin{cases} \frac{cos\,\alpha}{cos\,\beta} + \frac{y_0}{x_0} = 0, \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{cos\,\beta}{cos\,\alpha} = 0 \\ \text{und} \\ P \cdot sin\,\gamma = \pm \omega \cdot Mr_0 \end{cases}$$

ist, in so ferne die beiden Gleichungen ($\male_2$) aus denen ($\male_1$) abgeleitet werden können und daher diese letzteren ersetzen.

Die erste dieser Gleichungen zeigt an, daß der auf die Ebene XOY projicirte Stoß P, welcher der Größe nach = $P \cdot sin\,\gamma$ ist, der Lage nach auf die durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe bestimmte Ebene senkrecht gerichtet seyn müsse; oder mit andern Worten: daß die durch die Richtung von P und die Dreh-Axe bestimmte Ebene, auf der durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe gegebenen Ebene senkrecht stehe.

Die andere dieser Gleichungen sagt uns, daß dieselbe Projektion $P \cdot sin\,\gamma$ gleich ist der „Größe der Bewegung" des Schwer-

Punkts, im Falle man sich die ganze Masse M in ihm concentrirt denkt.

Sind also diese beiden Bedingungen erfüllt, so bilden die parallel mit der Ebene XOY wirkenden Erschütterungen der Dreh-Axe ein bloßes Gegen-Paar m_0. Dazu ist natürlich immer noch vorhanden die Erschütterung der Dreh-Axe längs ihrer eigenen Richtung, welche $= P \cdot \cos\gamma$ ist.

E. Sind aber außer diesen beiden Bedingungen auch noch die beiden Bedingungen $m' = m'' = 0$ erfüllt, so erleidet die Dreh-Axe gar keine Erschütterung senkrecht auf dieselbe, sondern bloß die Summe der Erschütterungen $P \cdot \cos\gamma$ längs ihrer eigenen Richtung (versteht sich, immer im ersten Augenblicke des Stoßes). Man kann in diesem Falle die Dreh-Axe eine gleitende freiwillige Dreh-Axe (axe spontané glissant de rotation) nennen.

F. Wegen des positiven oder negativen Werthes von ω gelten dieselben Betrachtungen hier, wie in (F. des §. 57.).

§. 59. a.

Man betrachte nun wiederum (wie im §. 58.) dieselben Erschütterungen (des §. 59.) unter der Voraussetzung, daß die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt geht, daß also $x_0 = y_0 = 0$ ist. Man findet dann hier ebenfalls für den allgemeinen Fall wieder ganz analoge Resultate, wie (im §. 58.) für den besondern Fall, wo nur eine Kraft wirkte, die jedoch interessant genug werden, nämlich:

1) Die Erschütterung S in O fällt jetzt mit der Projektion $P \cdot \sin\gamma$ des Stoßes P zusammen und ist ihr gleich. Da nun $P \cdot \cos\gamma$ (nach §. 56. Nr. 3.) die Erschütterung ist, welche die Axe OZ in ihrer Längen-Richtung erleidet, so ist die Gesammt-Erschütterung des Punktes O dasmal eine mit P zusammenfallende und gleiche Kraft. — Außerdem wirkt noch das Gegen-Paar m_0 von Erschütterungen (im Augenblicke der gleichzeitigen Stöße, d. h. des Beginns der Bewegung).

2) In dem Falle (§. 59. B. b.), wo alle Erschütterungen

der Dreh-Axe sich in eine einzige vereinigen lassen, die durch O' geht, wird O' etwas einfacher bestimmt, als wenn die Dreh-Axe nicht durch den Schwer-Punkt geht. Diese einzige Erschütterung parallel mit der Ebene XOY ist gleich und parallel mit $P \cdot sin\gamma$, und die Gesammt-Erschütterung des Punktes O' der Dreh-Axe ist daher dem P gleich und parallel.

3) Der Fall (§. 59. C.), wo $m' = 0$, $m'' = 0$, also $m_0 = 0$ wird, bietet nichts Neues. — Er ist der so eben (in 2.) erwähnte; nur daß jetzt O' mit O zusammenfällt.

4) Die Bedingungen des Falles (§. 59. D.), wo außer der Erschütterung $P \cdot cos\gamma$ in der Längen-Richtung der Dreh-Axe nur noch ein Gegen-Paar von Erschütterungen statt hat, reduciren sich dasmal auf

$$P \cdot cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad P \cdot cos\beta = 0;$$

also, wenn P nicht Null ist, auf

$$cos\alpha = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = 90^\circ;$$
$$cos\beta = 0, \quad \text{also} \quad \beta = 90^\circ;$$

woraus $\gamma = 0$ oder $= 180^\circ$ hervorgeht. Diese Bedingung ist also erfüllt, wenn der Stoß P in der Richtung der Dreh-Axe wirkt. —

5) Ist außerdem (daß P in der Richtung der Dreh-Axe wirkt) auch noch $m_0 = 0$, also $m' = 0$ und $m'' = 0$, so erleidet die Dreh-Axe bloß die Erschütterung P längs ihrer eigenen Richtung und sonst keine weiter; umgekehrt tritt dieses letztere Ereigniß nie ein, wenn nicht der Stoß P in der Richtung der Dreh-Axe geführt wird.

Diese Nummern (1. — 5.) gelten also für den Fall, daß die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt geht, während vorausgesetzt war, daß beliebig viele gleichzeitig wirkende Kräfte P^1, P_2, rc. rc. die Bewegung verursachen, welche aber in eine durch O gehende Versammlungs-Kraft P und in ein zugehöriges Gegen-Paar Q von Kräften vereint gedacht sind.

§. 60.

Will man bloß die Wirkung des stoßenden Gegen-Paares

Q allein beurtheilen, so muß man in den vorstehenden (§§. 59. 59. a.) $P = 0$ setzen.

A. Die sechs Gleichungen der Bewegung gehen dann über in

1) $-\omega \cdot My_0 + u_1 + u'_1 = 0,$
2) $\omega \cdot Mx_0 + u_2 + u'_2 = 0,$
3) $u_3 + u'_3 = 0,$
4) $Q \cdot \cos\nu - \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = 0,$
5) $Q \cdot \cos\mu + \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) - c \cdot u_1 - c' u'_1 = 0,$
6) $Q \cdot \cos\lambda + \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + cu_2 + c' \cdot u'_2 = 0.$

Dasmal findet also längs der Dreh-Axe gar keine Erschütterung statt, wie die (3.) zeigt. — Die (4.) giebt die Winkel-Geschwindigkeit, wie wir sie bereits (im §. 53. Anmerk.) für diesen Fall gefunden haben. Die (1. 2. 5. und 6.) bestimmen die Erschütterungen der Dreh-Axe, welche im Augenblikke des Stoßes des Gegen-Paares senkrecht auf diese Axe erfolgen.

Wir finden aber (aus §. 59.) für $P = 0$,

7) $$\begin{cases} X = -\omega \cdot My_0, \\ Y = +\omega \cdot Mx_0, \\ \text{und} \\ m' = +\omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) + Q \cdot \cos\mu, \\ m'' = +\omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + Q \cdot \cos\lambda. \end{cases}$$

Aus X und Y an O, setzt sich wieder S zusammen mittelst der Gleichungen

8) $S \cdot \cos\alpha_0 = -\omega \cdot My_0$ und $S \cdot \cos\beta_0 = \omega \cdot Mx_0,$

so daß

9) $$\begin{cases} S = \omega \cdot Mr_0 = \dfrac{Mr_0 \cdot Q \cdot \cos\nu}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} \\ \text{und} \\ \dfrac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0} + \dfrac{y_0}{x_0} = 0, \text{ oder } 1 + \dfrac{y_0}{x_0} \cdot \dfrac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0} = 0 \end{cases}$$

wird. Diese Erschütterung S steht also immer senkrecht auf der durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe bestimmten Ebene.

Außer dieser, den Punkt O erfassenden auf OZ senkrechten Erschütterung S, findet nun noch ein Gegen-Paar von Erschüt-

terungen statt, dessen Moment, Ebene und Richtung (nach §. 59. Nr. 3.) aus den Gleichungen

10) $\quad m_0 \cdot \cos\mu_0 = m'' \quad$ und $\quad m_0 \cdot \cos\nu_0 = m'$

sich bestimmt.

B. Liegt nun S mit m_0 in einer und derselben Ebene, d. h. ist

$$X \cdot m'' + Y \cdot m' = 0,$$

oder

$$y_0 \cdot m'' = x_0 \cdot m',$$

oder

$$(\odot) \cdots \quad \frac{y_0}{x_0} = \frac{\cos\mu \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) + \cos\nu \cdot \Sigma(yz \cdot dM)}{\cos\lambda \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) + \cos\nu \cdot \Sigma(xz \cdot dM)},$$

so vereinigen sich alle Erschütterungen der Dreh-Axe (im Augenblikke des Beginns der Drehung) in eine einzige, welche den Punkt O′ angreift, der von O um

$$c_0 = \frac{m_0}{S}$$

entfernt, oder dessen Koordinaten-Werth

$$c_0 = \frac{-m'}{X} = \frac{m''}{Y}$$

ist.

Ist zu gleicher Zeit die Dreh-Axe eine Haupt-Dreh-Axe, die zu dem Punkte O gehört, so vereinfacht sich diese Bedingung ($\odot$) und sie geht dann über in

$$(☾) \cdots \quad \frac{y_0}{x_0} = \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}.$$

Diese letztere Gleichung sagt aber, daß die Ebene des Gegen-Paares Q auf der durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe gelegten Ebene senkrecht steht. — Ist also diese Bedingung (☾) erfüllt, und ist die Dreh-Axe eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe, so vereinigen sich alle Erschütterungen in eine einzige durch den Punkt O′ gehende und auf der Dreh-Axe senkrechte Erschütterung. Und der Abstand c_0 des Punktes O′ von O ist jetzt

$$c_0 = \frac{\cos\mu \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)}{\cos\nu \cdot My_0} = \frac{\cos\lambda \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)}{\cos\nu \cdot Mx_0}.$$

C. Verschwindet das Gegen-Paar m_0 gänzlich, so fällt der Punkt O′ des vorigen Falles mit dem Punkte O zusammen, und außerdem ist der jetzige Fall von dem vorigen (B.) nicht verschieden *).

Die Bedingungen aber, unter denen der jetzige Fall eintritt, lassen sich (da sie in $m' = 0$ und $m'' = 0$ ausgesprochen sind) so schreiben:

$$(\male)\cdots \begin{cases} \cos\mu\cdot\Sigma(r^2\cdot dM)+\cos\nu\cdot\Sigma(yz\cdot dM) = 0 \\ \text{und } \cos\lambda\cdot\Sigma(r^2\cdot dM)+\cos\nu\cdot\Sigma(xz\cdot dM) = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Bedingungs-Gleichungen aber, in Verbindung mit $\cos\lambda^2+\cos\mu^2+\cos\nu^2 = 1$, geben die Lage der Ebene des stoßenden Gegen-Paares. Man setze nämlich

$$\omega\cdot\Sigma(xz\cdot dM) = m_1, \quad \omega\cdot\Sigma(yz\cdot dM) = m_2,$$
$$\text{und} \quad \omega\cdot\Sigma(r^2\cdot dM) = m_3,$$

so daß m_1, m_2 und m_3 die Summen der statischen Momente sind aller Dreh-Kräfte $r\omega\cdot dM$ in Bezug auf die Momenten-Axen OX, OY und OZ (vgl. §. 37); dann findet man aus vorstehenden Bedingungs-Gleichungen sogleich:

$$(\mercury)\cdots \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{m_1}{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}; \\ \cos\mu = \dfrac{m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}; \\ \cos\nu = \dfrac{m_3}{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}. \end{cases}$$

Diese 3 Gleichungen drücken aber aus, daß die Ebene des stoßenden Gegen-Paares Q mit der Ebene der größten statischen Momenten-Summe aller Dreh-Kräfte $r\omega\cdot dM$ (welche nach §. 34. d. II. Th. die Haupt-Ebene dieser Dreh-Kräfte genannt werden muß) zusammenfällt, sobald beide durch den Punkt O gelegt werden, und für letztere der Punkt O zum Centrum der Momente genommen wird.

*) Ist daher in (B.) bloß der Punkt O′ oder in (C.) bloß der Punkt O absolut fest, so beginnt die Drehung (im Augenblicke des Stoßes) gerade so, wie wenn die ganze Axe OZ fest wäre.

Man wird aber dabei nicht übersehen, daß in den Gleichungen (♉) zur Rechten die Winkel-Geschwindigkeit ω sich wegdividirt, so daß also die Lage dieser Ebene der größten Momenten-Summe, nicht von der Größe des stoßenden Gegen-Paares abhängt, d. h. nicht von der Größe der Winkel-Geschwindigkeit, welche letztere erzeugt.

Weil aber aus (A. 4.)

$$Q \cdot \cos\nu = \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = m_3$$

ist, so folgt aus diesem Werthe von $\cos\nu$ noch

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = Q;$$

d. h. das Moment Q des stoßenden Gegen-Paares ist, wenn der gegenwärtige Fall eintritt, allemal der größten Summe der statischen Momente (der Projektionen) aller Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ gleich.

Ist die Dreh-Are eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Are, so sind die beiden Bedingungen (♂) allemal erfüllt, sobald

$$\cos\mu = 0 \quad \text{und} \quad \cos\lambda = 0$$

ist; d. h. wenn die Ebene des Gegen-Paares auf dieser Haupt-Dreh-Are senkrecht steht. — In diesem Falle erleidet also der einzige Punkt O der Dreh-Are, für welchen sie Haupt-Dreh-Are ist, eine Erschütterung senkrecht auf die durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Are gelegte Ebene, und diese Erschütterung ist der Größe nach

$$= \omega \cdot M \cdot r_0 = \frac{Q \cdot M \cdot r_0}{\Sigma(r^2 \cdot dM)}.$$

D. Der Fall, wo die an O wirkende, aus X und Y zusammengesetzte (Versammlungs-) Erschütterung S der Null gleich wird, so daß bloß das Gegen-Paar m_0 von Erschütterungen der Dreh-Are statt findet, kann nur dann eintreten, tritt aber dann allemal ein, wenn die Dreh-Are durch den Schwer-Punkt geht.

E. Geht also die Dreh-Are durch den Schwer-Punkt und sind außerdem noch die Bedingungen (C. ♂) erfüllt, d. h. fällt die Ebene der größten Momenten-Summe aller Dreh-Kräfte

$r\omega \cdot dM$, mit der Ebene des stoßenden Gegen-Paares Q zusammen, so erleidet die Dreh-Axe gar keine Erschütterung, und sie ist daher dann eine freiwillige, um welche die Drehung im Augenblicke des Stoßes beginnt, auch wenn der Körper ganz frei ist.

Ist also namentlich die Dreh-Axe eine durch den Schwer-Punkt gehende Haupt-Dreh-Axe und die Ebene des Gegen-Paares Q senkrecht darauf, so erleidet die Dreh-Axe nie eine Erschütterung, sondern sie ist immer eine freiwillige.

F. Die Winkel-Geschwindigkeit findet immer im Sinne der Projektion des Gegen-Paares Q, auf die Ebene XOY, statt.

§. 60. a.

Geht in demselben Falle des (§. 60.), wo ein bloßes Gegen-Paar von Kräften gleichzeitig stößt, die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt, so ist bloß das zu berücksichtigen, was so eben (im §. 60. D. und E.) und bereits unter dieser Voraussetzung gesagt ist. Dies läßt sich in folgende Wahrheiten zusammenfassen:

1) Die Dreh-Axe erleidet, im Falle sie durch den Schwer-Punkt geht, allemal und unbedingt, entweder nur ein Gegen-Paar von Erschütterungen, wie solches (im §. 60. A. 7. u. 10.) näher bestimmt ist; oder sie erleidet gar keine Erschütterung.

2) Sie erleidet gar keine Erschütterung, so oft die Ebene des stoßenden Gegen-Paares Q mit der Ebne der größten Momenten-Summe der Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ zusammenfällt; und das Moment Q ist dann derselben größten Momenten-Summe gleich.

3) Sie erleidet daher auch gar keine Erschütterung, so oft sie eine, zu dem Schwer-Punkte gehörige Haupt-Dreh-Axe ist, und die Ebene des Gegen-Paares senkrecht darauf steht.

Anmerk. Wir haben in der Aufgabe (des §. 53.) zwei feste Punkte U und U′ angenommen, welche die feste Dreh-Axe bilden sollen, und wir haben die Erschütterungen gesucht, welche diese Punkte beim Beginn der Drehung erleiden. — Nimmt

man dagegen überhaupt eine feste Dreh-Axe, so kann man eben so gut diese Punkte als auch andere zwei Punkte derselben nehmen und nach den Erschütterungen fragen, welche diese anderen Punkte erleiden, während die ersteren dann von jeder Erschütterung frei sind. Dies giebt natürlich keine andere Rechnung, wenn man nur jedesmal in den vorstehenden Rechnungen statt c und c′ die Koordinaten-Werthe derjenigen zwei Punkte der festen Dreh-Axe setzt, welche als der Erschütterung der Axe widerstehend angenommen werden.

§. 61.

Weil in den vorstehenden Untersuchungen (§. 53 — §. 60 a.) alles nur auf den Augenblick sich bezieht, in welchem der Stoß oder die Stöße wirken und die Drehung beginnt, so kann man sich noch fragen, was nachher erfolgt; — ob die Drehung mit derselben konstanten Winkel-Geschwindigkeit ω fortdauert, oder nicht? — ob während der Fortdauer der Drehung die Dreh-Axe, nachdem sie die erste Erschütterung überstanden hat, noch anderweitig und dauernd einen Druck erleidet, oder nicht? u. d. gl. m.

I. Da aber beim Beginn der Drehung jeder Punkt dieselbe Winkel-Geschwindigkeit hat, so würde sich der feste Körper gerade so drehen, auch wenn alle Atome desselben nicht unter sich fest wären. Bleibt daher die Dreh-Axe UU′ oder OZ absolut fest, so befindet sich jeder Atom des Körpers in dem Falle des (I. Th. §. 47.), d. h. er dreht sich konstant im Kreise um einen festen Punkt; und deshalb muß die Winkel-Geschwindigkeit ω so lange eine und dieselbe bleiben, als die Dreh-Axe absolut fest bleibt, und keine weiteren Kräfte hinzutreten.

II. Nach (I. Th. §. 47.) übt aber in jedem Augenblicke dieser konstanten Drehung jedes Element dM in m (Fig. 22.) einen Druck auf die Dreh-Axe OZ aus, in der Richtung des Halbmessers O′m des Kreises, den das Element dM beschreibt, welcher Druck die Centrifugal-Kraft genannt worden, und welcher für

den Atom $= \frac{v^2}{r}$ ist, wenn v die Geschwindigkeit $r\omega$ des Atoms vorstellt. Für das Massen-Element dM ist daher dieser Druck (nach §. 6.)

$$= \frac{v^2}{r} \cdot dM = r\omega^2 \cdot dM.$$

Den Angriffs-Punkt dieses Druckes kann man in die Dreh-Axe selbst verlegen, so daß o, o, z als die 3 Koordinaten-Werthe dieses Punktes angesehen werden können.

Alle diese unendlich vielen einzelnen Drucke lassen sich dann in zwei Drucke vereinigen, und besser noch in einen einzigen und in ein zugehöriges Gegen-Paar von Drucken (nach II. Th. §. 26.). Jeder der Drucke $r\omega^2 \cdot dM$ bildet nämlich mit den Axen $O'X'$ und $O'Y'$ die Winkel $mO'X'$ und $mO'Y'$, deren Kosinusse bezüglich $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ sind, und zerlegt sich daher in

$$\omega^2 x \cdot dM \text{ parallel mit } OX$$
$$\text{und } \omega^2 y \cdot dM \text{ parallel mit } OY,$$

während jede dieser letztern ihren Angriffs-Punkt in der Dreh-Axe hat, so daß die mit OX parallelen Kräfte alle in einer und derselben Ebene XOZ, und die übrigen alle in einer und derselben Ebene YOZ liegen.

III. Rückt man nun alle diese mit OX parallelen Centrifugal-Kräfte parallel mit sich nach dem Versammlungs-Punkt O fort, so fällt die Versammlungs-Kraft X derselben mit OX zusammen und ist gegeben durch die Gleichung

1) $$X = \omega^2 \cdot \Sigma(x \cdot dM) = \omega^2 \cdot Mx_0;$$

außerdem aber treten noch unendlich viele Gegen-Paare hinzu, die in der Ebene XOZ liegen, und deren Momente $-\omega^2 xz \cdot dM$ sind, wenn man die positive Richtung der Gegen-Paare in der Koordinaten-Ebene von OX nach OZ hin zählt. Diese Gegen-Paare vereinigen sich in derselben Ebene XOZ in ein einziges Gegen-Paar, dessen Moment m' durch die Gleichung

2) $$m' = -\omega^2 \cdot \Sigma(xz \cdot dM)$$

bestimmt ist (nach II. Th. §. 23. und §. 17.).

Ist $x_0 = 0$, d. h. geht die Ebene YOZ durch den Schwer-Punkt, so ist $X = 0$, und man behält dann bloß das Gegen-Paar m' allein in der Ebene XOZ.

Ist aber nicht $X = 0$, d. h. geht die Ebene YOZ nicht durch den Schwer-Punkt, so vereinigen sich X und m' in eine einzige Kraft, welche der Größe nach wiederum $= X = \omega^2 \cdot Mx_0$ ist, welche mit OX parallel läuft, welche aber durch einen Punkt W der Dreh-Axe hindurchgeht, dessen Koordinaten-Werth z''' auf OZ genommen (nach II. Th. §. 25.) gegeben ist durch die Gleichung

3) $$z''' = \frac{-m'}{X} = \frac{\Sigma(xz \cdot dM)}{Mx_0}.$$

IV. Auf dieselbe Weise vereinigen sich noch alle mit OY parallelen Centrifugal-Kräfte $\omega^2 y \cdot dM$, in eine mit OY zusammenfallende Versammlungs-Kraft

1) $$Y = \omega^2 \cdot \Sigma(y \cdot dM) = \omega^2 \cdot My_0,$$

und in ein zugehöriges in der Ebene YOZ liegendes Gegen-Paar, dessen Moment

2) $$m'' = \omega^2 \cdot \Sigma(yz \cdot dM)$$

ist, wenn wir wie immer die positive Richtung in der Koordinaten-Ebene YOZ von OZ nach OY hin voraussetzen.

Ist $y_0 = 0$, d. h. geht die Ebene XOZ durch den Schwer-Punkt, so ist auch $Y = 0$ und es bleibt dann bloß das Gegen-Paar m'' allein (in der Ebene YOZ).

Ist aber nicht $Y = 0$, d. h. geht die Ebene XOZ nicht durch den Schwer-Punkt, so vereinigen sich die Kräfte Y und das Gegen-Paar m'' in eine einzige Kraft, welche der Größe nach $Y = \omega^2 \cdot My_0$ ist, mit OY parallel läuft, aber durch einen Punkt W' der Dreh-Achse hindurchgeht, dessen auf OZ genommener Koordinaten-Werth z^{IV} gegeben ist durch die Gleichung

3) $$My_0 \cdot z^{IV} = \Sigma(yz \cdot dM).$$

V. Behalten wir in jeder der beiden Ebenen XOZ und YOZ jede der beiden Versammlungs-Kräfte X und Y in O, und noch die zugehörigen Gegen-Paare m' und m'', ohne die

einzelnen Drucke in W und W' zu finden, welche in jeder dieser Ebenen aus allen Centrifugal-Kräften hervorgehen. Dann kann man die Versammlungs-Kräfte X und Y in O in eine einzige (Versammlungs-) Kraft R vereinigen, welche wieder durch O hindurchgeht, wieder auf der Dreh-Axe senkrecht steht, welche der Größe nach

1) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \omega^2 \cdot Mr_0$$

ist, wenn r_0 die Entfernung des Schwer-Punktes von der Dreh-Axe vorstellt, und welche mit den Axen OX und OY Winkel α_0 und β_0 macht, gegeben durch die Gleichungen

2) $$\cos\alpha_0 = \frac{X}{R} \quad \text{und} \quad \cos\beta_0 = \frac{Y}{R}.$$

Die beiden Gegen-Paare m' und m'' vereinigen sich aber ebenfalls in ein einziges Gegen-Paar (nach II. Th. §. 20.); dessen Moment

3) $$m_0 = \sqrt{m'^2 + m''^2}$$

ist, und dessen Axe mit den Axen OX und OY bezüglich Winkel μ_0 und ν_0 macht, gegeben durch die Gleichungen

4) $$\cos\mu_0 = \frac{m''}{m_0} \quad \text{und} \quad \cos\nu_0 = \frac{m'}{m_0};$$

während die Ebene dieses Gegen-Paares durch die Dreh-Axe geht, also die Axe desselben in die Ebene XOY fällt.

Setzt man statt m' und m'' ihre Werthe, so findet sich noch

$$\cos\mu_0 = \frac{\Sigma(yz \cdot dM)}{\sqrt{(\Sigma xz \cdot dM)^2 + (\Sigma yz \cdot dM)^2}}$$

$$\text{und} \quad \cos\nu_0 = \frac{\Sigma(xz \cdot dM)}{\sqrt{(\Sigma xz \cdot dM)^2 + (\Sigma yz \cdot dM)^2}},$$

so daß man sieht, wie die Lage der Ebene dieses Gegen-Paares von Centrifugal-Kräften, von der Größe der Winkel-Geschwindigkeit ω ganz unabhängig ist.

VI. Geht also die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt des Körpers, so existirt (nach III. und IV.) bloß dieses Gegen-Paar von Centrifugal-Kräften allein, dessen Moment m_0 und dessen Lage so eben (in V.) näher bestimmt sich finden.

VII.

VII. Geht aber die Dreh-Axe nicht durch den Schwer-Punkt, ist sie dagegen eine Haupt-Dreh-Axe für den Punkt O, so verschwindet dieses Gegen-Paar von Centrifugal-Kräften, und es existirt dann bloß die einzige Centrifugal-Kraft $R = \omega^2 \cdot Mr_0$, die senkrecht auf die Dreh-Axe diesen Punkt O angreift, für welchen die Dreh-Axe Haupt-Dreh-Axe ist; während ihre Lage oben (in V.) ganz genau bestimmt ist.

VIII. Geht endlich die Dreh-Axe durch den Schwer-Punkt und ist sie zu gleicher Zeit Haupt-Dreh-Axe (für irgend einen, und somit, nach §. 51. I., für jeden ihrer Punkte), so vernichten sich die Centrifugal-Kräfte ganz, und die Drehung dauert um dieselbe anfängliche Axe mit derselben konstanten Winkel-Geschwindigkeit so lange fort, als nicht neue Kräfte hinzutreten, welche sie ändern.

IX. Existirt endlich die Versammlungs-Kraft R und das zugehörige Gegen-Paar m_0, liegen sie aber in einer und derselben Ebene, d. h. ist

$$\cos\alpha_0 \cdot \cos\mu_0 + \cos\beta_0 \cdot \cos\nu_0 = 0 \text{ oder } X \cdot m'' + Y \cdot m' = 0,$$

d. h.

$$(☾) \cdots \quad x_0 \cdot \Sigma(yz \cdot dM) = y_0 \cdot \Sigma(xz \cdot dM);$$

liegt also der Schwer-Punkt so, daß diese Bedingung ☾ erfüllt ist; — so lassen sich R und m_0 in eine einzige Kraft vereinigen, welche der Größe nach wiederum

$$R = \omega^2 \cdot Mr_0$$

ist, welche in der durch μ_0 und ν_0 bestimmten Ebene liegt, wiederum auf der Dreh-Axe senkrecht steht, aber einen Punkt angreift, dessen auf OZ genommener Ordinaten-Werth die oben (in III. 3. und IV. 3.) berechneten z''' und z^{IV} sind, welche jetzt, in diesem besondern Falle, einander gleich, nämlich

$$= \frac{\Sigma(xz \cdot dM)}{Mx_0} = \frac{\Sigma(yz \cdot dM)}{My_0}$$

werden (nach II. Th. §. 25.).

Diese Bedingung (☾) ist in dem Falle (VII.), d. h. dann allemal erfüllt, wenn die Dreh-Achse eine Haupt-Dreh-Achse ist, für den Punkt O. — Im Allgemeinen aber drückt sie aus,

daß die Summe der statischen Momente der Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ in Bezug auf eine durch O gehende und auf der durch den Schwer-Punkt und die Dreh-Axe gelegten Ebene senkrechte Momenten-Axe, der Null gleich ist. — Ist aber die Summe der statischen Momente der Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ für die so eben gedachte Momenten-Axe der Null gleich, so ist sie es auch für jede andere mit ihr parallel und durch einen beliebigen andern Punkt der Dreh-Axe gelegte Momenten-Axe (vergl. §. 51. I.).

X. Ist in dem Falle (IX.), wo die Centrifugal-Kräfte sich auf eine einzige zurückführen, also auch in dem Falle (VII.), der als ein besonderer Fall in (IX.) steckt (wenn nämlich die Dreh-Axe für den Punkt O eine Haupt-Dreh-Axe ist), der Punkt der Dreh-Axe, den sie angreift, absolut fest, so wird ihre Wirkung vernichtet, und es dauert daher die Drehung mit derselben Winkel-Geschwindigkeit ω um dieselbe Dreh-Axe so lange fort, als nicht neue Kräfte von außen noch hinzutreten, welche diese Bewegung ändern.

XI. Ist die anfängliche Drehung durch den Stoß eines Gegen-Paares hervorgebracht, und zwar unter den Voraussetzungen des (§. 60. C.), nach denen die Dreh-Axe eine zu dem Punkte O gehörige Haupt-Dreh-Axe ist, und die Ebene des Gegen-Paares auf ihr senkrecht steht; — und ist dieser Punkt O absolut fest, so beginnt nicht bloß die Drehung um OZ, wie wenn die ganze Dreh-Axe absolut fest wäre; sondern sie setzt sich auch um dieselbe Axe OZ unverändert fort (nach VII.), so lange bis neue Kräfte hinzutreten, welche eine Aenderung hervorbringen.

Steht aber die Ebene des stoßenden Gegen-Paares senkrecht auf einer durch den Schwer-Punkt gehenden Haupt-Dreh-Axe, so beginnt nicht bloß die Drehung um diese Haupt-Dreh-Axe freiwillig, wenn sie auch ganz frei ist (nach §. 60 a. Nr. 3.), sondern sie setzt sich auch um dieselbe Dreh-Axe, selbst wenn sie ganz frei ist, unverändert fort (nach VIII.), so lange nicht neue Kräfte hinzutreten, welche eine Aenderung hervorbringen *).

---

*) Ganz anders ist es, wenn statt eines Gegen-Paares von Stößen

XII. Da zu jedem Punkte O drei auf einander senkrechte Haupt-Dreh-Axen gefunden werden, und da (nach §. 57. E.) ein einziger in der Ebene zweier dieser drei Haupt-Dreh-Axen geführter Stoß, sobald der Punkt O absolut fest ist, eine Drehung um die dritte Haupt-Dreh-Axe hervorbringt, so folgt noch aus den vorliegenden Nummern (VII. und IX.), daß diese Drehung mit derselben konstanten Winkel-Geschwindigkeit ω um dieselbe Haupt-Dreh-Axe so lange fortdauern wird, als der Punkt O absolut fest bleibt.

Ist der Punkt O einer derjenigen Punkte, welche (nach §. 51. VI.) die Eigenschaft haben, daß jede durchgelegte Gerade eine Haupt-Dreh-Axe ist, so folgt, daß wenn dieser Punkt O absolut fest ist, wie auch immer die Stöße geführt seyn mögen, die Drehung doch immer um eine Haupt-Dreh-Axe beginnt, und daher auch nothwendig immer um dieselbe Haupt-Dreh-Axe mit derselben Winkel-Geschwindigkeit sich fortsetzt, so daß die Dreh-Axe während der ganzen Dauer der Drehung unbeweglich bleibt, so lange nicht neue Kräfte hinzutreten, welche ihre Bewegung ändern, und so lange dieser Punkt O absolut fest bleibt.

Anmerk. Wir machen dabei dem Anfänger noch ausdrücklich bemerklich, daß die Centrifugal-Kraft eines Atoms mit der Schwere eines Atoms, also die Centrifugal-Kraft eines Körpers mit dem Gewichte eines Körpers verglichen werden kann, daß also die hier berechneten Drucke sich alle auf die Druck-Einheit oder Gewichts-Einheit beziehen, daß sie eben deshalb auch unendlich klein sind gegen die in den (§§. 57. — 60 a.) berechneten Stöße oder Erschütterungen, welche bei dem Beginn der Drehung statt gefunden haben, und welche, wenn sie in

---

nur ein einziger Stoß wirkt. Bringt derselbe eine freiwillige Bewegung um eine Dreh-Axe hervor, so kann sie nicht durch den Schwer-Punkt gehen (nach §. 57. C.); und geht die Dreh-Axe nicht durch den Schwer-Punkt, so kann die begonnene Drehung um sie sich nicht fortsetzen, wenn nicht wenigstens der Punkt derselben fest seyn sollte, zu welchem sie Haupt-Dreh-Axe ist.

endlichen Zahlen ausgedrückt werden sollen, sich auf die Stoß-Einheit beziehen müssen (vergl. §. 10.) *).

Vierte Abtheilung.

Von der veränderlichen Bewegung um eine feste Dreh-Axe.

§. 62.

Setzen wir wieder einen Körper voraus, welcher die Masse M hat, und welcher sich um eine, durch die beiden festen Punkte U und U′ gebildete feste Dreh-Axe dreht. Diese Drehung ist theils durch anfängliche gleichzeitige Stöße, dann aber durch eine stetig wirkende Kraft $\varphi \cdot dt \times dM$ hervorgebracht, welche vom Anfange der Zeit t an, bis zu diesem Augenblick, wo die Zeit $= t$ ist, auf die einzelnen Elemente dM der Masse in gegebener Richtung gewirkt hat und wirkt. Man soll die Winkel-Geschwindigkeit $\omega = \omega_t$, wie solche zu Ende der Zeit t seyn wird, so wie alle Zustände der Bewegung zu Ende derselben Zeit t, näher bestimmen.

Will man bloß die Gleichung zur Bestimmung der Winkel-Geschwindigkeit ω_t, so sey $d\omega$, d. h. $\partial\omega_t \cdot dt$ der Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit in der unmittelbar nach t folgenden unendlich-kleinen Zeit dt, und es ist, wenn r die Entfernung eines Elementes dM von der Dreh-Axe vorstellt, $r \cdot d\omega \cdot dM$ der Zuwachs an Größe der Bewegung, welchen das Element dM erleidet (in der Richtung der Tangente des Kreises, der durch das Element dM beschrieben wird). Nimmt man alle diese Zu-

---

*) Dem allerersten Anfänger bemerken wir noch nebenbei, daß wir bei der Bestimmung der von den Centrifugal-Kräften herrührenden Drucke, irgend einen Augenblick der Bewegung fest gehalten haben, um für diesen Augenblicke den Druck zu bestimmen. In diesem Augenblicke hat aber alles, und daher namentlich auch der Schwer-Punkt, eine völlig bestimmte Lage gegen die Koordinaten-Ebenen, selbst wenn man letztere im Raume unbeweglich sich denkt.

wachse $r \cdot d\omega \cdot dM$ genau in entgegengesetzter Richtung, so hat man den einen Theil der verlorenen Kräfte, welche mit den Kräften $\varphi \cdot dt \times dM$, die an den einzelnen Elementen wirken und diese Zuwachse hervorgebracht haben, nach dem d'Alembert'schen Princip das Gleichgewicht halten müssen, und zwar um diese absolut feste Dreh-Axe UU'. Zu dem Ende muß die Summe der statischen Momente (in Bezug auf UU' als Momenten-Axe) aller dieser verlorenen Kräfte, der Null gleich seyn, d. h. es muß seyn

$$d\omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = dt \cdot \Sigma(\varphi_1 \cdot \pi_1 \cdot dM),$$

wo $\varphi_1 \cdot dt \times dM$ die Projection der Kraft $\varphi \cdot dt \times dM$ auf eine gegen UU' senkrechte Ebene, und π_1 die positiv oder negativ genommene Entfernung dieser Projektion von der Dreh-Axe vorstellt, so daß $dt \times \Sigma(\varphi_1 \cdot \pi_1 \cdot dM)$ die Summe der statischen Momente aller zu Ende der Zeit t auf's Neue gewirkt habenden Kräfte $\varphi \cdot dt \cdot dM$ ist, in Bezug auf die Dreh-Axe als Momenten-Axe genommen.

Dividirt man dieselbe Gleichung durch dt weg, so erhält man zur Bestimmung von ω

$$\text{I.} \qquad \partial\omega_t \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = \Sigma(\varphi_1 \cdot \pi_1 \cdot dM).$$

In dieser Gleichung läßt sich das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ wie gewöhnlich berechnen, und solches nimmt die Zeit t nicht in sich auf. Dagegen können φ_1 und π_1 Funktionen von t seyn, welche den Veränderlichen t vielleicht eben sowohl mittelbar als auch unmittelbar enthalten, so daß die Gleichung (I.) in jedem besondern Falle besonders integrirt werden muß.

Führt man, um diese Auflösung (Integration) der Gleichung (I.) weiter zu verfolgen, rechtwinkliche Koordinaten-Axen OX, OY, OZ ein, während man OZ mit der Dreh-Axe UU' zusammenfallen und OX, OY im Raume fest, also im drehenden Körper beweglich seyn läßt; sind in Bezug auf diese Axen x, y, z die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Elementes dM, so wie $X \cdot dt$, $Y \cdot dt$, $Z \cdot dt$ die Seiten-Kräfte, in welche $\varphi \cdot dt$ sich zerlegt, so ist offenbar $dt \cdot \Sigma(Xy - Yx) \cdot dM$ dieselbe Summe der statischen Momente, die wir kurz vorher durch $dt \cdot \Sigma(\varphi_1 \cdot \pi_1 \cdot dM)$

ausgedrückt haben, so daß die Gleichung (I.) in die Gleichung

II. $\partial\omega_t \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = \Sigma(Xy - Yx) \cdot dM$

übergeht, wo im Allgemeinen X, Y Funktionen von t, x, y, z seyn werden (die selbst noch ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t &c. &c. in sich aufnehmen können).

Was die Berechnung der Summe $\Sigma(Xy - Yx) \cdot dM$ zur Rechten (in II.) betrifft, so wird man im Allgemeinen außer den im Raume festen Axen OX, OY, OZ, noch im Körper feste Axen OX_1, OY_1, OZ annehmen müssen, so daß OZ dieselbe bleibt, während man OX_1, OY_1 zu Anfange wo $t = 0$ ist, mit OX, OY bezüglich zusammenfallend sich denken kann, übrigens aber so, daß sie zu Ende der Zeit t, mit OX und OY immer noch in derselben Ebene liegen, aber bezüglich den Winkel ψ_t bilden, der wie Fig. 23. zeigt, von OY nach OX hin gezählt seyn mag, in so fern wir annehmen, daß auch die Drehung von OY nach OX hin erfolgt. Da nun ω_t die Geschwindigkeit eines von der Dreh-Axe um die Längen-Einheit abliegenden Punktes und ψ_t im Bogen genommen, der Weg desselben Punktes ist, so hat man (nach §. 1.)

1) $\omega_t = \partial\psi_t$ und 2) $\partial\omega_t = \partial^2\psi_t$.

Nun finden aber zwischen den alten Koordinaten-Werthen x, y, z und den neuen x_1, y_1, z_1 eines und desselben Elementes dM, außer der Gleichung $z = z_1$, noch (Fig. 23.) diese anderen Gleichungen statt, nämlich

3) $x = x_1 \cdot \cos\psi + y_1 \cdot \sin\psi$;

4) $y = -x_1 \cdot \sin\psi + y_1 \cdot \cos\psi$.

Substituirt man daher diese Werthe statt x, y, z und statt $\partial\omega_t$ (und im Nothfalle auch die daraus abgeleiteten Werthe von ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t, wenn solche vorkommen sollten) in die Gleichung (II.), so erhält man eine Gleichung zwischen $\partial^2\psi_t$ links, und einer Reihe von Summen-Gliedern zur Rechten, welche auf diese neuen, im Körper festen Axen bezogen sind, und da-

her auf die gewöhnliche Weise (wie solche im II. Th. Kap. VI. näher beschrieben steht) gefunden werden.

Die Gleichung der Bewegung selbst ist also im Allgemeinen eine Differenzial-Gleichung (der 2ten Ordnung) zwischen t, ψ_t, $\partial\psi_t$ und $\partial^2\psi_t$ und Konstanten, und giebt, integrirt, ψ in t mit zwei neuen unbestimmten Konstanten, wovon die eine aus dem Anfangs-Werthe von $\partial\psi_t$ oder von ω_t, die andere aus dem Anfangs-Werthe von ψ_t selbst (den wir oben $= 0$ angenommen haben) bestimmt werden muß. — Hat man aber ψ in t gefunden, so findet sich dann auch (aus 1.) sogleich die gesuchte Winkel-Geschwindigket ω_t dazu.

Dies Verfahren im Allgemeinen. In Einzel-Fällen ist es oft gar nicht nöthig, neue Axen einzuführen; ja es ist zuweilen nicht einmal nöthig, zu einer Differenzial-Gleichung der 2ten Ordnung vorwärts zu gehen, in sofern sich die Gleichung (I. oder II.) unmittelbar und ohne weiteres integriren läßt.

Beispiel 1. Denken wir uns einen schweren Körper, welcher um eine horizontale Dreh-Axe OZ schwingt (also einen physikalischen Pendel); legen wir die Axe OX (Fig. 8.) ebenfalls horizontal und OY vertikal nach unten und O selbst so, daß der Schwer-Punkt S in die Ebene XOY zu liegen kommt, und in dieser Ebene schwingt; — so hat man zunächst

$$X = 0, \quad Y = g \quad \text{und} \quad Z = 0.$$

Die Gleichung (II.) wird also jetzt

$$1) \qquad \partial\omega_t \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = -\Sigma(gx \cdot dM) = -g \cdot Mx_0,$$

wenn x_0 den auf OX genommenen Abscissen-Werth des Schwer-Punkts S des schwingenden Körpers vorstellt, wie solcher zu Ende der Zeit t liegt.

Ist nun (Fig. 8.) α der Winkel YOA, um welchen der Schwer-Punkt zu Anfang erhoben worden ist, und θ der Winkel YOS, während S die Lage des Schwer-Punktes zu Ende der Zeit t vorstellt, beide im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, so ist $\sigma = \alpha - \theta$ der Weg eines Punktes, der um 1 von der Dreh-Axe OZ abliegt, und

$$2) \qquad \partial\sigma_t \quad \text{oder} \quad \partial(\alpha-\theta)_t \quad \text{oder} \quad -\partial\theta_t$$

die Winkel-Geschwindigkeit, welche dasmal in der entgegengesetzten Richtung statt findet, gegen die oben im Texte angenommene. Bezeichnen wir daher die jetzige Winkel-Geschwindigkeit durch $-\omega_t$, damit ω_t dieselbe Bedeutung behalte, wie oben im Texte, so hat man dasmal

$$3) \qquad \omega_t = \partial\theta_t, \qquad \text{also} \qquad \partial\omega_t = \partial^2\theta_t.$$

Zu gleicher Zeit ist aber, wenn r_0 die Entfernung des Schwer-Punktes S von der Dreh-Achse bedeutet,

4) $$x_0 = r_0 \cdot \sin\theta.$$

Die obige Gleichung (I.) geht dadurch über in

$$\partial^2\theta_t + g\frac{M \cdot r_0}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} \cdot \sin\theta = 0;$$

und dies stimmt genau mit dem für dieselbe Aufgabe (im §. 36.) erhaltenen Resultate *).

Beispiel 2. Wirken gar keine bewegenden Kräfte, so daß

$$X = Y = Z = 0$$

genommen werden muß, so erhält man (aus II.)

$$\partial\omega_t = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = const.,$$

d. h. die Winkel-Geschwindigkeit ist dann immer eine und dieselbe, wie wir dasselbe bereits früher (im §. 61.) für diesen Fall behauptet haben.

Beispiel 3. Denken wir uns noch einmal die Aufgabe des (§. 30.), nämlich zwei Massen m und m', welche mittelst eines Fadens über eine Rolle **) vertikal herunter hängen, während die Rolle den Halbmesser R und die Masse μ haben mag, und das Gewicht mg das andere m'g überwindet, und wo nun die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung der Rolle ausgemittelt werden soll, während die Masse des Fadens so wie die Reibung der Rolle auf ihren Zapfen oder ihrem Bolzen, endlich die Dicke des Bolzen selbst ausser Acht gelassen werden soll.

Man nehme wieder OX horizontal und OY vertikal aber nach oben, so wirken bloß die Gewichte —mg und —m'g, auf beiden Seiten der Rolle mit OY parallel in den Schwer-Punkten der Massen m und m', deren Abscissen-Werthe bezüglich R und —R sind, während die beiden mit OY parallelen Koordinaten-Werthe derselben durch y und y' vorgestellt seyn können, hier aber nicht in Betrachtung kommen. Das Gewicht der Rolle wird in ihren Zapfen getragen, kommt daher nur bei der Bestimmung der Drucke in Betracht. In der Gleichung (II.), welche die Winkel-Geschwindigkeit ω zu liefern hat, muß man daher (nach §. 38. und §. 41.)

$$mR^2 + m'R^2 + \tfrac{1}{2}\mu R^2 \quad \text{statt} \quad \Sigma(r^2 dM)$$

und

$$mgR - m'gR \quad \text{statt} \quad \Sigma(Xy - Yx) \cdot dM$$

setzen, so daß man findet

---

*) Hier vertritt also der Veränderliche θ die Stelle des im Texte eingeführten ψ.

**) Im (§. 30.) ist statt der Rolle ein unbeweglicher Cylinder genommen. Daß hier eine bewegliche Rolle statt des unbeweglichen Cylinders genommen wird, ändert gerade die End-Resultate, weil jetzt die Rolle von den bewegenden Kräften noch mit in Bewegung gesetzt werden muß.

$$\partial\omega_t = g \cdot \frac{(m-m')}{R(m+m'+\frac{1}{2}\mu)}.$$

Ist nun v die wahre Geschwindigkeit in der Entfernung R von der Dreh-Axe, also die wahre Geschwindigkeit von m und m', so hat man noch

$$v = R\omega, \qquad \partial v_t = R\cdot\partial\omega_t,$$

also

$$\partial v_t = g \cdot \frac{m-m'}{m+m'+\frac{1}{2}\mu},$$

wo statt der Massen ihre Gewichte gesetzt werden können und wonach also das früher (im §. 30.) gefundene Resultat abzuändern ist, sobald statt des unbeweglichen Cylinders eine bewegliche Rolle genommen und die Masse μ der Rolle nicht vernachlässigt werden soll, während jedoch die Dicke des Bolzens vernachlässigt worden ist. (Dies ist aber die vollständigere Theorie der Atwood'schen Fallmaschine.)

Beispiel 4. Betrachten wir noch die Aufgabe des (§. 31. Anmerk. 2.), wo m und m' an dem „Rade an der Welle" wirken, und zwar m am Rade, dessen Radius R, und m' an der Welle, deren Radius R' seyn mag, vertikal herunterhängen.

In dieser Aufgabe muß, wenn Mk^2 das Trägheits-Moment des Rades an der Welle in Bezug auf die Dreh-Axe genommen, vorstellt *),

$$mR^2+m'R'^2+Mk^2 \quad \text{statt} \quad \Sigma(r^2\cdot dM)$$

und

$$mgR+m'gR' \quad \text{statt} \quad \Sigma(Xy-Yx)\cdot dM$$

gesetzt werden. Die Gleichung (II.) wird daher dasmal

$$\partial\omega_t = g \cdot \frac{mR-m'R'}{mR^2+m'R'^2+Mk^2},$$

woraus ω und $R\omega$, $R'\omega$ ꝛc. ohne weiteres gefunden werden können.

So wie man aber hier statt M die Null setzt, d. h. die Masse des „Rades an der Welle" außer Acht läßt, so geht dieses Resultat sogleich wieder in das der (Anmerk. 2. zu 31.) über.

Es ist nun leicht, auch die übrigen der Aufgaben des 3ten Kapitels, in welchen eine Bewegung um eine feste Axe betrachtet wird, in der hiesigen allgemeinen Auflösung (des §. 62.) als bereits vollständig und mit Berücksichtigung aller bewegten Massen, gelöst nachzuweisen.

§. 63.

Will man jedoch die Aufgabe des vorstehenden Paragraphen gehörig gründlich und vollständig behandeln, so muß man wie-

---

*) Ist μ die Masse des Rades, μ' die Masse desjenigen Theiles des Rades, welches zur Welle gehört, und μ_1 die Masse der ganzen Welle, so findet sich (nach §§. 38. und 41.)

$$Mk^2 = \frac{1}{2}\mu R^2 + \frac{1}{2}(\mu_1-\mu')\cdot R'^2.$$

derum auf die Drucke Rücksicht nehmen, welche die Punkte U und U' zu Ende einer jeden Zeit t erleiden, dann die nach den drei Axen OX, OY, OZ zerlegten Gegendrucke, welche für U bezüglich u_1, u_2, u_3, für U' dagegen u'_1, u'_2, u'_3 *) seyn mögen, in Rechnung bringen, und letztere, nebst allen verlorenen Kräften, welche (nach §. 18.) für jedes Element dM bezüglich

$$(X - \partial^2 x_t) \cdot dM \text{ parallel mit OX},$$

$$(Y - \partial^2 y_t) \cdot dM \text{ parallel mit OY},$$

und $$(Z - \partial^2 z_t) \cdot dM \text{ parallel mit OZ}$$

sind, — an dem nun ganz frei gedachten Körper in das Gleichgewicht stellen; ganz so wie solches das d'Alembert'sche Princip in Verbindung mit dem (§. 82. des II. Th.) verlangt.

Nach (§. 29. des II. Th.) bekommt man nun, wenn c und c' die auf OZ genommenen Koordinaten-Werthe von U und U' sind, die 6 Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

$$1) \quad u_1 + u'_1 + \Sigma(X - \partial^2 x_t) \cdot dM = 0,$$

$$2) \quad u_2 + u'_2 + \Sigma(Y - \partial^2 y_t) \cdot dM = 0,$$

$$3) \quad u_3 + u'_3 + \Sigma(Z - \partial^2 z_t) \cdot dM = 0,$$

$$\Sigma[(X - \partial^2 x_t) \cdot y - (Y - \partial^2 y_t) \cdot x] \cdot dM = 0,$$

d. h.

$$4) \quad \Sigma(y \cdot \partial^2 x_t - x \cdot \partial^2 y_t) \cdot dM = \Sigma(Xy - Yx) \cdot dM,$$

$$5) \quad c \cdot u_1 + c' \cdot u'_1 + \Sigma(X - \partial^2 x_t) z \cdot dM = 0,$$

$$6) \quad c \cdot u_2 + c' \cdot u'_2 + \Sigma(Y - \partial^2 y_t) z \cdot dM = 0.$$

Die Gleichung (3.) giebt nun die Summe der Drucke $-(u_3 + u'_3)$, welche die Dreh-Axe in ihrer eigenen Richtung auszuhalten hat. — Die Gleichungen (1. 2. 5. u. 6.) geben

*) Diese Drucke sind wie die wirkenden Kräfte X·dt, Y·dt, Z·dt, gegen Stöße gehalten, unendlich klein. Wir wollen sie aber nicht mit der Stoß-Einheit messen, sondern mit der Druck-Einheit, und diese Maaße unter u_1, u'_1 rc. verstehen, in welchem letztern Falle dann auch die wirkenden Kräfte durch die Druck-Einheit gemessen werden müssen, also nicht mehr durch X·dt, Y·dt, Z·dt, sondern bloß durch X, Y, Z ausgedrückt werden dürfen (vergl. §. 12.).

die übrigen Drucke $-u_1$, $-u_2$, $-u'_1$, $-u'_2$ an den Punkten U und U'. — Die Gleichung (4.) endlich fällt mit der Gleichung (II. des §. 62.) zusammen. Dies geht auch noch aus den nachstehenden Zeilen hervor.

Bezeichnet nämlich r die Entfernung des Elementes dM von der Dreh-Axe OZ, so hat man

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2};$$

und es ist dann $r\omega$ die wahre Geschwindigkeit des Elementes dM und

$$\frac{y}{r}, \qquad -\frac{x}{r} \quad \text{und} \quad 0$$

sind die Kosinusse der Winkel, welche die Richtung dieser letztern mit den 3 Axen OX, OY und OZ macht, so daß

$$y\omega, \qquad -x\omega \quad \text{und} \quad 0$$

die drei, nach den Axen zerlegten Seiten-Geschwindigkeiten des Elementes dM seyn werden, welche letztere (nach I. Th. §. 36. und III. Th. §. 3.) auch bezüglich durch

$$\partial x_t, \qquad \partial y_t \quad \text{und} \quad \partial z_t$$

vorgestellt sind. Man hat daher außer $\partial z_t = 0$ noch

7) $\partial x_t = y \cdot \omega$; 8) $\partial y_t = -x \cdot \omega$.

Differenziirt man aber diese Gleichungen nach allem t, und eliminirt man sogleich die auf's Neue eingehenden ∂x_t und ∂y_t, so ergiebt sich noch

9) $\partial^2 x_t = y \cdot \partial\omega_t + \omega \cdot \partial y_t = y \cdot \partial\omega_t - \omega^2 \cdot x$;

10) $\partial^2 y_t = -x \cdot \partial\omega_t - \omega \cdot \partial x_t = -x \cdot \partial\omega_t - \omega^2 \cdot y$;

woraus sogleich auch folgt:

$$y \cdot \partial^2 x_t - x \cdot \partial^2 y_t = (y^2 + x^2) \cdot \partial\omega_t = r^2 \cdot \partial\omega_t.$$

Um die Rechnungen durchzuführen, seyen wiederum x_0, y_0 und z_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes zu Ende der Zeit t, so daß man

11) $\Sigma(x \cdot dM) = M \cdot x_0$ und 12) $\Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_0$

hat; dann setze man statt $\partial^2 x_t$ und $\partial^2 y_t$ ihre Werthe (aus 9. und 10.), und die 4 Gleichungen (1. 2. 5. 6.) gehen dadurch über in die nachstehenden:

13) $u_1 + u'_1 + \omega^2 \cdot Mx_0 + \Sigma(X \cdot dM) - \partial\omega_t \cdot y_0 = 0$ *)

14) $u_2 + u'_2 + \omega^2 \cdot My_0 + \Sigma(Y \cdot dM) + \partial\omega_t \cdot x_0 = 0,$

15) $cu_1 + c'u'_1 + \omega^2 \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + \Sigma(Xz \cdot dM) - \partial\omega_t \cdot \Sigma(yz \cdot dM) = 0,$

16) $cu_2 + c'u'_2 + \omega^2 \cdot \Sigma(yz \cdot dM) + \Sigma(Yz \cdot dM) + \partial\omega_t \cdot \Sigma(xz \cdot dM) = 0,$

wo man durchweg statt $\partial\omega_t$ seinen Werth (aus 4.) setzen muß, um, wenn die Winkel-Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit bekannt ist, sogleich die zu derselben Zeit vorhandenen Drucke $-u_1$, $-u_2$, $-u'_1$, $-u'_2$ bestimmen zu können. — Die Gleichung (3.) giebt zuletzt, weil $\partial z_t = 0$, also auch $\partial^2 z_t = 0$ ist, sogleich noch

17) $-(u_3 + u'_3) = \Sigma(Z \cdot dM)$

für den Gesammt-Druck längs der Dreh-Axe, zu derselben Zeit t.

Die Summen $\Sigma(X \cdot dM)$, $\Sigma(Y \cdot dM)$, $\Sigma(Z \cdot dM)$, $\Sigma(Xz \cdot dM)$, $\Sigma(Yz \cdot dM)$ berechnen sich genau so, wie wir im vorhergehenden Paragraphen die Summe $\Sigma(Xy - Yx) \cdot dM$ zu berechnen gelehrt haben; dadurch nämlich, daß man in der Ebene XOY neue, im Körper feste Axen OX_1 und OY_1 einführt, welche sich mit dem Körper zugleich drehen, aber immer in der Ebene XOY bleiben und dabei mit den alten Axen OX und OY den Winkel ψ_t machen **). In den einfacheren Fällen ist die Einführung dieser neuen Axen nicht einmal nöthig.

---

*) Man möge nicht übersehen, daß wenn man die beiden parallelen Drucke u_1 und u'_1 in einem einzigen S_1 vereinigt, der an einem Punkte wirkt, dessen Ordinaten-Werth auf OZ genommen c_1 ist, dann allemal

$$u_1 + u'_1 = S_1 \quad \text{und} \quad cu_1 + c'u'_1 = c_1 \cdot S_1$$

seyn wird, so daß in den obigen Gleichungen bloß S_1 statt $u_1 + u'_1$, und bloß $c_1 \cdot S_1$ statt $cu_1 + c'u'_1$ gesetzt werden kann; dasselbe würde sich ereignen, wenn noch u_2 und u'_2 in einen einzigen Gegendruck S_2 vereinigt würden. — Wir thun dies aber deshalb nicht, um mit der Möglichkeit des Vorhandenseyns von Gegen-Paaren, welche diese Drucke bilden könnten, nicht in Kollision zu kommen.

**) Bei den dreifachen Integrationen, welche zuletzt noch nöthig sind, ist es oft bequem, sich der Polar-Koordinaten zu bedienen, insofern bei der Anwendung dieser letztern, die Integrationen nur zwischen konstanten Grenzen zu nehmen seyn dürften, in welchem letztern Falle allemal eine größere Erleichterung der Rechnung eintritt.

Diese Gleichungen (13.—16.) zur Bestimmung der auf die Dreh-Achse senkrechten Drucke vereinfachen sich mehr oder weniger, je nachdem

1) die Dreh-Axe OZ durch den Schwer-Punkt geht, also $x_0 = y_0 = 0$ ist; oder
2) eine Haupt-Dreh-Axe ist für einen ihrer Punkte O, durch welchen dann die beiden andern Koordinaten-Axen OX, OY gelegt werden können, so daß man noch hat
$$\Sigma(xz \cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(yz \cdot dM) = 0.$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich aber am bedeutendsten

3) wenn die Dreh-Axe eine der zu dem Schwer-Punkte gehörigen Haupt-Dreh-Axen seyn sollte; denn sie werden dann

$$18) \quad u_1 + u'_1 + \Sigma(X \cdot dM) = 0,$$
$$19) \quad u_2 + u'_2 + \Sigma(Y \cdot dM) = 0,$$
$$20) \quad cu_1 + c'u'_1 + \Sigma(Xz \cdot dM) = 0,$$
$$21) \quad cu_2 + c'u'_2 + \Sigma(Yz \cdot dM) = 0,$$

während noch immer

$$22) \quad u_3 + u'_3 + \Sigma(Z \cdot dM) = 0,$$

bleibt.

Auf diese Weise kann man in dem Beispiel (1. zu §. 62.) vom Pendel, die Drucke bestimmen, welche die Schwingungs-Axe erleidet.

Auf dieselbe Weise findet man in dem Beispiel (2. zu §. 62.), wo
$$X = Y = Z = 0$$
gedacht worden ist, die Drucke auf die Dreh-Axe genau eben so, wie solche bereits für denselben Fall (im §. 61.) gefunden worden sind.

Schluß-Anmerkung.

Vieles von dem, was in diesem, von der drehenden Bewegung eines Körpers um eine feste Axe handelnden Kapitel nur so nebenbei und daher aus einem einseitigen Standpunkte sich ergeben hat, werden die nun folgenden Kapitel in gehöriger und größerer Allgemeinheit sehen lassen, d. h. im Zusammenhange mit allen denkbaren Arten von Bewegungen überhaupt. Aus diesem letztern Gesichtspunkte werden daher die vorstehenden Lehren noch ein neues Licht erhalten.

Die Dynamik fester Körper.

Fünftes Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung beliebiger Drehungen um beliebige Axen.

§. 64.

1) Wenn wir in der Folge Drehungen um drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY, OZ (Fig. 9.) betrachten, so setzen wir allemal voraus, daß die Drehung um OZ von OY nach OX hin, um OY von OX nach OZ hin, und um OX von OZ nach OY hin erfolgt, und wir bringen die Winkel-Geschwindigkeiten als positive Zahlen in Rechnung, wenn die Drehung wirklich in diesen als positiv angenommenen Richtungen statt findet; dagegen sagen wir: die Drehungen erfolgen in denselben Richtungen mit negativer Winkel-Geschwindigkeit, und wir bringen dann auch die Winkel-Geschwindigkeiten als negative Zahlen in Rechnung, so oft die Drehungen in der That in dem entgegengesetzten Sinne statt finden.

2) Bei jeder Drehung um irgend eine Dreh-Axe UU′, welche nicht Koordinaten-Axe ist, betrachten wir die Winkel-Geschwindigkeit als absolute Zahl (die weder positiv noch negativ in Rechnung gebracht wird, für welche jedoch, wenn sie ω ist, auch $+\omega$ geschrieben werden kann), unterscheiden aber zwei

Seiten ihrer Dreh-Axe, nämlich AU und AU′, indem wir einen Punkt A in der Dreh-Axe UU′ uns denken, und von ihm aus diese entgegengesetzten Richtungen AU und AU′ abnehmen. Wir nennen AU die positive Seite der Dreh-Axe, wenn, sobald AU mit OZ (also nicht mit ihrer rückwärts gedachten Verlängerung OZ′) zusammenfallend gedacht wird, die Drehung dann eine positive Drehung um OZ (nach 1.) wird. Die Verlängerung AU′ von AU wird dann die negative Seite der Dreh-Axe genannt.

Wir geben nun die Richtung der Drehung und die Lage der Dreh-Axe UU′ zugleich, sobald wir die drei Winkel angeben, welche die positive Seite AU der Dreh-Axe mit den drei Koordinaten-Axen macht, vorausgesetzt, daß man einen Punkt dieser Dreh-Axe bereits kennt.

§. 65.

Wir stellen aber von den Drehungen zunächst folgende einfache Sätze hin:

1) Wirken auf einen festen und ganz freien Körper M zwei Systeme von Kräften gleichzeitig, wovon jedes, wenn es einzeln gewirkt hätte, eine Drehung um eine und dieselbe Koordinaten-Axe hervorgebracht haben würde, und zwar das eine die Winkel-Geschwindigkeit ω_1, das andere die Winkel-Geschwindigkeit ω_2, so bringen beide zugleich wirkende Systeme von Kräften eine Drehung um dieselbe Koordinaten-Axe mit der Winkel-Geschwindigkeit $\omega = \omega_1 + \omega_2$ hervor. — Es versteht sich aber, daß nur immer der Moment des Beginnens der Bewegung gemeint ist. — Dabei können ω_1 und ω_2 (also auch ω) positiv, negativ oder Null seyn.

Denn jeder Punkt des Körpers, welcher von der Dreh-Axe um r abliegt, hat in einer und derselben Richtung (der Tangente des Kreises, den er um die Dreh-Axe beschreiben kann) gleichzeitig die Geschwindigkeiten $r \cdot \omega_1$ und $r \cdot \omega_2$, daher in derselben Richtung die Geschwindigkeit $r\omega_1 + r\omega_2$, d. h. $r(\omega_1 + \omega_2)$. Und da diese Geschwindigkeit abermals mit r proportional ist, so erfolgt eine Drehung um dieselbe Axe.

2) Wirken aber wieder zwei Systeme von Kräften gleich-

zeitig, jedoch so, daß das eine System, wenn es allein wirkte, eine Drehung mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_1 um die Koordinaten-Axe OX, aber das andere System allein eine Drehung mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_2 um die zweite Koordinaten-Axe OY (Fig. 10.) hervorgebracht haben würde, so entsteht eine Drehung um eine dritte Axe OU, welche ihrer Lage nach und in Bezug auf die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung durch die Diagonale OD des Rechtecks OBCD gegeben ist, dessen Seiten OB und OC bezüglich die Winkel-Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sind.

Und allgemeiner noch: es ist die Winkel-Geschwindigkeit ω der neuen Drehung gegeben durch die Gleichung

$$\text{I.} \qquad \omega = +\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

während die Winkel α_0 und β_0, welche die positive Seite der neuen Dreh-Axe mit den Koordinaten-Axen OX und OY macht, genau gegeben sind durch die Gleichungen

$$\text{II.} \qquad \cos\alpha_0 = \frac{\omega_1}{\omega} \quad \text{und} \quad \cos\beta_0 = \frac{\omega_2}{\omega},$$

so daß, weil ω nie negativ gedacht wird (§. 64.), α_0 spitz, recht oder stumpf seyn wird, je nachdem ω_1 positiv, Null oder negativ ist. — Analoges gilt für β_0.

Denn man betrachte ein beliebiges Element μ des Körpers M an irgend einer Stelle m (Fig. 10.) in oder außerhalb der Ebene XOY, und denke sich mx, my und mu bezüglich auf die Ebenen mOX, mOY und mOU senkrecht gezogen, so daß sie die Richtungen der Geschwindigkeiten des Elements μ sind, im Falle solches eine Drehung um die Dreh-Axen OX, OY oder OU beginnen wollte. Wir setzen dabei zunächst ω_1 und ω_2 beide positiv voraus, und $OB = \omega_1$, $OC = \omega_2$, so wie $OD = \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Nennen wir nun r_1, r_2 und r bezüglich die Entfernungen des Elementes μ von den Axen OX, OY und OU, und nehmen wir

$$1) \qquad mx = \mu \cdot r_1 \cdot \omega_1 \quad \text{und} \quad 2) \quad my = \mu \cdot r_2 \cdot \omega_2,$$

so stellen die Linien mx und my der Richtung und der Größe nach die „Größen der Bewegung" vor, welche das Element μ im Beginn seiner Drehung um OX oder um OY herum, haben würde. Wir werden nun erweisen 1) daß, wenn man die Kräfte mx und my mittelst des Kräften-Parallelogramms zusammensetzt, dann die mittlere Kraft der Richtung nach mit der auf mOU senkrecht gedachten mu zusammenfällt; und 2) daß

die

die Größe mu dieser mittlern Kraft $= \mu \cdot r \cdot \omega$ ist, wenn $\omega = OD = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ gedacht wird.

Es machen nämlich die Geraden mx, my und mu, eben weil sie bezüglich auf den Ebenen mOX, mOY und mOU senkrecht gedacht worden sind, unter sich dieselben Winkel, welche diese letzterwähnten Ebenen unter sich machen, während dieselben Richtungen mx, my und mu, weil sie auf einer und derselben Geraden Om senkrecht stehen, in einer und derselben Ebene liegen. Denkt man sich daher aus O mit Om = e eine Kugel-Fläche beschrieben, welche OX, OY, OU bezüglich in b, c, d trifft, und denkt man sich die Kreisbogen bc, bd, cd, bm, cm, dm in Graden ausgedrückt, damit sie die Winkel an O messen, so hat man zunächst

3) W. xmu = W. bmd; W. ymu = W. cmd; W. xmy = W. bmc;

wo bmd, cmd, bmc, sphärische Winkel, d. h. Neigungs-Winkel der Ebenen sind; ferner

4) $r_1 = e \cdot \sin bm$; $r_2 = e \cdot \sin cm$ und $r = e \cdot \sin dm$;

so daß (aus 1. 2.)

5) $mx = \mu e \cdot \omega_1 \cdot \sin bm$ und $my = \mu e \cdot \omega_2 \cdot \sin cm$;

also noch

6) $mx : my = \omega_1 \cdot \sin bm : \omega_2 \cdot \sin cm$

hervorgeht. Nun ist aber wegen $\omega_1 = OB$ und $\omega_2 = OC$, in dem Parallelogramm OBCD

7) $\omega_1 : \omega_2 = \sin cd : \sin bd$;

also (aus 6.)

8) $mx : my = \sin bm \cdot \sin cd : \sin cm \cdot \sin bd$.

In den sphärischen Dreiecken cdm und bdm verhalten sich jedoch die Seiten wie die Sinus der Gegen-Winkel, also hat man

$$\sin bm : \sin bd = \sin bdm : \sin bmd$$

und

$$\sin cd : \sin cm = \sin cmd : \sin cdm;$$

mithin, weil bdm und cdm Neben-Winkel sind

9) $\sin bm \cdot \sin cd : \sin cm \cdot \sin bd = \sin cmd : \sin bmd$.

Es folgt daher (aus 8. in Verbindung mit 9.)

10) $mx : my = \sin cmd : \sin bmd$,

d. h. (wegen 3.)

11) $mx : my = \sin ymu : \sin xmu$.

Diese Proportion setzt aber außer Zweifel, daß, wenn man mx und my mittelst des Kräften-Parallelogramms vereinigt, die mittlere Kraft nothwendig in die Richtung der (auf mOU senkrecht gedachten) mu fallen müsse.

Ist nun mu die Länge der Diagonale des aus mx und my gebildeten Parallelogramms, so berechnet sich die Größe der mittlern Kraft mu aus einer der beiden Proportionen

$$mu : mx : my = \sin xmy : \sin ymu : \sin xmu,$$

wovon die eine z. B. sogleich giebt

$$12) \qquad mu = mx \cdot \frac{\sin xmy}{\sin ymu} = mx \cdot \frac{\sin bmc}{\sin cmd},$$

oder (aus 5.)

$$13) \qquad mu = \mu \cdot e \cdot \frac{\omega_1 \cdot \sin bm \cdot \sin bmc}{\sin cmd}.$$

Nun verhält sich aber im Parallelogramm OBCD, weil unter ω die Diagonale OD verstanden wird, während $\omega_1 =$ OB und $\omega_2 =$ OC ist,

$$\omega_1 : \omega = \sin cd : \sin bc,$$

also

$$14) \qquad \omega_1 = \omega \cdot \frac{\sin cd}{\sin bc}.$$

Ferner ist in den sphärischen Dreiecken bmc und cmd

$$\sin bmc : \sin dcm = \sin bc : \sin bm$$

und

$$\sin dcm : \sin cmd = \sin dm : \sin cd;$$

folglich, wenn man multiplicirt,

$$\sin bmc : \sin cmd = \sin bc \cdot \sin dm : \sin bm \cdot \sin cd,$$

so daß

$$15) \qquad \sin bmc = \frac{\sin bc \cdot \sin dm \cdot \sin cmd}{\sin bm \cdot \sin cd}$$

wird. Substituirt man aber diese Werthe (aus 14. und 15.) in die Gleichung (13.), so erhält man

$$16) \qquad mu = \mu \cdot e \cdot \omega \cdot \sin dm = \mu \cdot r \cdot \omega \quad \text{(nach 4.)}.$$

Die aus den Kräften $mx = \mu \cdot r_1 \omega_1$ und $my = \mu \cdot r_2 \omega_2$ hervorgehende mittlere Kraft hat also nicht bloß die Richtung einer Drehung um OU, sondern auch die Größe $\mu \cdot r \cdot \omega$ (wenn ω die Diagonale OD des aus OB $= \omega_1$ und OC $= \omega_2$ gebildeten Rechtecks vorstellt); also hat das Element μ die Geschwindigkeit $r\omega$. Demnach sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Elemente mit der Entfernung r derselben von der Geraden OU proportional, wodurch eine Drehung um OU, und zwar mit der Winkel-Geschwindigkeit ω, außer Zweifel gestellt ist.

Betrachtet man aber die andern drei Fälle, wo ω_1 oder ω_2 oder beide negativ sind, so wird sich die positive Seite der Dreh-Axe UU' in die drei andern der vier von den Axen gebildeten Räume hin legen, so daß die Gleichungen (I. und II.) in ihrer Allgemeingültigkeit ohne weiteres erkannt werden.

Anmerk. 1. Nach diesem Satze kann man zwei Drehungen um zwei Koordinaten-Axen in eine einzige zusammensetzen; nach demselben kann man aber auch jede Drehung um eine beliebige Axe UU' mit der Winkel-Geschwindigkeit ω sogleich in zwei Drehungen zerlegen und zwar auf unendlich viele Arten.

Man legt nämlich durch UU' eine beliebige Ebene, nimmt in UU' einen beliebigen Punkt O, und zieht in dieser Ebene durch O eine beliebige Gerade OX, und senkrecht darauf in derselben Ebene eine zweite OY, nimmt diese nun zu Koordinaten-Axen, bestimmt die Winkel α und β, welche die positive Seite der Dreh-Axe UU' mit OX und OY macht *), berechnet sich

$$\omega_1 = \omega \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega \cdot \cos \beta,$$

so hat man die Winkel-Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Drehungen um die beiden Axen OX und OY, in welche die gegebene Drehung zerlegt werden kann. Ist dann ω_1 positiv oder negativ gefunden, so muß die Drehung des Körpers in der als positiv angenommenen Richtung oder in der entgegengesetzten gedacht werden. — Dasselbe gilt von ω_2.

Nie ist aber dabei zu übersehen 1) daß der Körper ganz frei ist; und 2) daß immer nur von dem Augenblicke des Beginns der Drehungen die Rede ist.

Anmerk. 2. Wir haben den Beweis des Satzes (§. 65. Nr. 2.) absichtlich so geführt, daß er gilt, es mögen OX und OY auf einander senkrecht stehen oder nicht, wenn nur OB $= \omega_1$, OC $= \omega_2$ die Seiten, und OD $= \omega$ die Diagonale des aus OB und OC gebildeten Parallelogramms vorstellen. Man hat daher sogleich noch den Satz vom „Parallelogramm der Drehungen" erwiesen, nämlich den Satz:

„Will ein Körper gleichzeitige Drehungen um zwei unter „einem beliebigen Winkel sich schneidende Dreh-Axen OX und „OY beginnen, so beginnt er in der That eine Drehung um „eine dritte Axe OU, welche der Lage ihrer positiven Seite nach „die Diagonale OD eines Parallelogramms ist, von welchem „OB und OC der Lage nach die positiven Seiten der Dreh-„Axen OX und OY und der Größe nach die Winkel-Geschwin-„digkeiten dieser Drehungen um OX und OY sind; und die

*) Zur Bestimmung dieser positiven Seite muß man sich noch OZ senkrecht auf die Ebene XOY denken, damit die positiven Drehungen um die Axen OX und OY keiner Zweideutigkeit mehr unterworfen sind.

„Länge der Diagonale OD drückt zu gleicher Zeit die Winkel-„Geschwindigkeit dieser einzigen Drehung um OU aus, in wel-„che sich die beiden erstern Drehungen, wenn sie gleichzeitig „statt finden sollen, vereinigen."

Daraus folgt sogleich auch noch der Satz vom Parallelepipedum der Drehungen, nämlich: „Soll ein Körper gleichzeitig um „drei beliebige, nicht in einer und derselben Ebene liegende, aber „in einem und demselben Punkte sich schneidende Axen sich dre-„hen, so dreht er sich um die Quer-Diagonale eines Parallel-„epipedums, dessen drei Seiten der Richtung nach die genannten „drei Dreh-Axen, der Größe nach aber die drei Winkel-Geschwin-„digkeiten sind. Die Länge dieser Quer-Diagonale ist zugleich „auch die Winkel-Geschwindigkeit der wirklichen Drehung *)."

§. 66.

So wie man aber (im I. Th. Mechan. Kap. II.) aus den Sätzen des (§. 11. daselbst), welche mit den so eben (im §. 65.) gegebenen vollkommen analog sind, die Zusammensetzung beliebig vieler Kräfte, die einen und denselben Atom angreifen, in eine einzige mittlere Kraft bewirkt hat, so bewirken wir jetzt die Zusammensetzung beliebig vieler (Seiten-) Drehungen um beliebige in einem und demselben Punkte O sich schneidende Dreh-Axen, in eine (mittlere) Drehung um eine, durch denselben Punkt O hindurchgehende (mittlere) Dreh-Axe.

I. Zu dem Ende setzen wir (aus §. 65. Nr. 2.) auf ganz analogem Wege wie im (I. Th. Mech. §. 15.) den Satz zusammen:

Jede Drehung um eine Dreh-Axe UU' mit der Winkel-Geschwindigkeit ω, zerfällt immer in drei gleichzeitige Drehungen, um drei durch einen beliebigen Punkt O der UU' gelegte rechtwinkliche Koordinaten-Axen OX, OY, OZ, welche bezüglich die Winkel-Geschwindigkeiten ω', ω'', ω''' haben, so daß

*) Der Anfänger wird nie übersehen, daß hier überall nur von dem ersten Moment der Drehungen die Rede ist, also gewissermaßen nur von dem Bestreben nach Drehung.

$(\odot)\ldots \quad \omega' = \omega \cdot \cos\alpha, \quad \omega'' = \omega \cdot \cos\beta, \quad \omega''' = \omega \cdot \cos\gamma$

ist, wenn α, β, γ die Winkel vorstellen, welche die positive Seite OU der Dreh-Axe UU' mit den drei Richtungen OX, OY, OZ (und **nicht** mit ihren entgegengesetzten Richtungen) macht.

II. Und umgekehrt: Drei gleichzeitige Drehungen um die drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ mit den (positiven oder negativen) Winkel-Geschwindigkeiten ω', ω'', ω''' setzen sich allemal in eine einzige Drehung zusammen, deren Winkel-Geschwindigkeit ω aus der Gleichung

$$1) \qquad \omega = +\sqrt{\omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2}$$

berechnet wird, während die neue Dreh-Axe UU' durch denselben Punkt O so hindurchgeht, daß ihre positive Seite OU mit den Axen OX, OY, OZ die, durch die Gleichungen

$$2) \qquad \cos\alpha = \frac{\omega'}{\omega}; \quad \cos\beta = \frac{\omega''}{\omega}; \quad \cos\gamma = \frac{\omega'''}{\omega}$$

gegebenen Winkel α, β, γ macht, während ω selbst **nie** negativ genommen werden darf.

III. Dadurch ist man aber in den Stand gesetzt, beliebig viel gleichzeitige Drehungen eines und desselben Körpers um Axen, die sich alle in einem und demselben Punkte O schneiden, in eine einzige Drehung zu vereinigen; wenn sie sich nicht im Gleichgewicht halten.

Sind nämlich

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \ldots \omega_n$$

die Winkel-Geschwindigkeiten von n gleichzeitigen Drehungen um Axen, die sich alle in einem Punkte O schneiden, und deren positive Seiten mit drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ bezüglich die Winkel

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3; \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$$

machen, — so zerlegt man jede dieser Drehungen (nach I.) in drei Drehungen um die drei Koordinaten-Axen; dann vereinigt man alle Drehungen um jede der Koordinaten-Axen durch Addition ihrer Winkel-Geschwindigkeiten (nach §. 65. Nr. 1.) in eine einzige, und setzt zuletzt diese drei Drehungen um die Koordina-

ten-Axen (nach II.) wiederum in eine einzige Drehung zusammen.

Man berechnet sich also

1) $\Sigma(\omega \cdot \cos\alpha) = X$; $\Sigma(\omega \cdot \cos\beta) = Y$; $\Sigma(\omega \cdot \cos\gamma) = Z$;

und dann

2) $$\omega_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

zuletzt aber

3) $$\cos\alpha_0 = \frac{X}{\omega_0}; \quad \cos\beta_0 = \frac{Y}{\omega_0}; \quad \cos\gamma_0 = \frac{Z}{\omega_0};$$

und dann ist ω_0 die Winkel-Geschwindigkeit der einzigen Drehung, in welche sich die gegebenen n Drehungen vereinigen lassen; und die Axe nebst der Richtung dieser einzigen Drehung ist dadurch gegeben, daß man die Winkel α_0, β_0, γ_0 kennt, welche die positive Seite der Dreh-Axe mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, während diese neue Dreh-Axe durch denselben Punkt O hindurch geht, in welchem sich die Dreh-Axen der n gegebenen Drehungen, der Voraussetzung zu Folge, schneiden.

IV. Findet sich aber

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{und} \quad Z = 0,$$

d. h.

$$\Sigma(\omega \cdot \cos\alpha) = 0, \quad \Sigma(\omega \cdot \cos\beta) = 0 \text{ und } \Sigma(\omega \cdot \cos\gamma) = 0,$$

so halten sich dieselben n Drehungen im Gleichgewicht, und diese drei Gleichungen sind zum Gleichgewicht nothwendig und ausreichend.

V. Sollten in der Aufgabe (III.) die n Dreh-Axen alle in einer und derselben Ebene liegen, so kann man dieselbe Ebene zur Ebene XOY nehmen, und dann sind die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ alle $= 90^0$, ihre Kosinusse $= 0$; also ist dann $Z = 0$, und man findet bloß, indem man

1) $\Sigma(\omega \cdot \cos\alpha) = X$ und $\Sigma(\omega \cdot \cos\beta) = Y$

berechnet, die Gleichung

2) $$\omega_0 = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

so wie noch

3) $\cos\alpha_0 = \frac{X}{\omega_0}$; $\cos\beta_0 = \frac{Y}{\omega_0}$ und $\cos\gamma_0 = 0$,

aus welcher letztern Gleichung hervorgeht, daß die Dreh-Axe der einzigen (mittlern) Drehung dann allemal mit den Axen der gegebenen (Seiten-) Drehungen in derselben Ebene liegt.

Und findet sich in diesem besondern Falle

$$X = 0 \quad \text{und} \quad Y = 0,$$

d. h. $\Sigma(\omega \cdot \cos\alpha) = 0$ und $\Sigma(\omega \cdot \cos\beta) = 0$,

so halten sich diese n Drehungen im Gleichgewicht, und diese zwei Gleichungen sind dann zum Gleichgewicht nothwendig und ausreichend.

Anmerk. Man sieht die völlige Analogie dieser Zusammensetzung der Drehungen in dem Falle, wo die Dreh-Axen alle in einem und demselben Punkte sich schneiden, mit den Sätzen der Statik, wo Kräfte, die einen und denselben Atom angreifen, in eine einzige mittlere Kraft vereinigt werden sollen.

Wir wollen aber nun die Fälle betrachten, wo Drehungen vereinigt werden sollen, welche um Axen statt finden, die sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden. Dabei machen wir den Anfang mit dem Falle, wo die Dreh-Axen unter sich parallel sind.

§. 67.

Betrachten wir mehrere Drehungen um parallele Axen, so unterscheiden wir Drehungen in einem und demselben Sinne, und Drehungen im entgegengesetzten Sinne, je nachdem, wenn wir uns die parallelen Dreh-Axen parallel mit sich fortgerückt denken, bis sie zusammenfallen, dann die Drehungen in einem und demselben Sinne oder in entgegengesetztem Sinne erfolgen.

§. 68.

I. Wirken auf einen freien festen Körper zwei Systeme von Kräften, von denen das eine eine Drehung um eine Dreh-Axe A_1B_1, mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_1, das andere aber in derselben Richtung eine Drehung um eine mit A_1B_1 parallele

Dreh-Axe A_2B_2 (Fig. 11.) mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_2 hervorbringt, gleichzeitig, so beginnt eine Drehung mit der Winkel-Geschwindigkeit

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

um eine Dreh-Axe A_0B_0, welche mit den Dreh-Axen A_1B_1 und A_2B_2 in derselben Ebene liegt, mit ihnen wiederum parallel läuft, und welche zwischen A_1B_1 und A_2B_2 so liegt, daß sich ihre Entfernungen von A_1B_1 und A_2B_2 umgekehrt wie die Winkel-Geschwindigkeiten, nämlich direkt wie ω_2 zu ω_1 verhalten.

Denn man denke sich ein ganz beliebiges Element μ in m (Fig. 11.), lege durch selbiges eine Ebene senkrecht auf die Dreh-Axen, welche letztere in C_1 und C_2 schneiden mag, — nehme in der Linie C_1C_2 einen Punkt C_0 so, daß

1) $$C_1C_0 : C_2C_0 = \omega_2 : \omega_1$$

ist, und lege durch C_0 mit A_1B_1 und A_2B_2 eine Parallele A_0B_0. Hernach errichte man auf den drei Ebenen mA_1B_1, mA_2B_2 und mA_0B_0, drei senkrechte Linien mD_1, mD_2 und mD_0, und mache

2) $$mD_1 = \mu\cdot mC_1\cdot\omega_1 \quad \text{und} \quad mD_2 = \mu\cdot mC_2\cdot\omega_2,$$

so sind mD_1 und mD_2 die, bezüglich bei den Drehungen um die Axen A_1B_1 und A_2B_2 statt findenden „Größen der Bewegung" des Elementes μ. Wir werden nun erweisen 1) daß wenn man diese Kräfte mD_1 und mD_2 nach dem Kräften-Parallelogramm in eine mittlere Kraft vereinigt, solche der Richtung nach mit der auf mA_0B_0 senkrecht gedachten mD_0 zusammenfallen müsse; und 2) daß die Größe dieser mittlern Kraft

$$= \mu\cdot mC_0\cdot(\omega_1 + \omega_2)$$

ist.

Man hat nämlich zunächst

3) $$\text{W. } D_1mD_2 = \text{W. } C_1mC_2; \quad \text{W. } D_1mD_0 = \text{W. } C_1mC_0$$

und $$\text{W. } D_2mD_0 = \text{W. } C_2mC_0.$$

In den Dreiecken C_1mC_0 und C_2mC_0 ist aber

$$C_1C_0 : C_2C_0 = mC_1\cdot\sin C_1mC_0 : mC_2\cdot\sin C_2mC_0,$$

oder (wegen 1. und 3.)

$$\omega_2 : \omega_1 = mC_1\cdot\sin D_1mD_0 : mC_2\cdot\sin D_2mD_0;$$

d. h. $$mC_1\cdot\omega_1\cdot\sin D_1mD_0 = mC_2\cdot\omega_2\cdot\sin D_2mD_0;$$

oder

4) $$mC_1\cdot\omega_1 : mC_2\cdot\omega_2 = \sin D_2mD_0 : \sin D_1mD_0.$$

Es folgt daher (aus 2. und 4.)

5) $$mD_1 : mD_2 = \sin D_2mD_0 : \sin D_1mD_0;$$

und diese Proportion setzt außer Zweifel, daß wenn man mD_1 und mD_2

durch ein Parallelogramm mit einander verbindet, die Richtung der Diagonale mit der Richtung mD_0 zusammenfallen müsse.

Ist nun D_0 die 4te Ecke dieses Parallelogramms, also mD_0 die Größe der mittlern Kraft; so kann man solche berechnen aus einer der beiden Proportionen

$$mD_0 : mD_1 : mD_2 = \sin D_1mD_2 : \sin D_2mD_0 : \sin D_1mD_0,$$

welche z. B. sogleich

$$6) \quad mD_0 = mD_1 \cdot \frac{\sin D_1mD_2}{\sin D_2mD_0} = mD_1 \cdot \frac{\sin C_1mC_2}{\sin C_2mC_0},$$

oder (wegen 2.)

$$7) \quad mD_0 = \mu \cdot \frac{\omega_1 \cdot mC_1 \cdot \sin C_1mC_2}{\sin C_2mC_0}$$

liefert. Nun ist aber in den Dreiecken C_1mC_2 und C_2mC_0

$$mC_1 \cdot \sin C_1mC_2 : mC_0 \cdot \sin C_2mC_0 = C_1C_2 : C_0C_2,$$

oder (wegen 1.) $\qquad = \omega_1 + \omega_2 : \omega_1;$

folglich ist

$$8) \quad mC_1 \cdot \omega_1 \cdot \sin C_1mC_2 = mC_0 \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot \sin C_2mC_0.$$

Dadurch geht aber die (7.) über in

$$9) \quad mD_0 = \mu \cdot mC_0 \cdot (\omega_1 + \omega_2).$$

Jedes Element μ hat also vermöge der beiden Drehungen um A_1B_1 und A_2B_2 eine „Größe der Bewegung" $= \mu \cdot mC_0 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$, also eine Geschwindigkeit $mC_0 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$ in der auf die Ebene mA_0B_0 senkrecht gedachten Richtung mD_0; und diese Geschwindigkeiten sind demnach mit der Entfernung mC_0 (des Elementes von A_0B_0) proportional; also erfolgt eine Drehung um A_0B_0 mit der Winkel-Geschwindigkeit $\omega_1 + \omega_2$, welche durch ω_0 bezeichnet werden kann.

II. Dieses Resultat gilt noch, wenn auch die Drehung mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_2 in einer, der erstern (welche die Winkel-Geschwindigkeit ω_1 hat) entgegengesetzten Richtung (§. 67.) statt findet, nur daß dann die Dreh-Axe A_0B_0 (wie in Fig. 12.) zur Seite liegt, und in der Gleichung

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

statt ω_2 die negativ genommene Winkel-Geschwindigkeit gesetzt werden muß.

Man überzeugt sich sehr leicht davon, wenn man die vorangegangenen Betrachtungen für die Figur (12.) mutatis mutandis wiederholt.

III. Es ergiebt sich aber hier für den Fall eine Ausnahme, wo die Drehungen im entgegengesetzten Sinne aber mit gleichen Winkel-Geschwindigkeiten $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ statt finden. Es zeigt sich dann (Fig. 12.), daß die aus

$$mD_1 = \mu \cdot mC_1 \cdot \omega \text{ und } mD_2 = \mu \cdot mC_2 \cdot \omega$$

zusammengesetzte mittlere Kraft mD_0, auf der Ebene der Axen A_1B_1 und A_2B_2 senkrecht steht, und der Größe nach $= \mu \cdot \omega \cdot C_1C_2$ ist, wo ω die gemeinschaftliche Winkel-Geschwindigkeit und C_1C_2 den senkrechten Abstand der Dreh-Axen A_1B_1 und A_2B_2 von einander vorstellt. Und weil dies für jedes Element μ des Körpers gilt, dessen ganze Masse M ist, so werden also in diesem Falle alle Elemente von parallelen und gleichen Kräften angegriffen. Der ganze Körper wird daher jetzt in seinem Schwer-Punkte senkrecht auf die Ebene der Axen A_1B_1 und A_2B_2 von der Kraft $M \cdot \omega \cdot C_1C_2$ erfaßt; und dies ist die Kraft, welche statt der beiden Drehungen, die mit gleichen Winkel-Geschwindigkeiten ω im entgegengesetzten Sinne um diese parallelen Dreh-Axen gleichzeitig statt finden sollten, gesetzt werden muß.

Es läßt sich dies auf einem ganz analogen Wege nachweisen, wie in dem allgemeinen Falle, wo ω_1 und ω_2 noch ungleich sind. Allein in diesem besondern Falle ist der nachstehende Gang der einfachere. So wie nämlich (Fig 12.) $mD_1 = r_1\omega$ senkrecht auf mC_1, und $mD_2 = r_2\omega$ senkrecht auf mC_2 errichtet sind und das Parallelogramm $mD_1D_2D_0$ construirt ist, so ist das Dreieck mD_0D_2 dem Dreieck mC_1C_2 ähnlich, weil

$$\text{W. } mD_2D_0 = \text{W. } C_1mC_2$$

ist, und die Seiten, welche diesen Winkel einschließen, wegen $C_1m = r_1$ und $C_2m = r_2$ proportionirt sind. Daher ist auch

$$mD_0 : mD_2 = C_1C_2 : C_2m$$

d. h.

$$mD_0 : r_2\omega = C_1C_2 : r_2$$

oder es ist

$$mD_0 = \omega \cdot C_1C_2.$$

Zu gleicher Zeit muß, weil in den gedachten ähnlichen Dreiecken zwei Paar Seiten auf einander senkrecht stehen, auch das dritte Paar, nämlich mD_0 und C_1C_2 mit einander einen rechten Winkel bilden.

Also ist bewiesen, daß die mittlere Kraft mD_0, in welche sich die beiden Dreh-Kräfte mD_1 und mD_2 vereinigen, der Größe nach $= \omega \cdot C_1C_2$, der Richtung nach aber auf C_1C_2 und daher auch auf der Ebene der Dreh-Axen senkrecht steht. — Das übrige folgt dann von selbst.

§. 69.

Nennen wir diesen Fall ein Gegen-Paar von Drehungen; das Produkt $\omega \cdot C_1C_2$ aus der gemeinschaftlichen Winkel-Geschwindigkeit ω in die Entfernung C_1C_2 der beiden parallelen Dreh-Axen von einander, sein Moment, und verstehen wir

unter seiner Ebene die Ebene, in welcher seine beiden Axen liegen, so wie unter seiner Richtung die Richtung der einzigen, durch den Schwer-Punkt des Körpers gehenden Kraft, welche es repräsentirt *), so folgt sogleich unmittelbar:

1) Ein solches Gegen-Paar von Drehungen, dessen Moment m_0 ist, ist allemal gleichgeltend mit einer auf seiner Ebene senkrechten und durch den Schwer-Punkt des Körpers gehenden Kraft von der Größe $G \cdot m_0$, wenn G die Masse des Körpers vorstellt.

2) Für jede einzige durch den Schwer-Punkt des Körpers, dessen Masse G ist, gehende Kraft P, kann man allemal ein Drehungs-Gegen-Paar setzen, dessen Moment $\frac{P}{G}$ ist, und dessen Dreh-Axen in einer beliebigen auf die Richtung der Kraft P senkrechten Ebene, beliebig unter sich parallel, gedacht werden können, wenn man nur die Richtungen der Drehungen, der Richtung der Kraft P angemessen, d. h. so nimmt, wie die Untersuchung (III. des §. 68.) es mit sich bringt.

3) Für ein solches Gegen-Paar von Drehungen kann man jedes der unzählig vielen andern Gegen-Paare von Drehungen setzen, welche dasselbe Moment und dieselbe Richtung haben, und deren Ebenen mit der Ebene des gegebenen Gegen-Paares parallel sind, oder beliebig zusammenfallen; auch können die Dreh-Axen in der Ebene beliebig anders gelegt werden; so daß sie, wenn sie nur beide unter sich parallel bleiben, paarweise mit einander ganz beliebige Winkel machen können. — Und ist m_0 das Moment des Gegen-Paares und q die beliebig angenommene Entfernung der Dreh-Axen von einander, so ist $\frac{m_0}{q}$ die gemeinschaftliche Winkel-Geschwindigkeit dieses Gegen-Paares von Drehungen.

4) Eine beliebige Anzahl n von Drehungs-Gegen-Paaren, deren Dreh-Axen in derselben oder in parallelen Ebenen

---

*) Zwei Gegen-Paare von Drehungen können daher einerlei Richtungen, auch verschiedene Richtungen haben.

liegen, lassen sich immer in ein einziges Gegen-Paar von Drehungen vereinigen, dessen Moment der Summe der Momente der gegebenen Gegen-Paare gleich ist, sobald man nur die Momente derjenigen Gegen-Paare als negativ in Rechnung bringt, welche die entgegengesetzte Richtung haben. Dieses neue Gegen-Paar hat dann die erstere oder die letztere Richtung, je nachdem jene Summe der Momente als eine positive oder eine negative Zahl sich ausweist; und seine Dreh-Axen liegen in derselben oder in irgend einer damit parallelen Ebene irgend wie, wenn auch nothwendig immer unter sich parallel.

Ist aber die Summe aller n Momente der Null gleich, so halten sich alle diese Drehungs-Gegen-Paare im Gleichgewicht.

5) Drei Drehungs-Gegen-Paare in drei auf einander senkrechten Koordinaten-Ebenen, in denen wir OZ, OY und OX als die positiven Richtungen ansehen, so daß wir ihre Momente positiv oder negativ in Rechnung bringen, je nachdem die Gegen-Paare diese oder die entgegengesetzten Richtungen haben, — lassen sich immer wie folgt in ein einziges Gegen-Paar von Drehungen vereinigen. Sind nämlich L, M, N die drei positiven oder negativen Zahlen, welche die Momente der drei erstern Drehungs-Gegen-Paare bezüglich in den Ebenen XOY, XOZ und YOZ vorstellen, und sind λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung des neuen gesuchten mittlern Drehungs-Gegen-Paares mit den drei Axen OX, OY, OZ macht, so findet sich

$$m_0 = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

und

$$\cos\lambda = \frac{N}{m_0}; \quad \cos\mu = \frac{M}{m_0} \text{ und } \cos\nu = \frac{L}{m_0}.$$

Und umgekehrt: jedes Drehungs-Gegen-Paar, dessen Moment m_0 ist, und dessen Richtung mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die Winkel λ, μ, ν macht, läßt sich allemal in drei Drehungs-Gegen-Paare zerlegen, deren Axen in den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ, YOZ übrigens beliebig liegen, und deren Momente bezüglich

$$m_0 \cdot \cos\nu, \quad m_0 \cdot \cos\mu, \quad m_0 \cdot \cos\lambda.$$

sind, welche letzteren Produkte positiv, negativ oder auch Null seyn können, und dadurch zu gleicher Zeit die Richtung dieser Seiten-Gegen-Paare von Drehungen bestimmen.

Man denkt sich nämlich statt der Drehungs-Gegen-Paare die gleichgeltenden Kräfte. Da letztere alle durch den Schwer-Punkt des Körpers gehen, so lassen sie sich (nach I. Th. Mech. Kap. II.) ohne weiteres in eine einzige, ebenfalls durch den Schwer-Punkt gehende Kraft, also in ein Drehungs-Gegen-Paar vereinigen.

6) Eine beliebige Anzahl n von Drehungs-Gegen-Paaren, deren Momente m_1, m_2, m_3, m_4, ⋯ m_n sind, deren Axen in beliebigen Ebenen liegen, und deren Richtungen mit dreien Koordinaten-Axen OX, OY, OZ bezüglich die Winkel

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2; \cdots \lambda_n, \mu_n, \nu_n$$

machen, lassen sich allemal in ein einziges Drehungs-Gegen-Paar vereinigen, wenn sie sich nicht sämmtlich im Gleichgewicht halten. Dieses einzige Drehungs-Gegen-Paar wird durch folgende Rechnung gefunden. Man findet zuerst

$$\text{I.} \quad L = \Sigma(m \cdot \cos\nu); \quad M = \Sigma(m \cdot \cos\mu); \quad N = \Sigma(m \cdot \cos\lambda),$$

hernach

$$\text{II.} \qquad m_0 = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

und zuletzt

$$\text{III.} \quad \cos\lambda_0 = \frac{N}{m_0}; \quad \cos\mu_0 = \frac{M}{m_0}; \quad \cos\nu_0 = \frac{L}{m_0};$$

und dann ist m_0 das Moment des neuen mittlern Gegen-Paares von Drehungen, und λ_0, μ_0, ν_0 sind die Winkel, welche die Richtung desselben mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht.

Findet sich aber

$$L = 0, \quad M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0,$$

d. h.

$$(\odot) \cdots \Sigma(m \cdot \cos\nu) = 0; \quad \Sigma(m \cdot \cos\mu) = 0; \quad \Sigma(m \cdot \cos\lambda) = 0,$$

so halten sich alle diese Drehungs-Gegen-Paare (d. h. alle diese durch den Schwer-Punkt des Körpers gehenden Kräfte, welche sie vorstellen) im Gleichgewicht.

§. 70.

I. Statt jeder Drehung mit der Winkel-Geschwindigkeit ω

um irgend eine Axe UU′ (Fig. 9.) kann man eine andere Drehung setzen, welche mit derselben Winkel-Geschwindigkeit ω in derselben Richtung um eine andere, durch einen beliebig gegebenen Punkt O mit der erstern parallel gelegte Dreh-Axe OV statt findet, wenn man nur dann jedesmal noch ein Drehungs-Gegen-Paar hinzufügt, dessen Moment $\omega \cdot q$ ist (wenn q die Entfernung des Punktes O von der Dreh-Axe UU′ vorstellt), dessen Axen irgend wo in der Ebene OUU′ gedacht werden können, und dessen Richtung durch die Richtung der gegebenen Drehung um UU′ bestimmt und gegeben ist.

Man denkt sich nämlich um die Axe OV zwei Drehungen mit der Winkel-Geschwindigkeit ω, aber die eine im entgegengesetzten Sinne der andern, so daß sie sich im Gleichgewicht halten, noch hinzu. Dann hat man die eine Drehung um OV und noch das Gegen-Paar von Drehungen.

II. Da jedes Gegen-Paar von Drehungen einer Kraft $G \cdot m_0$ gleichkommt, welche senkrecht auf die Ebene des Gegen-Paares den Schwer-Punkt angreift, wenn G die Masse des Körpers und m_0 das Moment des Gegen-Paares ist, so folgt (aus I.) daß man statt jeder bloß drehenden Bewegung um irgend eine bestimmte Dreh-Axe UU′ mit beliebiger Winkel-Geschwindigkeit ω allemal eine fortschreitende Bewegung von beliebiger Geschwindigkeit v in beliebiger aber auf UU′ senkrechten Richtung, nebst einer drehenden Bewegung substituiren kann, welche letztere dieselbe Winkel-Geschwindigkeit ω hat, aber um eine andere, von der Größe und Richtung von v abhängige, mit UU′ parallele Dreh-Axe VV′ statt findet. Dabei findet sich, weil v das Moment des Gegen-Paares ist, der Abstand der Dreh-Axen VV′ und UU′ von einander, $= \frac{v}{\omega}$, während VV′ in der durch UU′ auf die Richtung von v senkrecht gelegten Ebene genommen werden muß, diesseits oder jenseits von UU′, je nachdem die Richtung der Geschwindigkeit v die eine oder die gerade entgegengesetzte ist.

Es versteht sich dabei immer von selbst, daß alle diese Aussprüche nur für den B e g i n n der Bewegung gelten.

III. Es entsteht nun die Frage, ob man eine Bewegung, welche in irgend einem Augenblicke eine fortschreitende ist mit der Geschwindigkeit v in irgend einer Richtung, und zu gleicher Zeit eine drehende um irgend eine Axe VV′ mit der Winkel-Geschwindigkeit ω, — ob auch allemal eine bloß drehende Bewegung um irgend eine andere Dreh-Axe UU′ dafür substituirt werden kann, ohne fortschreitende Bewegung? —

Statt der fortschreitenden Bewegung mit der Geschwindigkeit v in gegebener Richtung, kann man ein Gegen-Paar von Drehungen in einer auf die Richtung von v senkrechten Ebene, welches das Moment $m_0 = v$ hat, substituiren. Die vorstehende Frage ist nun: ob man ein solches Gegen-Paar von Drehungen und eine Drehung um eine gegebene Axe bloß in eine Drehung verwandeln könne, oder nicht? —

a) Liegt die Dreh-Axe VV′ parallel mit der Ebene des Gegen-Paares, d. h. (weil letztere immer mit sich selbst parallel fortgerückt werden kann) in der Ebene des Gegen-Paares selbst, — steht also die Dreh-Axe VV′ senkrecht auf der Richtung v der fortschreitenden Bewegung, so ist die Vereinigung der fortschreitenden Bewegung und der drehenden, in eine einzige bloß drehende Bewegung, allemal möglich und zwar auf folgende Art: Man denkt sich die eine Axe des Gegen-Paares mit VV′ zusammenfallend, die andere WW′ (Fig. 14.) um die Längen-Einheit CD = 1 von ihr entfernt, so daß, weil v das Moment des Gegen-Paares ist, dieselbe Zahl v auch die gemeinschaftliche Winkel-Geschwindigkeit desselben ausdrückt. Dann vereinigen sich die beiden Drehungen um VV′ in eine einzige um dieselbe Axe mit der Winkel-Geschwindigkeit $\omega + v$, während die andere Drehung um WW′ die Winkel-Geschwindigkeit $-v$ hat. Diese beiden Drehungen mit ungleichen und entgegengesetzten Winkel-Geschwindigkeiten um die parallelen Axen VV′ und WW′ vereinigen sich dann (nach §. 68.) in eine einzige Drehung, welche die Winkel-Geschwindigkeit $(\omega + v) + (-v)$ d. h. ω hat, und deren Dreh-Axe UU′ von VV′ um CO abliegt, dergestalt, daß

$$CO : DO = v : v + \omega$$

oder
$$CO : CD = v : \omega$$

ist, so daß, weil $CD = 1$ ist,

$$CO = \frac{v}{\omega}$$

wird.

b) Steht aber die Dreh-Axe VV' auf der Richtung der fortschreitenden Bewegung (welche die Geschwindigkeit v hat) nicht senkrecht, d. h. fällt die Ebene des Gegen-Paares, auch wenn sie parallel mit sich fortgerückt wird, mit der Dreh-Axe VV' nicht zusammen, sondern begegnet diese (unendlich gedachte) Dreh-Axe VV' der Ebene des Gegen-Paares in einem einzigen Punkte D, so ist eine Vereinigung beider Bewegungen in eine einzige bloß drehende nicht möglich. Wohl aber kann man jetzt auf unendlich viele Arten zwei Drehungen finden, um Axen, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, und welche statt der gegebenen fortschreitenden und zugleich drehenden Bewegung gesetzt werden können. — Zu dem Ende läßt man die eine Dreh-Axe des Gegen-Paares von Drehungen durch den Punkt D gehen, in welchem die Ebene des Gegen-Paares von der Dreh-Axe VV' getroffen wird, und vereinigt die beiden Drehungen um die durch D gehenden Axen (nach §. 65. Anmerk. 2.) in eine einzige. Diese und die zweite Drehung des Drehungs-Gegen-Paares sind dann die gesuchten. — Je weiter man dabei die Dreh-Axen des Gegen-Paares auseinander legt, desto geringere Winkel-Geschwindigkeit hat die zweite der gefundenen Drehungen. — Da man ferner die parallelen Dreh-Axen in der Ebene des Gegen-Paares nach Belieben sich drehen lassen kann, so ändern sich danach wiederum die Richtungen der Dreh-Axen und die Winkel-Geschwindigkeiten der als Endresultat gefundenen zwei Drehungen. — Und da endlich die Ebene des Gegen-Paares beliebig parallel mit sich fortrücken kann, so ändert sich die Lage des Durchschnitts-Punktes D in VV' nach Belieben, und damit wiederum die Lage der Dreh-Axen der beiden als Endresultat gefundenen Drehungen. (Vergl. II. Th. §. 25.)

§. 71.

Hat man n gleichzeitige Drehungen eines und desselben Körpers mit den Winkel-Geschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots \omega_n$ um Dreh-Axen, welche beliebig im Raume liegen, so kann man (nach §. 70. I.) irgend einen Punkt O zum Versammlungs-Punkte nehmen, die gegebenen n Dreh-Axen alle parallel mit sich durch den Punkt O gehen lassen, und daselbst alle n Drehungen in eine einzige (Versammlungs-) Drehung vereinigen, wenn sie sich nicht daselbst im Gleichgewicht halten. Diese einzige Drehung findet dann um eine Dreh-Axe statt, welche selbst wieder durch den Punkt O geht und ihrer positiven Seite nach genau bestimmt ist (nach §. 66. III.), während das etwanige Daseyn des Gleichgewichts der in O versammelten Drehungen aus (§. 66. IV.) erkannt wird.

Sind dann $q_1, q_2, q_3, \cdots q_n$ die Entfernungen des Versammlungs-Punktes O von den gegebenen Dreh-Axen, so treten in den durch letztere und durch den Punkt O gegebenen Ebenen noch n Drehungs-Gegen-Paare hinzu, deren Momente bezüglich $\omega_1 q_1, \omega_2 q_2, \omega_3 q_3, \cdots \omega_n q_n$ sind, und welche entweder sich im Gleichgewichte halten, oder in ein einziges Drehungs-Gegen-Paar vereinigt werden können, dessen Richtung, dessen Ebene und dessen Moment (nach §. 69. Nr. 6.) berechnet werden.

Dieses mittlere Drehungs-Gegen-Paar ist aber, wenn m_0 dessen Moment ist, der Repräsentant einer in der Richtung desselben den Schwer-Punkt erfassenden Kraft von der Größe $G \cdot m_0$, wenn G die Masse des Körpers vorstellt.

Es sind daher vier Fälle möglich:

a) Man findet eine Drehung um eine durch den Versammlungs-Punkt O gehende Dreh-Axe, welche wir Versammlungs-Drehung nennen, und außerdem noch eine durch den Schwer-Punkt des Körpers gehende Kraft von berechneter Richtung und Größe (d. h. ein Gegen-Paar von Drehungen), oder

b) man findet bloß eine Versammlungs-Drehung; oder

c) man findet bloß ein Gegen-Paar von Drehungen, d. h.

eine den Schwer-Punkt des Körpers erfassende Kraft (also ein bloßes Streben nach fortschreitender Bewegung); oder endlich

d) alle n gegebenen Drehungen halten sich genau im Gleichgewicht.

Außer diesen vier Fällen, welche das Endresultat der Vereinigung von n beliebigen Drehungen darbieten kann, ist kein fünfter Fall denkbar.

§. 72.

In den drei letztern Fällen ist an keine größere Vereinfachung des Endresultats mehr zu denken. In dem Falle (§. 71. a.) dagegen wird man (nach §. 70.) die erhaltene Versammlungs-Drehung und das zugehörige Gegen-Paar von Drehungen allemal in eine einzige Drehung vereinigen können, so oft die Dreh-Axe der erstern mit der Ebene des letztern parallel läuft oder zusammenfällt, so daß dieser Fall dann von dem Falle (b) nicht verschieden ist. Läuft dagegen die Dreh-Axe der Versammlungs-Drehung nicht parallel mit der Ebene des Gegen-Paares, und fällt die erstere auch nicht mit der letztern zusammen, so kann man doch auf unendlich viele Arten zwei Drehungen erhalten, um Axen, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, und welche statt des Endresultates gesetzt werden können (nach §. 70. III.). Durch diese letztere Umformung ist jedoch in der Regel nichts gewonnen, so daß man sich in diesem Falle lieber mit einer drehenden Bewegung und mit dem zugehörigen Gegen-Paare von Drehungen, d. h. mit der drehenden und mit der fortschreitenden Bewegung begnügt.

Doch vergesse man immer nicht, daß nur von einem bestimmten Augenblicke der Bewegung die Rede seyn kann, also vielmehr nur von dem Bestreben nach Drehung oder nach Fortschreiten.

§. 73.

Verfolgt man dieses alles, welches dem Verfahren des (II. Th. §. 26.) vollkommen analog ist durch Rechnung, so bekommt

man Rechnungs-Resultate, welche den im (§. 29. des II. Th.) erhaltenen wiederum vollkommen analog seyn müssen.

I. Es seyen nämlich $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ die n Winkel-Geschwindigkeiten der n Drehungen, deren Dreh-Axen mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ bezüglich die Winkel

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \cdots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$$

machen; ferner seyen

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \cdots x_n, y_n, z_n$$

die Koordinaten-Werthe von n Punkten, welche bezüglich in diesen n Dreh-Axen liegen; endlich lasse man alle Dreh-Axen parallel mit sich fortrücken, bis sie sich alle in dem Versammlungs-Punkte O schneiden. Dann vereinigen sich alle Drehungen in die einzige (Versammlungs-) Drehung, welche die Winkel-Geschwindigkeit ω_0 haben mag, deren Dreh-Axe durch denselben Punkt O hindurchgeht, während ihre positive Seite mit den Koordinaten-Axen bezüglich die Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ macht, so daß man diese letztern Stücke (nach §. 66. III.) berechnet. Man findet also zunächst aus den Gleichungen

$$1) \quad \Sigma(\omega \cdot \cos\alpha) = X; \quad \Sigma(\omega \cdot \cos\beta) = Y; \quad \Sigma(\omega \cdot \cos\gamma) = Z,$$

so daß X, Y, Z die Winkel-Geschwindigkeiten der drei Drehungen um die Koordinaten-Axen sind, in welche die Versammlungs-Drehung sich zerlegt; hernach berechnet man ω_0 aus der Gleichung

$$2) \qquad \omega_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

endlich finden sich die Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ aus den Gleichungen

$$3) \quad \cos\alpha_0 = \frac{X}{\omega_0}; \quad \cos\beta_0 = \frac{Y}{\omega_0} \text{ und } \cos\gamma_0 = \frac{Z}{\omega_0}.$$

II. Diese Versammlungs-Drehung existirt allemal, so oft nicht zu gleicher Zeit

$$X = 0, \quad Y = 0 \text{ und } Z = 0$$

ist, in welchem letztern Falle allein alle die in O versammelten Drehungen einander das Gleichgewicht halten.

III. Was nun die Vereinigung der n Drehungs-Gegen-Paare betrifft, so kann man sich jedes ihrer Momente als ein

Rechteck oder als das Doppelte eines Dreiecks denken, dessen Grundlinie die Winkel-Geschwindigkeit ω und dessen Höhe die Entfernung des Punktes O von der Dreh-Axe ist. Da nun bei der Vereinigung der Drehungs-Gegen-Paare (nach §. 69. Nr. 6.) die Projektionen dieser Momente auf die drei Koordinaten-Ebenen erforderlich sind, so müssen solche zunächst bestimmt werden. Man vereinfacht aber diese Bestimmungen bedeutend, wenn man sich gleich von vorne herein jede einzelne der gegebenen Drehungen (welche die Winkel-Geschwindigkeit ω hat, und deren Dreh-Axe mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die Winkel α, β, γ macht) an dem durch x, y, z gegebenen Punkte dieser Dreh-Axe in drei Drehungen zerlegt, deren Dreh-Axen bezüglich parallel mit OX, OY, OZ laufen, und deren Winkel-Geschwindigkeiten bezüglich $\omega \cdot \cos\alpha$, $\omega \cdot \cos\beta$ und $\omega \cdot \cos\gamma$ sind. Die (in I. bereits gefundene) Versammlungs-Drehung wird dadurch nicht verändert, wie der nächste Blick in die desfallsige (nach I. anzustellende) Rechnung sehen läßt; dagegen hat man nun 3n Gegen-Paare von Drehungen zu vereinigen, deren Ebenen mit den 3 Koordinaten-Ebenen bezüglich parallel laufen. Projicirt man nun die Momente der drei von ω herrührenden Seiten-Drehungen (mit den Winkel-Geschwindigkeiten $\omega \cdot \cos\alpha$, $\omega \cdot \cos\beta$, $\omega \cdot \cos\gamma$) auf die Koordinaten-Ebene XOY, so erhält man bezüglich

$$\omega \cdot y \cdot \cos\alpha, \qquad -\omega \cdot x \cdot \cos\beta \quad \text{und} \quad 0,$$

so daß die Summe aller Projektionen der Momente, von allen Gegen-Paaren von Drehungen, auf die Ebene XOY,

$$= \Sigma\omega(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta)$$

sich ergiebt. Das ganz analoge findet in Bezug auf die Projektionen der Momente in Bezug auf die beiden andern Koordinaten-Ebenen statt. Berechnet man sich daher

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma\omega(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) &= L, \\ \Sigma\omega(x \cdot \cos\gamma - z \cdot \cos\alpha) &= M, \\ \Sigma\omega(z \cdot \cos\beta - y \cdot \cos\gamma) &= N; \end{aligned} \right.$$

und dann noch

$$2) \qquad m_0 = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

so wie

3) $\cos\lambda_0 = \frac{N}{m_0}$, $\cos\mu_0 = \frac{M}{m_0}$ und $\cos\nu_0 = \frac{L}{m_0}$,

so hat man das neue zugehörige Gegen-Paar, dessen Moment das (in 2. berechnete) m_0 ist, und dessen Richtung mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die (in 3. berechneten) Winkel λ_0, μ_0 und ν_0 macht.

IV. Und nur wenn gleichzeitig

$$L = 0, \quad M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0$$

ist, halten sich alle Drehungs-Gegen-Paare einander das Gleichgewicht.

V. a) Finden also die sechs Gleichungen

$$X = 0, Y = 0, Z = 0, L = 0, M = 0, N = 0$$

zu gleicher Zeit statt, so halten sich alle n gegebenen Drehungen (mit den Winkel-Geschwindigkeiten ω_1, ω_2, ⋯ ω_n) das Gleichgewicht.

b) Finden aber nur die drei Gleichungen

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

statt und von den übrigen drei Gleichungen (in a) entweder keine oder doch nur eine, oder höchstens nur zwei derselben, so existirt ein Gegen-Paar von Drehungen, welches das (in III. berechnete) Moment m_0 hat, und dessen Richtung mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die (in III. berechneten) Winkel λ_0, μ_0, ν_0 macht; und dieses Gegen-Paar von Drehungen kann dann statt aller gegebenen Drehungen gesetzt werden. Dieses Gegen-Paar von Drehungen ist aber einer Kraft $G \cdot m_0$ gleich, deren Richtung durch den Schwer-Punkt des Körpers hindurchgeht und mit den Axen OX, OY, OZ bezüglich die Winkel λ_0, μ_0 und ν_0 macht.

c) Finden die 3 Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

statt, und von den andern drei Gleichungen (in a) entweder keine, oder nur eine, oder höchstens nur zwei derselben, so vereinigen sich alle gegebenen Drehungen in eine einzige mittlere Drehung, deren Dreh-Axe, Richtung und Winkel-Geschwindigkeit (in I.)

bestimmt sich findet (in so fern sie durch den Punkt O hindurchgehen muß).

VI. Ist

$$L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X = 0,$$

ohne daß gleichzeitig $X = Y = Z = 0$ ist, so stehen die durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und λ_0, μ_0 und ν_0 gegebenen Richtungen auf einander senkrecht, d. h. die Dreh-Axe der (in I. berechneten) (Versammlungs-) Drehung läuft dann mit der Ebene des zugehörigen und (in III. berechneten) Gegen-Paares von Drehungen parallel; und umgekehrt, so oft diese Lage der (Versammlungs-) Dreh-Axe gegen die Ebene des zugehörigen Gegen-Paares von Drehungen statt findet, so oft ist auch nothwendig

(⨀)… $$L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X = 0.$$

Dies ist also die Bedingungs-Gleichung, welche erfüllt seyn muß, damit sich alle n gegebenen Drehungen in eine einzige mittlere Drehung vereinigen lassen, während dann diese einzige (mittlere) Drehung (nach I.) näher bestimmt werden muß*).

Verfährt man aber dem (§. 30. des II. Th.) ganz analog, so finden sich auch noch die Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen x_0, y_0, z_0 eines ganz beliebigen Punktes der Dreh-Axe dieser nun existirenden einzigen mittleren Drehung, nämlich

(☾)… $$\begin{cases} X \cdot y_0 - Y \cdot x_0 = L, \\ Z \cdot x_0 - X \cdot z_0 = M, \\ Y \cdot z_0 - Z \cdot y_0 = N, \end{cases}$$

von denen jede aus den beiden andern (vermöge der Gleichung $L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X = 0$) hervorgeht. Dies sind also die Gleichungen der Geraden, mit welcher die Dreh-Axe der einzigen mittleren Drehung zusammenfällt.

VII. Im Allgemeinen, und namentlich wenn die Gleichung (⨀) nicht erfüllt ist, kann man nur die (in I.) erhaltene Ver-

---

*) Im Falle (V. c.) ist diese Bedingungs-Gleichung (⨀) erfüllt; darum fand sich auch daselbst nur eine einzige mittlere Drehung, und jener Fall gehört also hierher.

sammlungs-Drehung mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_0, und das (in III.) gefundene zugehörige Gegen-Paar von Drehungen, dessen Moment m_0 ist, beide im Verein genommen, statt aller n gegebenen Drehungen setzen.

§. 74.

In diesem letztern Falle kann man aber statt dieser Drehung (ω_0; α_0, β_0, γ_0) und dieses zugehörigen Gegen-Paares von Drehungen (m_0; λ_0, μ_0, ν_0) unzählig viele andere Drehungen und zugehörige Gegen-Paare finden, welche dasselbe leisten. Man denkt sich nämlich außer O einen andern beliebigen Versammlungs-Punkt O′ und rückt die Dreh-Axe OU parallel mit sich fort bis O′, so bekommt man statt der Drehung um OU mit der Winkel-Geschwindigkeit ω_0, jetzt eine Drehung um O′U′, welche dieselbe Richtung und dieselbe Winkel-Geschwindigkeit ω_0 hat, zu welcher aber noch ein Gegen-Paar von Drehungen hinzu gedacht werden muß, dessen Moment $\omega_0 \cdot q$ ist, wenn q die Entfernung des Punktes O′ von OU vorstellt, und dessen Ebene mit O′OU zusammenfällt. Dieses letztere Gegen-Paar läßt sich nun mit dem schon vorhandenen (m_0; λ_0, μ_0, ν_0) in ein einziges vereinigen, dessen Ebene und dessen Moment (d. h. λ'_0, μ'_0, ν'_0; m'_0) von der Ebene und dem Momente des anfänglich vorhandenen Gegen-Paares (λ_0, μ_0, ν_0; m_0) verschieden seyn wird.

§. 75.

Daraus lassen sich wiederum (ganz analog dem §. 32. des II. Th.) nachstehende Folgerungen ziehen:

I. Die Versammlungs-Drehung bleibt ihrer Richtung und Winkelgeschwindigkeit nach genau dieselbe, auch bleibt ihre Dreh-Axe immer parallel mit sich selbst, wie man auch den Versammlungs-Punkt O abändern möge.

II. Nimmt man den Versammlungs-Punkt O′ so, daß die Ebene des nun zugehörigen Gegen-Paares von Drehungen auf der Dreh-Axe der Versammlungs-Drehung senkrecht steht, so

ist das Moment des zugehörigen Gegen-Paares von Drehungen am kleinsten.

Denn so wie von O′U′ um q entfernt, ein neuer Versammlungs-Punkt O gewählt wird, so ist das neue zugehörige Gegen-Paar zusammengesetzt aus dem alten, dessen Moment m'_0, und dessen Ebene senkrecht auf O′U′ ist, und noch dem (nach §. 74.) neu hinzugetretenen, dessen Ebene auf der Ebene des erstern senkrecht steht, und dessen Moment $\omega_0 \cdot q$ ist. Daher ist das Moment m_0 des zu dem jetzigen neuen Versammlungs-Punkte O gehörigen Gegen-Paares (nach §. 69.) zu berechnen aus der Gleichung

1) $$m_0 = \sqrt{m'^2_0 + \omega_0^2 q^2};$$

und eben deshalb ist $m_0 > m'_0$.

III. Zu gleicher Zeit sehen wir (nach dem §. 69.), daß wenn ψ der Winkel ist, den die Richtung des neuen Gegen-Paars (m_0) mit der Richtung des alten (m'_0), also mit der Dreh-Axe der Versammlungs-Drehung macht, dann allemal

2) $$\cos\psi = \frac{m'_0}{m_0}$$ und 3) $$\sin\psi = \frac{\omega_0 q}{m_0}$$

gefunden wird, so daß

4) $$tg\,\psi = \frac{\omega_0 q}{m'_0}$$

wird. Die Entfernung q steht dabei immer auf der Ebene dieses Winkels ψ, den die Richtungen der beiden Gegen-Paare mit einander machen, senkrecht.

Diese Dreh-Axe O′U′, deren zugehöriges Gegen-Paar von Drehungen das kleinste Moment hat und mit seiner Ebene senkrecht auf O′U′ steht, kann die „zu diesen n gegebenen Drehungen gehörige Central-Dreh-Axe" genannt werden.

IV. Die Lage der Central-Dreh-Axe selbst findet man, wenn man zuerst zu einem beliebigen Versammlungs-Punkte O die Lage der Versammlungs-Dreh-Axe OU, die Winkel-Geschwindigkeit ω_0 der Versammlungs-Drehung, und die Ebene, so wie das Moment m_0 des zugehörigen Gegen-Paares bestimmt. Dann denkt man sich die Richtung des Gegen-Paars parallel mit sich

nach O fortgerückt, so macht sie daselbst mit der Dreh-Axe OU einen Winkel ψ, der nun bekannt ist. Auf die Ebene dieses Winkels errichtet man dann von O aus ein Loth q und macht solches

$$= \frac{m_0 \cdot sin \psi}{\omega_0},$$

wie sich dieser Werth aus der vorstehenden Gleichung (3.) ergiebt, so hat man den Punkt O' als Endpunkt dieses Lothes, durch welchen parallel mit OU die „Central-Axe" O'U' gelegt werden kann. Auf welcher der beiden Seiten der Ebene ψ das Loth q heraustreten muß, ist aber jedesmal leicht zu erkennen.

Dies Verfahren giebt auch sogleich noch das (kleinste) Moment m'_0 dieses zur Central-Dreh-Axe gehörigen Gegen-Paares, dessen Ebene auf der Central-Dreh-Axe senkrecht steht; es findet sich nämlich (aus 2)

$$5) \qquad m'_0 = m_0 \cdot cos \psi.$$

Man findet auch, wenn man durch O senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY, OZ legt, und die Bezeichnung des (§. 73.) beibehält, weil

$$cos \psi = cos \alpha_0 \cdot cos \lambda_0 + cos \beta_0 \cdot cos \mu_0 + cos \gamma_0 \cdot cos \nu_0$$

ist, noch

$$6) \qquad cos \psi = \frac{L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X}{m_0 \cdot \omega_0}$$

und daher (aus 5.)

$$7) \qquad m'_0 = \frac{L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X}{\omega_0}.$$

V. Die Koordinaten-Werthe a', b', c' dieses Punktes O', durch welchen die Central-Dreh-Axe parallel mit der erstern Dreh-Axe OU geht, lassen sich auch aus den drei Gleichungen

$$8) \quad \begin{cases} a'^2 + b'^2 + c'^2 = \dfrac{m_0^2 - m'^2_0}{\omega_0^2} \\ X \cdot a' + Y \cdot b' + Z \cdot c' = 0 \\ N \cdot a' + M \cdot b' + L \cdot c' = 0 \end{cases}$$

berechnen (vgl. II. Th. pag. 65.).

VI. Die Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen

a, b, c eines beliebigen Punktes der Central-Dreh-Axe finden sich eben so leicht (dem II. Th. §. 33. analog), und zwar so:

$$9)\quad \frac{Y \cdot a - X \cdot b + L}{Z} = \frac{X \cdot c - Z \cdot a + M}{Y} = \frac{Z \cdot b - Y \cdot c + N}{X};$$

und diese Gleichungen der Central-Axe fallen mit denen der einzigen mittlern Dreh-Axe genau zusammen, so oft das Moment des zugehörigen Gegen-Paares Null ist, d. h. so oft

$$L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X = 0$$

gefunden wird.

VII. Wir beschliessen diesen Paragraphen mit dem Bemerken, daß auch der (§. 34. des II. Th.) hier wiederholt werden kann, wenn man nur statt der Kräfte dort, hier die Winkel-Geschwindigkeiten der Drehungen, und statt der Richtungen der Kräfte dort, hier die Richtungen der Dreh-Axen substituirt, ferner statt der Projektion der statischen Momente der Kräfte dort, hier die Projektionen der Momente derjenigen Gegen-Paare von Drehungen setzt, welche (nach §. 70.) allemal hinzutreten müssen, so oft die Dreh-Axen der einzelnen gegebenen n Drehungen parallel mit sich nach dem Versammlungs-Punkte fortgerückt werden.

Die Dynamik fester Körper.

Sechstes Kapitel.

Einige Eigenschaften der Ellipsoide. Gleichungen der Poloide und Serpoloide.

§. 76.

I. Die Projektion einer Ellipse auf irgend eine Ebene ist wieder eine Ellipse; und umgekehrt, wenn die Projektion einer ebenen Kurve auf irgend eine Ebene, eine Ellipse ist, so ist die gedachte ebene Kurve selber eine Ellipse. — Ein beliebiger Durchmesser und der Mittel-Punkt der Projektions-Ellipse sind dabei bezüglich die Projektion eines Durchmessers und die des Mittel-Punktes der Ellipse im Raume.

Die projicirende Fläche ist nämlich immer eine Cylinder-Fläche mit elliptischem Querschnitte, und solche wird von beliebigen Ebenen immer nur in Ellipsen geschnitten.

II. Hat man nun drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen SX, SY, SZ, auf welche die Gleichung

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bezogen wird, so stellt solche ein Ellipsoid vor, dessen drei Haupt-Durchmesser mit SX, SY, SZ zusammenfallen und der Länge nach bezüglich 2a, 2b, 2c sind (vgl. I. Th. Geom. §. 17.).

Denn man lege eine beliebige Ebene E durch diesen Körper, welche dadurch gegeben seyn mag, daß man die Winkel λ, μ, ν hat, welche die auf ihr senkrechte Gerade mit den drei Koordinaten-Axen SX, SY, SZ macht, und noch die senkrechte Entfernung e' dieser Ebene von dem Punkte S. — Dann ist die Gleichung dieser Ebene (nach I. Th. Geom. §. 11. Anmerkung)

$$2) \quad x \cdot \cos\lambda + y \cdot \cos\mu + z \cdot \cos\nu = e'.$$

Diese beiden Gleichungen (1. und 2.), wenn man sich in ihnen die x, y, z als dieselben denkt, gehören nun der Durchschnittsfigur an, welche die Ebene mit dem Körper bildet. Die Gleichung für die Projektion dieser Durchschnittsfigur auf die Koordinaten-Ebene XSY erhält man nun, wenn z (aus 1. u. 2.) eliminirt wird; sie ist

$$3) \quad a^2(b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2) \cdot y^2 + 2a^2b^2 \cdot \cos\mu \cdot (x \cdot \cos\lambda - e') \cdot y + b^2 \cdot (a^2 \cdot \cos\lambda^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2) \cdot x^2 - 2a^2b^2e' \cdot \cos\lambda \cdot x + a^2b^2 \cdot (e'^2 - c^2 \cdot \cos\nu^2) = 0.$$

Weil aber hier das Quadrat des Koefficienten von xy kleiner ist als das vierfache Produkt der Koefficienten von x^2 und y^2, so ist diese Projektion eine Ellipse (nach I. Th. Geom. §. 8.). Folglich ist (nach I.) die Durchschnittsfigur selbst eine Ellipse. — Jede beliebige Durchschnitts-Ebene bildet also auf der Oberfläche des Körpers eine Ellipse; demnach ist der Körper ein Ellipsoid.

§. 77.

Suchen wir nun von diesen beiden Ellipsen die Mittelpunkte. Zu dem Ende müssen wir jeden der beiden Werthe von x suchen, für welchen die zugehörigen beiden Werthe von y einander gleich werden; dann aber die halbe Summe dieser beiden Werthe von x, zum Abscissen-Werth $\mathfrak{x}$ des Mittel-Punktes der Projektions-Ellipse nehmen. Die halbe Summe der, zu diesem Werthe $\mathfrak{x}$ von x, gehörigen beiden Ordinaten-Werthe von y (aus 3.) ist dann der Ordinaten-Werth $\mathfrak{y}$ der Projektions-Ellipse. Und findet man zu $x = \mathfrak{x}$ und $y = \mathfrak{y}$ aus der Gleichung der Ebene (2.) den Werth $\mathfrak{z}$ von z dazu, so sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordina-

ten-Werthe des Mittel-Punktes der Durchschnitts-Ellipse. Diese Rechnungen durchgeführt *) geben:

1) $\mathfrak{x} = e' \cdot \frac{a^2 \cdot \cos\lambda}{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}$;

2) $\mathfrak{y} = e' \cdot \frac{b^2 \cdot \cos\mu}{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}$;

3) $\mathfrak{z} = e' \cdot \frac{c^2 \cdot \cos\nu}{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}$.

§. 78.

I. Giebt man dem e' nach und nach alle stetig auf einander folgenden Werthe (die man sich positiv auch negativ denken kann), während λ, μ, ν dieselben bleiben, so stellt die Gleichung (2.) alle mit einander parallele Ebenen vor. Eliminirt man daher aus den drei Gleichungen (des §. 77.) diese Entfernung e', so erhält man

1) $\mathfrak{y} = \frac{b^2 \cdot \cos\mu}{a^2 \cdot \cos\lambda} \cdot \mathfrak{x}$ und 2) $\mathfrak{z} = \frac{c^2 \cdot \cos\nu}{a^2 \cdot \cos\lambda} \cdot \mathfrak{x}$;

und diese Gleichungen kommen also allen Mittel-Punkten zu, von allen Ellipsen, welche durch diese, mit der erstern parallelen Ebenen gebildet werden. — Weil aber diese Gleichungen (1. 2.), einer geraden Linie angehören (nach I. Th. Geom. §. 12.), so folgt, daß alle die gedachten Mittel-Punkte in einer und derselben Geraden

*) Man muß die Gleichung (3.) nach y ordnen, so daß sie die Form annimmt $Ay^2 + By + C = 0$. Dies ist oben schon geschehen. Dann ist $B^2 - 4AC = 0$ oder $\frac{1}{4}B^2 - AC = 0$ die Bedingung der Gleichheit der beiden Werthe von y. Ordnet man aber diese letztere Gleichung $\frac{1}{4}B^2 - AC = 0$ nach x, so findet man eine quadratische Gleichung von der Form $Dx^2 + Ex + F = 0$. Man nimmt nun $\mathfrak{x} = -\frac{E}{2D}$, so ist $\mathfrak{x}$ die halbe Summe der beiden Werthe von x, zu deren jedem zwei gleiche Werthe von y gehören. — Man nimmt dann aus der erstern quadratischen Gleichung noch $y = -\frac{B}{2A}$, indem man zugleich $\mathfrak{x}$ statt x setzt, und man hat die Ordinate $\mathfrak{y}$ des Mittel-Punkts der Projektions-Ellipse. Auf diese Weise wird die Rechnung ganz einfach.

liegen. — Diese Gerade nennt man aber den der Durchschnitts-Ebene E (oder den mit ihr parallelen Durchschnitts-Ebenen) **zugeordneten Durchmesser** des Ellipsoids.

II. Bezeichnet man die Winkel, welche dieser zugeordnete Durchmesser mit den Axen SX, SY, SZ macht, durch α, β, γ, so ist (nach I. Th. Geom. §. 1. V.)

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}}; \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}};$$

und daher, wenn man statt $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ihre Werthe (aus 1. u. 2.) substituirt,

$$3) \quad \cos\alpha = \frac{a^2 \cdot \cos\lambda}{\sqrt{a^4 \cdot \cos\lambda^2 + b^4 \cdot \cos\mu^2 + c^4 \cdot \cos\nu^2}};$$

$$4) \quad \cos\beta = \frac{b^2 \cdot \cos\mu}{\sqrt{a^4 \cdot \cos\lambda^2 + b^4 \cdot \cos\mu^2 + c^4 \cdot \cos\nu^2}}$$

und

$$5) \quad \cos\gamma = \frac{c^2 \cdot \cos\nu}{\sqrt{a^4 \cdot \cos\lambda^2 + b^4 \cdot \cos\mu^2 + c^4 \cdot \cos\nu^2}}.$$

III. Sucht man die **Pole** dieses, der Ebene E zugeordneten Durchmessers, d. h. die Punkte, in welchen der zugeordnete Durchmesser der Oberfläche des Ellipsoids begegnet, so darf man nur in der Gleichung (§. 76. Nr. 1.) des Ellipsoids, statt x, y, z ebenfalls bezüglich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ setzen und dann aus dieser und den Gleichungen (1. u. 2.) $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ finden.

Man erhält auf diesem Wege

$$6) \quad \mathfrak{x} = \frac{\pm a^2 \cdot \cos\lambda}{\sqrt{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}};$$

$$7) \quad \mathfrak{y} = \frac{\pm b^2 \cdot \cos\mu}{\sqrt{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}};$$

$$8) \quad \mathfrak{z} = \frac{\pm c^2 \cdot \cos\nu}{\sqrt{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}};$$

welche Koordinaten-Werthe den beiden Endpunkten des zugeordneten Durchmessers angehören. — Man sieht, daß diese End-Punkte des zugeordneten Durchmessers auf beiden Seiten des

Mittel-Punkts des Ellipsoids liegen, und daß die Länge des Durchmessers in dem Mittel-Punkte des Ellipsoids halbirt ist.

IV. Da man nun die Absciſſen-Werthe der End-Punkte des zugeordneten Durchmessers hat, so findet sich die Länge l desselben (nach I. Th. Geom. §. 1.) aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Man findet also, wenn man (aus 6.—8.) statt x, y, z die Werthe setzt,

$$9) \quad \tfrac{1}{2}l = \frac{\sqrt{a^4 \cdot \cos\lambda^2 + b^4 \cdot \cos\mu^2 + c^4 \cdot \cos\nu^2}}{\sqrt{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}},$$

oder auch, wegen der Nummern (3.—5.)

$$10) \quad \tfrac{1}{2}l = (a^{-2} \cdot \cos\alpha^2 + b^{-2} \cdot \cos\beta^2 + c^{-2} \cdot \cos\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

§. 79.

Legt man durch einen der Pole des, der Ebene E zugeordneten Durchmessers, eine zweite Ebene parallel mit der erstern E, so berührt solche das Ellipsoid in diesem Pole.

Denn jede Ebene, welche durch den zugeordneten Durchmesser gelegt wird, schneidet das Ellipsoid wiederum in einer Ellipse, welche von den mit E parallelen Ebenen in parallelen Sehnen geschnitten wird. Da nun diese letzteren alle zu gleicher Zeit Durchmesser der, in den mit E parallelen Ebenen, liegenden Ellipsen sind, — so werden sie von dem zugeordneten Durchmesser alle halbirt, und die durch seinen End-Punkt mit diesen Sehnen parallel gelegte Gerade ist eine Tangente der erstern Ellipse. Und da dies für alle Ebenen gilt, welche durch den zugeordneten Durchmesser gelegt werden können, so bilden alle diese mit E parallelen Tangenten der Ellipsen eine Tangential-Ebene des Ellipsoids an demselben Endpunkte des zugeordneten Durchmessers, welche zu gleicher Zeit mit der Durchschnitts-Ebene E parallel läuft.

§. 80.

I. Jede durch den, einer Durchschnitts-Ebene E zugeordneten Durchmesser l gelegte Ebene E′, schneidet die Ebene E in

einer Linie d, so daß l und d allemal zusammengehörige (einander zugeordnete) Durchmesser der neuen Durchschnitts-Ellipse sind, wenn nur E durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gedacht ist; d. h. jeder dieser beiden Durchmesser l und d halbirt alle Sehnen dieser neuen Durchschnitts-Ellipse, welche mit dem andern parallel laufen. — Dies geht aus der voranstehenden Betrachtung hervor.

II. Der zu dieser zweiten Ebene E′ zugeordnete Durchmesser des Ellipsoids liegt immer in der erstern Ebene E wieder, wenn nur E, wie bereits angenommen, durch den Mittel-Punkt des Ellipsoids gedacht ist.

Es sey nämlich

1) $$x \cdot \cos\lambda + y \cdot \cos\mu + z \cdot \cos\nu = 0$$

die Gleichung der Ebene E, und

2) $$x \cdot \cos\lambda' + y \cdot \cos\mu' + z \cdot \cos\nu' = 0$$

die Gleichung der Ebene E′. Weil nun die Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ (aus §. 78. Nr. 1. 2.) des der Ebene E zugeordneten Durchmessers, nach der Voraussetzung, statt x, y, z in die Gleichung (2.) der zweiten Ebene E′ gesetzt, letzterer genügen müssen, so giebt dies noch die identische Gleichung

3) $$a^2 \cdot \cos\lambda \cdot \cos\lambda' + b^2 \cdot \cos\mu \cdot \cos\mu' + c^2 \cdot \cos\nu \cdot \cos\nu' = 0.$$

Sind nun $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes des, der Ebene E′ zugeordneten Durchmessers, so hat man (aus §. 78.)

4) $$\mathfrak{y}' = \frac{b^2 \cdot \cos\mu'}{a^2 \cdot \cos\lambda'} \cdot \mathfrak{x}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{z}' = \frac{c^2 \cdot \cos\nu'}{a^2 \cdot \cos\lambda'} \cdot \mathfrak{x}';$$

und substituirt man diese Werthe $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ statt x, y, z in die Gleichung (1.) der erstern Ebene E, so kommt die identische Gleichung (3.) wieder. Also liegt der zugeordnete Durchmesser der zweiten Ebene E′ in der erstern Ebene E.

§. 81.

I. Suchen wir noch die Entfernung f der Endpunkte (Pole) des Durchmessers, welcher der, durch den Mittel-Punkt des Ellipsoids gehenden und durch die Gleichung

1)

1) $x \cdot \cos\lambda + y \cdot \cos\mu + z \cdot \cos\nu = 0$

gegebenen Ebene E zugeordnet ist, von dieser Ebene E; d. h. die Entfernung f des Mittel-Punkts des Ellipsoids von der mit dieser Ebene E parallelen Tangential-Ebene desselben. — Die Gleichung dieser Tangential-Ebene ist, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten-Werthe des End-Punktes des zugeordneten Durchmessers vorstellen, (nach I. Th. Geom. §. 11.)

2) $(x - \mathfrak{x}) \cdot \cos\lambda + (y - \mathfrak{y}) \cdot \cos\mu + (z - \mathfrak{z}) \cdot \cos\nu = 0,$

oder, wenn man (aus §. 78. NNr. 6.—8.) statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ihre Werthe substituirt,

3) $x \cdot \cos\lambda + y \cdot \cos\mu + z \cdot \cos\nu = \sqrt{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2};$

und deshalb ist die Entfernung f dieser Ebene vom Anfangs-Punkte der Koordinaten (nach I. Th. Geom. §. 11. Anmerkg.) gegeben durch die Gleichung

4) $f = \sqrt{a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2}$ *).

II. Aus dieser Formel folgt noch, daß diese Entfernung f im Allgemeinen allemal kleiner ist als der größte, größer aber als der kleinste der drei halben Haupt-Durchmesser des Ellipsoids. Ist nämlich

$$a > b > c,$$

so ist auch, wenn nicht $\cos\mu = \cos\nu = 0$ ist,

$a^2 \cdot \cos\lambda^2 + a^2 \cdot \cos\mu^2 + a^2 \cdot \cos\nu^2 > a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2$

und, wenn nicht $\cos\lambda = \cos\mu = 0$ ist,

$c^2 \cdot \cos\lambda^2 + c^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2 < a^2 \cdot \cos\lambda^2 + b^2 \cdot \cos\mu^2 + c^2 \cdot \cos\nu^2.$

Dasselbe fällt jedoch auch durch bloße geometrische Betrachtung sogleich in die Augen.

Ist aber $\cos\mu = \cos\nu = 0$, also auch (nach §. 78. NNr. 3.—5.) $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, d. h. fällt der zugeordnete Durchmesser mit dem Haupt-Durchmesser SX oder 2a zusammen; dann ist $f = a$. — Ist endlich $\cos\lambda = \cos\mu = 0$, also auch

*) Man findet dasselbe Resultat aus jeder der Gleichungen des (§. 77.), wenn man daselbst f statt e′ setzt, und zu gleicher Zeit die (in §. 78. NNr. 6.—8.) berechneten Koordinaten-Werthe des Pols statt der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ (in den Formeln des §. 77.) substituirt.

$cos\,\alpha = cos\,\beta = 0$, d. h. fällt der zugeordnete Durchmesser mit dem Haupt-Durchmesser SZ oder 2c zusammen; dann ist

$$f = c.$$

§. 82.

Es kann auch f dem mittlern halben Haupt-Durchmesser b gleich werden. — Dies ist der Fall, wenn außer

$$cos\,\lambda^2 + cos\,\mu^2 + cos\,\nu^2 = 1,$$

auch noch

$$a^2 \cdot cos\,\lambda^2 - b^2 \cdot sin\,\mu^2 + c^2 \cdot cos\,\nu^2 = 0 \text{ (aus §. 81. Nr. 4.)}$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen folgt sogleich noch, wenn μ eliminirt wird,

$$(a^2 - b^2) \cdot cos\,\lambda^2 = (b^2 - c^2) \cdot cos\,\nu^2,$$

oder

$$1) \qquad cos\,\lambda \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = cos\,\nu \cdot \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $cos\,\lambda = cos\,\nu = 0$, folglich auch $cos\,\alpha = cos\,\gamma = 0$ ist, d. h. wenn der zugeordnete Durchmesser mit dem mittlern Haupt-Durchmesser SY oder 2b zusammenfällt; — kann aber auch noch auf unendlich viele andere Arten erfüllt werden. Die Bedingung (1.) drückt nämlich aus, daß die durch die Winkel λ, μ, ν gegebene und auf der Ebene E senkrechte Gerade für die verschiedenen Werthe von μ immer dasselbe Verhältniß von $cos\,\lambda$ zu $cos\,\nu$ behält, d. h. immer in einer und derselben Ebene bleibt, welche der Ebene XSZ in einer geraden Linie Sm (fig. 24) begegnet, für welche $\mu = 90^0$, $\lambda + \nu = 90^0$, also $cos\,\nu = sin\,\lambda$ ist, so daß, wenn λ_1 dieser Werth von λ seyn soll,

$$2) \qquad tg\,\lambda_1 = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}\right)}$$

ist, welche Gleichung zwei solche Durchschnitts-Linien anzeigt. Denkt man sich senkrecht auf diese Durchschnitts-Linie einen Durchmesser Sn des Ellipsoids, welcher in der Ebene XSZ liegt, und mit der Axe SX den Winkel φ machen mag, so hat man noch

$$3) \qquad tg\,\varphi = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}\right)}.$$

Auch diese Gleichung stellt zwei Durchmesser vor, und die Bedingung (1.) drückt aus, daß die Ebene E durch diesen, mittelst der Gleichung (3.) gegebenen Durchmesser des Ellipsoids hindurchgehen muß, übrigens beliebig liegen kann, wenn der senkrechte Abstand f des Poles des ihr zugeordneten Durchmessers, von ihr, genau dem mittlern halben Haupt-Durchmesser b gleich werden soll. — Wir werden bald sehen (im §. 83.), daß wenn diese durch den (in 3.) gegebenen Durchmesser hindurchgehende, übrigens willkührliche Ebene, alle möglichen Lagen hat, — daß dann ihre zugeordneten Durchmesser in einer und derselben Ebene, und deren Pole daher in einer ebenen Kurve und zwar in einer Ellipse liegen.

§. 83.

Gleichungen der Poloide.

I. Bestimmen wir alle Punkte auf der Oberfläche des Ellipsoids, deren zugehörige Tangential-Ebenen vom Mittel-Punkte um dieselbe Länge f abliegen.

Sind $\varkappa$, $\varkappa'$ und $\varkappa''$ die Winkel, welche diese Entfernung f mit den drei Koordinaten-Axen SX, SY, SZ macht, so hat man die Gleichung der Ebene

$$x \cdot \cos\varkappa + y \cdot \cos\varkappa' + z \cdot \cos\varkappa'' = f,$$

während die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist. Damit nun dieses Ellipsoid von dieser Ebene an der durch x, y gegebenen Stelle berührt werde, müssen beide vorstehenden Gleichungen zu denselben Werthen von x und y, nicht bloß dieselben Werthe von z, sondern auch dieselben Werthe von ∂z_x und ∂z_y liefern (nach I. Th. Geom. §. 14.). Dies giebt noch die beiden Gleichungen

$$\frac{c^2 x}{a^2 z} = \frac{\cos\varkappa}{\cos\varkappa''} \quad \text{und} \quad \frac{c^2 y}{b^2 z} = \frac{\cos\varkappa'}{\cos\varkappa''},$$

während ohnedieß

$$\cos\varkappa^2 + \cos\varkappa'^2 + \cos\varkappa''^2 = 1$$

ist. Eliminirt man nun aus diesen fünf Gleichungen x, x' und x'', so erhält man die zwei Gleichungen

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ \text{und} \\ \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1 \end{array}\right\},$$

wenn, der größern Eleganz wegen,

$$2)\quad \frac{a^2}{f}=a',\quad \frac{b^2}{f}=b' \quad \text{und} \quad \frac{c^2}{f}=c'$$

gesetzt wird. Die Gleichungen (1.) geben also alle Punkte auf dem Ellipsoid, deren zugehörige, das Ellipsoid berührende Ebenen alle vom Mittel-Punkte des Ellipsoids gleich weit, nämlich um eine und dieselbe Länge f abliegen.

Diese durch die Gleichung (1.) gegebene Kurve wollen wir **Poloide** nennen.

II. Die Poloide ist also die Durchschnitts-Figur eines zweiten Ellipsoids mit dem gegebenen, dessen Haupt-Durchmesser $2a'$, $2b'$ und $2c'$ ihren Richtungen nach ebenfalls bezüglich mit den drei Axen SX, SY, SZ zusammenfallen, während, wenn wiederum $a>b>c$ vorausgesetzt wird, in so fern $f<a$ und $>c$ ist, auch $a'>a$, aber $c'<c$ seyn wird. — Die Poloide ist folglich eine geschlossene Kurve doppelter Krümmung. Sie legt sich gleichmäßig um SX oder a herum, wenn $f>b$, also $b'<b$ ist; sie legt sich gleichmäßig um SZ oder c herum, wenn $f<b$, also $b'>b$ ist. Im erstern Falle wo $f>b$, ist die Projektion der Poloide auf die auf SX oder a senkrechte Ebene YSZ eine Ellipse; und die Projektion auf die Ebene XSY (welche auf SZ oder c senkrecht steht) ein elliptischer Bogen. Im andern Falle (wo $f<b$) ist die erstere Projektion ein elliptischer Bogen, und die letztere eine ganze Ellipse. In beiden Fällen endlich, d. h. wenn $f>b$ oder $f<b$ ist, ist doch die Projektion auf XSZ (welche Ebene auf SY oder b senkrecht steht) allemal ein hyperbolischer Bogen; immer unter der gemachten Voraussetzung, daß a der **größte**, c der **kleinste** und b der

mittlere halbe Haupt-Durchmesser des Ellipsoids und $a > f$, dagegen $f > c$ ist.

III. Ist $f = b$; d. h. ist die Entfernung f der Tangential-Ebenen vom Mittel-Punkte dem mittlern halben Haupt-Durchmesser b genau gleich, so wird $b' = b$, und die Poloide zeigt sich dann als eine ebene Kurve, deren Ebene auf XSZ senkrecht steht, weil ihre Projektion auf XSZ dann die durch die Gleichung

$$3) \qquad c^2 x \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = a^2 z \cdot \sqrt{b^2 - c^2}$$

gegebene gerade Linie Sp (fig. 24.) wird, während sich die Projektionen derselben auf die beiden andern Koordinaten-Ebenen als Ellipsen ausweisen. Weil die Gleichung (3.) zwei im Mittel-Punkte sich schneidende gerade Linien anzeigt, welche mit der Axe SX den Winkel $pSX = \psi$ bilden, dessen Tangente gegeben ist durch die Gleichung

$$4) \qquad tg\psi = \pm \frac{c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}\right)},$$

so giebt es dasmal zwei Ellipsen, welche die Eigenschaften der Poloide haben *). —

Und wenn man mit allen Ebenen, welche das Ellipsoid in den Punkten berühren, welche eine der so eben erwähnten Ellipsen bilden, durch den Mittel-Punkt des Ellipsoids parallele Ebenen legt, so schneiden sich letztere alle in einer und derselben Geraden Sn, welche mit der Axe SX den (im §. 82. Nr. 3.) bestimmten Winkel φ bildet. — Alle diese Tangential-Ebenen schneiden sich also in Geraden, welche den Mantel eines Cylinders bilden, von welchem Sn die Axe ist.

IV. Wird $f = a$ oder $f = c$, so ist die Poloide ein bloßer Punkt und zwar der Endpunkt von a oder von c.

---

*) Es giebt auf dem Ellipsoid auch im Allgemeinen immer zwei Poloiden für dieselbe Entfernung f, die, wenn $f > b$ oder $f < b$ ist, nicht mit einander in Verbindung kommen, weil die eine immer diesseits, die andre aber jenseits des Mittel-Punktes sich gleichmäßig um SX oder SZ herum legt.

V. Im Allgemeinen hat die Poloide 4 Scheitel-Punkte oder Gipfel, welche gleichweit von einander abliegen. Zwei gegenüber liegende dieser Scheitel-Punkte liegen vom Mittel-Punkte des Ellipsoids am weitesten ab; die beiden andern dagegen liegen ihm am nächsten.

VI. Die von der Poloide und dem Mittel-Punkte des Ellipsoids gebildete Kegel-Fläche ist eine gemeine, d. h. eine Fläche der 2ten Ordnung (vgl. §. 92. II.).

§. 84.

Gleichung der Serpoloide.

I. Wird das durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

gegebene Ellipsoid um seinen als unbeweglich gedachten Mittel-Punkt dergestalt gedreht, daß es fortwährend eine unbeweglich gedachte und vom Mittel-Punkt um f entfernte Ebene in stetig auf einander folgenden Punkten berührt, so bildet die Reihe der Berührungs-Punkte auf dem Ellipsoid offenbar nichts anders als die (im §. 83. gefundene) Poloide; die Reihe der Berührungs-Punkte auf der Tangential-Ebene bildet dagegen eine neue und ebene Kurve, welche im Allgemeinen offenbar zwischen zweien concentrischen Kreisen (deren Mittel-Punkt die Projektion des Mittel-Punktes des Ellipsoids auf die feste Tangential-Ebene ist) sich dergestalt hinschlängelt, daß sie abwechselnd den größern inwendig, den kleinern aber außen berührt, während die einzelnen Wellen derselben einander congruent, also die Scheitel-Punkte (Gipfel), an denen sie die concentrischen Kreise berührt, gleich weit von einander entfernt sind, wie solches aus den 4 congruenten Theilen der Poloide und deren symmetrischer Lage gegen den Mittel-Punkt des Ellipsoids augenblicklich hervorgeht. — Diese Kurve kann zuweilen eine geschlossene seyn; im Allgemeinen werden aber die Wellen in einander übergreifen und daher zwischen den beiden concentrischen Kreisen ohne Ende fortlaufen, während zu ihrer Erzeugung das Ellipsoid oder die mit dem Mittel-

Punkte desselben fest gedachte Poloide unendlich oft auf der Ebene um den unbeweglich gedachten Mittel-Punkt des Ellipsoids herum gedacht werden muß. Diese ebene Kurve mag (nach Poinsot) die Serpoloide genannt werden.

Um die Gleichung dieser Serpoloide zu finden, muß man bemerken, daß da letztere bloß die abgerollte Poloide ist, die Bogen beider von einem Anfangs-Werthe von x an, bis zu irgend einem unbestimmten Werthe x von x hin alletnal einander gleich seyn müssen. Ist nun r der Abstand dieses End-Punktes des Bogens der Serpoloide vom Mittel-Punkte der beiden concentrischen Kreise, zwischen denen sie liegt, und bezeichnen wir durch φ den Winkel, welchen dieser Radius-Vektor r mit irgend einer festen Geraden macht, so daß φ und r die Polar-Koordinaten der Serpoloide sind — in ihrer Ebene aus der Projektion des Mittel-Punktes des Ellipsoids genommen, — so sind φ und r so wie y und z, Funktionen des unbestimmt gedachten x, folglich auch x, y, z und r Funktionen von φ. Dann hat man, weil $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\sqrt{r^2+f^2}$ ein und derselbe Halbmesser des Ellipsoids ist,

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ } Gleichungen der Poloide,

2) $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$ }

3) $x^2+y^2+z^2=r^2+f^2$ { Bedingung des Abrollens }

und außerdem noch, wegen der Gleichheit des Bogen beider Kurven (der Poloide und der Serpoloide)

4) $\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2=r^2+\partial r^2$

(nach I. Geom. §§. 6. 16.), wo sich die ∂ auf φ beziehen. Findet man nun aus den drei erstern Gleichungen x^2, y^2, z^2, also auch x, y, z; — differenzirt man diese, und substituirt die Werthe statt ∂x, ∂y, ∂z in die letztere Gleichung, so erhält man eine Gleichung zwischen r und ∂r_φ *), aus welcher sich, wenn $\frac{1}{\partial\varphi_r}$

*) Man erhält natürlich dieselbe Gleichung, wenn man die drei erstern

statt ∂r_φ gesetzt wird, sogleich $\partial\varphi_r$ und also auch φ_r selbst (in r ausgedrückt) ergiebt, nämlich

$$5)\quad \varphi = \int \sqrt{\left(\frac{A'^2}{A+A'r^2} + \frac{B'^2}{B+B'r^2} + \frac{C'^2}{C+C'r^2} - \frac{1}{r^2}\right)}\cdot dr,$$

wo A, B, C, A', B', C' folgende Bedeutungen haben, nämlich

$$6)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{f^2}\left(1-\frac{f^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{f^2}{c^2}\right):\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right), \\ B = \frac{1}{f^2}\left(1-\frac{f^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{f^2}{c^2}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right), \\ C = \frac{1}{f^2}\left(1-\frac{f^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{f^2}{b^2}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right), \\ A' = \frac{1}{b^2c^2}:\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right), \\ B' = \frac{1}{a^2c^2}:\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right), \\ C' = \frac{1}{a^2b^2}:\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right), \end{cases}$$

so daß A, B, C, A', B', C' mit a, b, c und f zugleich gegeben sind.

Dieses Integral gehört aber, wie man sieht (nach I. Th. Analys. §. 32. III. D.) zu den sogenannten elliptischen Transcendenten.

Aus dieser Gleichung findet man jedoch ohne Integration

$$7)\quad r\cdot\partial\varphi_r = \sqrt{\left(\frac{A'^2r^2}{A+A'r^2} + \frac{B'^2r^2}{B+B'r^2} + \frac{C'^2r^2}{C+C'r^2} - 1\right)},$$

während $r\cdot\partial\varphi_r$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Tangente der Kurve mit dem Radius-Vektor r macht. Will man daher alle Werthe von r finden, für welche dieser Winkel ein rechter wird, so muß man die drei Nenner $A+A'r^2$, $B+B'r^2$ und $C+C'r^2$ der Null gleich setzen. Geschieht dies, so bekommt man für r jedesmal zwei positive, zwei negative und zwei imaginäre Werthe, wie man sogleich wahrnimmt, sobald

---

(nach allem φ) differenziirt, und dann aus allen 7 Gleichungen die 6 Veränderlichen x, y, z, ∂x, ∂y, ∂z eliminirt.

man die Ausdrücke für A, B, C, A′, B′, C′ in Beziehung auf die Vorzeichen untersucht für den Fall, daß $a > b > c$ ist und daß 1) f zwischen a und b oder 2) f zwischen b und c liegt. Es giebt also zwei Radien-Vektoren, auf welchen die Kurve senkrecht steht, die sich aber periodisch wiederholen, und welche, weil sie auch ∂r_φ der Null gleich machen, zu gleicher Zeit größte und kleinste Werthe von r sind. Diese beiden Werthe von r sind also auch die Radien der concentrischen Kreise, zwischen denen sich die Serpoloide hinschlängelt, und welche sie abwechselnd (den größern von innen, den kleinern von außen) berührt.

II. In dem besondern Falle wo $f = b$, also die Poloide (nach §. 80.) eine Ellipse wird, gehen die vorstehenden Gleichungen, weil dann

$$a' = \frac{a^2}{b},\quad b' = b \quad \text{und}\ c' = \frac{c^2}{b}$$

wird, und wenn man y aus beiden erstern eliminirt, in die nachstehenden über, nämlich in

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ 2) & c^2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x = a^2 \cdot \sqrt{b^2 - c^2} \cdot z \end{array}\right\} \text{Gleichungen der Poloide,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3) & x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + b^2 \\ 4) & \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = r^2 + \partial r^2 \end{array}\right\} \text{Bedingungen des Abrollens,}$$

wo alle ∂ sich auf φ beziehen; aus welchen 4 Gleichungen x, y, z eliminirt werden müssen, um in diesem besondern Falle die Gleichung der Serpoloide zwischen den Polar-Koordinaten r und φ zu haben. Findet man aber aus den drei erstern Gleichungen x, y und z, so erhält man

$$5)\qquad x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} \cdot r;$$

$$6)\qquad z = \frac{c^2}{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}} \cdot r;$$

$$7)\qquad y = b \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} r^2\right)}.$$

Differenziirt man diese Gleichungen nach φ, so erhält man

$$\partial x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \cdot \partial r;$$

$$\partial z = \frac{c^2}{\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}} \cdot \partial r;$$

$$\partial y = -\frac{b^4}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} \cdot \frac{r}{y} \cdot \partial r.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige 4te Gleichung

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = r^2 + \partial r^2,$$

so giebt dies, wenn der Kürze wegen

8) $$(a^2-b^2)(b^2-c^2) = N^2$$

und $\frac{1}{\partial \varphi_r}$ statt ∂r_φ oder ∂r gesetzt wird,

9) $$\frac{b^4}{N^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{b^4}{N^2 y^2}\right) = \partial \varphi_r^{\,2},$$

wo man nur noch statt $N^2 y^2$ seinen Werth $b^2(N^2 - b^2 r^2)$ zu setzen braucht, was wir der Bequemlichkeit wegen, bis jetzt zu thun unterlassen haben. Geschieht dies, so erhält man

10) $$\partial \varphi_r = \frac{b^2}{r \cdot \sqrt{N^2 - b^2 r^2}} \;\text{*)};$$

und integrirt man diese Gleichung, so daß $\varphi = 0$ wird, so oft r seinen größten Werth $\frac{N}{b}$ hat **), so findet sich

11) $$\varphi = \frac{b^2}{N} \cdot \log\left(\frac{N - \sqrt{N^2 - b^2 r^2}}{br}\right),$$

während $N = \sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$ ist.

Löst man diese Gleichung nach r auf, indem man aus ihr nach und nach

---

*) Hätte man in den allgemeinen Resultaten (I. 5. 6.) b statt f gesetzt, so hätte man erhalten

$$A = C = 0; \quad B = b^2;$$

$$A' = \frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}; \quad C' = \frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)};$$

und $$B' = -\frac{b^4}{N^2}.$$

Und die Gleichung (I. 5.) daselbst wäre dann sogleich in diese (Nr. 10.) übergegangen.

**) Dies ist der Fall wenn $\partial r_\varphi = 0$, oder der Nenner von $\partial \varphi_r = 0$ ist.

$$\frac{N}{b^2}\varphi = log\frac{N - \sqrt{N^2 - b^2r^2}}{br},$$

$$e^{\frac{N}{b^2}\varphi} = \frac{N - \sqrt{N^2 - b^2r^2}}{br},$$

$$\sqrt{N^2 - b^2r^2} = N - br\cdot e^{\frac{N}{b^2}\varphi}$$

bildet, dann diese letztere Gleichung quadrirt und zuletzt r daraus findet, so erhält man

$$12)\qquad r = \frac{N}{\frac{1}{2}b\left(e^{\frac{N}{b^2}\varphi} + e^{-\frac{N}{b^2}\varphi}\right)}$$

oder, in anderen Symbolen,

$$13)\qquad r = \frac{N}{b\cdot cos\left(\frac{N}{b^2}\varphi\cdot\sqrt{-1}\right)},$$

in so fern

$$cos\left(\frac{N}{b^2}\varphi\cdot\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{N}{b^2}\varphi} + e^{-\frac{N}{b^2}\varphi}\right)$$

ist, so daß dieser Kosinus aus den Tabellen von Gudermann entnommen werden kann.

Diese Gleichung (12.) zeigt uns, daß in diesem besondern Falle, wo $f = b$ ist, die Serpoloide eine Spirale wird mit unendlich vielen Windungen, die zuletzt unendlich klein werden, so ohngefähr wie solches die (Fig. 17.) andeutet. Ist nämlich A die Projektion des Mittel-Punktes S des Ellipsoids und AB die Gerade von welcher aus (an A) die Winkel gezählt werden (wie immer, im Bogen für den Radius 1) und ist AB der größte Werth von r, $= \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b}$, wo $\varphi = 0$ ist, so ist aus der Gleichung (12.) augenfällig: 1) daß φ ohne Ende wachsen kann, 2) daß r dabei ohne Ende fort abnimmt aber immer positiv bleibt, also der Null immer fort sich nähert, ohne sie je erreichen zu können; endlich 3) daß sie für negative Werthe von φ dasselbe liefert, so daß die (Fig. 17.) nur die Hälfte dieser Spirale sehen läßt, während die andere congruente Hälfte auf der andern Seite von AB gedacht werden muß.

Ferner muß man noch bemerken, daß wenn zwar $f = b$ ist, aber die Tangential-Ebene an das Ellipsoid, welche die Ebene der Serpoloide werden soll, auf SY oder b senkrecht steht, dann die Serpoloide auf den bloßen End-Punkt von b sich zurückzieht. Soll also, während $f = b$ ist, eine Serpoloide wirklich entstehen, so muß ihre Ebene nicht auf SY oder b senkrecht stehen.

Daher ist die Länge der ganzen vollständigen für positive und negative Werthe von φ construirten Spirale, welche man in diesem Falle als Serpoloide gefunden hat, von dem halben Umfange der Ellipse, welche dasmal die Poloide ist, nur unendlich wenig verschieden (d. h. ihr gleich), während das Ellipsoid unendlich viele Umdrehungen um A macht bis nur $\frac{1}{4}$ des Umfangs der gedachten Ellipse (von B an) abgerollt ist.

§. 85.

Wir wollen am Schlusse dieses Kapitels noch zwei merkwürdige Eigenschaften der Ellipsoide hinstellen, deren Beweis aus den vorstehenden Paragraphen ohne besondere Schwierigkeiten gefunden werden kann. Dabei setzen wir immer voraus, daß die Längen der drei Haupt-Durchmesser des Ellipsoids, 2a, 2b und 2c sind.

Denkt man sich nämlich an einem beliebigen Punkte P eines Ellipsoids eine Tangential-Ebene, deren Entfernung vom Mittel-Punkte S des Ellipsoids durch f bezeichnet seyn mag; legt man ferner parallel mit dieser Tangential-Ebene eine Ebene E durch den Mittel-Punkt S, und denkt man sich auf diese Ebene E eine senkrechte Gerade Sm, so findet folgendes statt:

1) Der Inhalt der von E gebildeten Durchschnitts-Ellipse ist allemal

$$= \frac{abc}{f} \cdot \pi;$$

folglich ganz unabhängig von dem Punkte P der Poloide, so daß der Inhalt dieser Ellipse immer derselbe bleibt, wenn auch

P die ganze Poloide durchläuft, zu welcher er Anfangs gehörte. — Dasselbe gilt nicht von ihrer Form.

2) Denkt man sich von den End-Punkten der drei Haupt-Halbmesser a, b, c des Ellipsoids auf Sm senkrechte Linien gezogen, so ist die Summe der Quadrate dieser drei Entfernungen allemal

$$= a^2 + b^2 + c^2 - f^2,$$

folglich wiederum immer dieselbe, wie auch Sm ihre Lage gegen das Ellipsoid abändern möge, wenn nur P immerfort ein Punkt der Poloide bleibt, zu welcher er Anfangs gehörte.

Die Dynamik fester Körper.

Siebentes Kapitel.

Von der Umdrehung eines beliebigen festen Körpers um einen festen und unbeweglichen Punkt.

Vorerinnerung.

Kann ein beliebiger fester Körper um einen festen und unbeweglichen Punkt S beliebig sich drehen, und wirken auf ihn beliebige gleichzeitige Stöße, welche ihn aus der Ruhe in eine augenblickliche (beginnende) Bewegung versetzen, so kann man alle diese gleichzeitigen Stöße in eine einzige Kraft P vereinigen, welche durch den absolut festen Punkt S hindurchgeht, und daher von letzterem sogleich vernichtet wird, — und noch in ein Gegen-Paar von Kräften, dessen Moment Q seyn mag, und dessen Ebene und Richtung ebenfalls bekannt seyn sollen.

Deshalb braucht man bloß die Wirkung des Gegen-Paares von Kräften (Q) allein zu untersuchen, weil diese allein die Drehung um den Punkt S (im Beginne derselben) bestimmen. Dies soll nun im Folgenden geschehen.

Erste Abtheilung.

Drehung um einen unbeweglichen Punkt, in dem besonderen Falle, wo nur im Anfang ein Gegen-Paar von Stößen gewirkt hat und keine beschleunigenden (stetig wirkenden) Kräfte mehr hinzutreten.

§. 86.

I. Um die Wirkung eines stoßenden Gegen-Paares von Kräften zu bestimmen, nehme man die zu dem Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1 und SZ_1, welche (nach §. 51.

III.) immer existiren und immer auf einander senkrecht stehen, zu Koordinaten-Axen, und setze voraus, daß die Ebene und die Richtung des stoßenden Gegen-Paares, dessen Moment Q ist, durch die Winkel λ', μ', ν' gegeben sind, welche die positive Seite der Axe des Gegen-Paares mit diesen drei Haupt-Dreh-Axen macht. — Hernach zerlegt man das Gegen-Paar Q in drei Gegen-Paare, die in den Koordinaten-Ebenen Y_1SZ_1, X_1SZ_1 und X_1SY_1 liegen, und deren (positive oder negative) Momente bezüglich

1) $Q \cdot \cos\lambda'$; 2) $Q \cdot \cos\mu'$ und 3) $Q \cdot \cos\nu'$

sind.

II. Sind nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezüglich die drei zu den Axen SX_1, SY_1, SZ_1 gehörigen Haupt-Trägheits-Momente, so bringen diese drei Gegen-Paare (nach §. 60.) drei gleichzeitige Drehungen um diese Haupt-Dreh-Axen hervor, deren Winkel-Geschwindigkeiten p', q', r' gegeben sind durch die Gleichungen

4) $$p' = \frac{Q \cdot \cos\lambda'}{\mathfrak{A}} = Q \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda',$$

5) $$q' = \frac{Q \cdot \cos\mu'}{\mathfrak{B}} = Q \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu',$$

6) $$r' = \frac{Q \cdot \cos\nu'}{\mathfrak{C}} = Q \cdot \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu'.$$

Die Erschütterungen nämlich, welche die jedesmalige Haupt-Dreh-Axe vermöge des, in einer auf ihr senkrechten Ebene stoßenden Gegen-Paares erleidet, vereinigen sich (nach §. 60. C.) allemal in eine einzige, welche gerade durch den Punkt S hindurchgeht, zu welchem diese Haupt-Dreh-Axe gehört, während dieser Punkt S hier unbeweglich ist, so daß er diese Erschütterung vernichtet. Oder dieselben Erschütterungen vernichten sich (nach §. 60. a.) gänzlich, wenn der Punkt S der Schwer-Punkt des Körpers ist.

Diese drei Winkel-Geschwindigkeiten p', q' und r' entstehen daher auch dann noch, wenn der Punkt S nicht absolut fest, dagegen der Schwer-Punkt ist. In dem letztern Falle kann also der Körper ganz frei sich befinden.

III. Diese drei gleichzeitigen Drehungen um die drei Axen SX_1, SY_1, SZ_1 vereinigt man nun in eine einzige Drehung um eine durch denselben Punkt S gehende Dreh-Axe UU' (nach §.

66.), so daß, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche diese neue Dreh-Axe mit SX_1, SY_1, SZ_1 macht, und ω' die Winkel-Geschwindigkeit dieser mittlern Drehung vorstellt, sogleich gefunden wird

7) $\omega' = \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2} = Q \cdot \sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}$

und

8) $\cos\alpha = \frac{p'}{\omega'} = \frac{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda'}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}}$,

9) $\cos\beta = \frac{q'}{\omega'} = \frac{\mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu'}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}}$,

10) $\cos\gamma = \frac{r'}{\omega'} = \frac{\mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu'}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}}$.

IV. Ist δ der Winkel, welchen die Axe des stoßenden Gegen-Paares mit der Dreh-Axe UU' macht, so findet sich auch noch

11) $$\omega' = \frac{Q \cdot \cos\delta}{\Sigma(r^2 \cdot dM)},$$

wenn $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ das Trägheits-Moment des Körpers um diese Momenten-Axe UU' vorstellt (nach §. 53. Anmerkg.) *)

V. Ist der absolut feste Punkt S zugleich der Schwer-Punkt des Körpers, so bleibt natürlich alles vorstehende genau eben

*) Diese Formel (11.) läßt sich auch a posteriori bestätigen. Man hat nämlich (nach I. Th. Geom. §. 1. VII. 7.) $\cos\delta = \cos\alpha \cdot \cos\lambda' + \cos\beta \times \cos\mu' + \cos\gamma \cdot \cos\nu'$, und (nach §. 52. I.) $\Sigma(r^2 \cdot dM) = \mathfrak{A} \cdot \cos\alpha^2 + \mathfrak{B} \cdot \cos\beta^2 + \mathfrak{C} \cdot \cos\gamma^2$. Substituirt man hier herein statt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe aus (8.—10.), so erhält man

$$\cos\delta = \frac{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}}$$

und $$\Sigma(r^2 \cdot dM) = \frac{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu'^2}{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}.$$

Dividirt man aber beide letzteren Gleichungen durch einander, so ergiebt sich

$$\frac{\cos\delta}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} = \sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2},$$

Multiplicirt man endlich diese letztere Gleichung noch mit Q, so erhält man (nach 7.)

$$\frac{Q \cdot \cos\delta}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} = \omega'.$$

eben so wahr, nur daß dann (nach §. 60. C. und §. 60. a.) die Erschütterung des Punktes S, welche von dem stoßenden Gegen-Paare herrührt, gar nicht statt findet, folglich die Drehung mit derselben Winkel-Geschwindigkeit ω' um dieselbe, durch α, β, γ gegebene und durch den Schwer-Punkt S hindurchgehende Dreh-Axe beginnt, auch wenn der Körper ganz frei ist. Der Schwer-Punkt selbst bleibt dabei in Ruhe, wie wenn derselbe absolut fest wäre.

Anmerk. Man sieht übrigens aus den vorstehenden Formeln: 1) daß die Lage der Dreh-Axe UU' der beginnenden Drehung nur von der Lage, nicht aber von der Größe des Momentes Q des stoßenden Gegen-Paares abhängt; 2) daß aber die Winkel-Geschwindigkeit dieser beginnenden Drehung, bei einer und derselben Lage des stoßenden Gegen-Paares mit dem Momente Q des letztern proportional ist.

§. 87

Vergleicht man dieses Resultat (§. 86. NNr. 8.—10.) für die Lage der Dreh-Axe UU', mit den Formeln (§. 78. II. NNr. 3.—5.), so findet man, daß diese Dreh-Axe mit dem, der Ebene des stoßenden Gegen-Paares zugeordneten Durchmesser eines Ellipsoids zusammenfällt, dessen drei Haupt-Durchmesser in die durch den festen Punkt S gehenden drei Haupt-Dreh-Axen fallen und ihrer Länge nach umgekehrt mit den Quadrat-Wurzeln aus den Haupt-Trägheits-Momenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ proportional sind, d. h. eines Ellipsoids, welches durch die auf SX_1, SY_1, SZ_1 bezogene Gleichung

1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

gegeben ist, in welcher letztern

2) $a^2=\mathfrak{A}^{-1}$; 3) $b^2=\mathfrak{B}^{-1}$ und 4) $c^2=\mathfrak{C}^{-1}$
genommen sind, während x, y, z die Koordinaten-Werthe eines jeden Punktes seiner Oberfläche vorstellen.

Da dieses Ellipsoid zur weitern Versinnlichung der Zustände der Drehung des Körpers dient, so wollen wir solches unter

dem Namen des „zu diesem Punkte S gehörigen Central-Ellipsoids des Körpers" einführen und festhalten.

Für jeden andern Punkt S wird sich im Allgemeinen die Lage und die Länge der Haupt-Durchmesser „des zu S gehörigen Central-Ellipsoids des Körpers" abändern, aber jedesmal wird dasselbe von den auf den festen Körper einwirkenden Stößen und sonstigen Kräften ganz und völlig unabhängig, daher mit dem Körper zugleich völlig bestimmt und gegeben seyn.

§. 88.

Setzen wir das Daseyn dieses, zu dem festen Punkte S gehörigen Central-Ellipsoids voraus, wie solches so eben bestimmt worden ist, so kann man sogleich noch nachstehende Folgerungen ziehen.

I. Das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ des Körpers in Bezug auf irgend eine durch den festen Punkt S gehende Momenten-Axe UU', welche mit den Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 die Winkel α, β, γ macht, ist (nach §. 52. I.) allemal gegeben durch die Gleichung

1) $\Sigma(r^2 \cdot dM) = \mathfrak{A} \cdot \cos\alpha^2 + \mathfrak{B} \cdot \cos\beta^2 + \mathfrak{C} \cdot \cos\gamma^2$;

also ist auch (nach §. 87. NNr. 5.—4.)

2) $\Sigma(r^2 \cdot dM) = a^{-2} \cdot \cos\alpha^2 + b^{-2} \cdot \cos\beta^2 + c^{-2} \cdot \cos\gamma^2$,

wenn a, b, c die halben Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids sind. Nach (§. 78. Nr. 10.) ist dagegen, wenn I die Länge desjenigen Durchmessers des Central-Ellipsoids vorstellt, der mit der Dreh-Axe UU' zusammenfällt, derselbe Ausdruck zur Rechten auch

$$= \frac{1}{\frac{1}{4} I^2};$$

mithin ist (nach §. 78. Nr. 9.) auch

3) $$\Sigma(r^2 \cdot dM) = \frac{1}{\frac{1}{4} I^2} = \frac{a^2 \cdot \cos\lambda'^2 + b^2 \cdot \cos\mu'^2 + c^2 \cdot \cos\nu'^2}{a^4 \cdot \cos\lambda'^2 + b^4 \cdot \cos\mu'^2 + c^4 \cdot \cos\nu'^2},$$

wo λ'; μ', ν' die Winkel vorstellen, welche die der Dreh-Axe als Durchmesser des Ellipsoids zugeordnete Ebene mit den drei Koordinaten-Ebenen Y_1SZ_1, X_1SZ_1, X_1SY_1 macht, oder die

Winkel, welche die auf diese Ebene senkrechte Gerade mit SX_1, SY_1, SY_1 bildet.

Also ist das Trägheits-Moment des Körpers um irgend eine, durch den festen Punkt S gehende Momenten-Axe UU' mit dem Quadrate des von dieser Dreh-Axe UU' gebildeten Halbmessers des Central-Ellipsoids umgekehrt proportional.

In diesem Satze kommen übrigens, wie man bemerken wird, keine Kräfte in Betrachtung.

II. Da man die Ebene eines wirkenden Gegen-Paares Q von Kräften, parallel mit sich nach einem beliebigen Punkte hin fortrücken kann, ohne die Wirkung zu ändern; da man dieselbe hier also auch durch den Pol des, der Ebene des Gegen-Paares zugeordneten Durchmessers des Central-Ellipsoids, gehen lassen kann, so kann man den Satz des (§. 87.) auch so aussprechen:

„Wird ein Körper von einem Gegen-Paare von Kräften ge„stoßen, dessen Ebene das, zu dem festen Punkte S gehörige „Central-Ellipsoid des Körpers berührt, so geht die augenblick„liche Dreh-Axe durch diesen Berührungs-Punkt und durch den „festen Mittel-Punkt S des Central-Ellipsoids. — Ist aber S „der Schwer-Punkt des Körpers, so gilt dasselbe, auch wenn „er nicht fest, der Körper also ganz frei ist, während dann doch „der Schwer-Punkt in Ruhe bleibt.“

III. Umgekehrt: Dreht sich ein Körper augenblicklich um eine beliebige Dreh-Axe UU', von welcher ein Punkt S entweder absolut fest, oder doch der Schwer-Punkt des Körpers ist, so liegt die Ebene des Gegen-Paares von Kräften, dessen Stoß dem als ruhend gedachten Körper diese Bewegung geben würde, parallel mit der Ebene, welche das, zu dem Punkte S gehörige Central-Ellipsoid an dem von der Dreh-Axe als Durchmesser desselben gebildeten Pole berührt; oder auch, sie fällt mit dieser Berührungs-Ebene zusammen.

§. 89.

Denken wir uns nun denselben Körper als ruhend und von demselben Anfangs-Gegen-Paar, dessen Moment Q ist, gesto-

ßen, so daß die oben (im §. 86. bestimmte) Drehung um eine durch den Punkt S gehende Dreh-Axe UU′ beginnt, während dieser Punkt S entweder absolut fest oder der Schwer-Punkt des Körpers ist; — setzen wir aber noch voraus, daß (außer den im Momente der beginnenden Drehung vorhandenen Centrifugal-Kräften *) keine weiteren Kräfte hinzutreten, und bestimmen wir nun unter dieser Voraussetzung die neue augenblickliche Dreh-Axe VV′ (Fig. 16.) und die neue Winkel-Geschwindigkeit ω_1, wie solche im nächsten, unmittelbar darauf folgenden Augenblicke seyn werden.

Zu dem Ende vereinigen wir alle Centrifugal-Kräfte (nach §. 61.) in eine einzige, durch den Punkt S gehende Versammlungs-Kraft und ein zugehöriges Gegen-Paar, welches wir das Centrifugal-Gegen-Paar nennen wollen, während das Moment m_0 dieses letztern, wie bekannt, gegen das Moment Q von einem Gegen-Paar von Stößen allemal unendlich klein gedacht werden muß. Ist nun der Punkt S absolut fest, so wird die Versammlungs-Kraft vernichtet; und ist S der Schwer-Punkt des Körpers, so berechnet sich (nach §. 61. VI.) die Versammlungs-Kraft der Null gleich. — Es mag also der Punkt S absolut fest seyn, so daß sich der Körper nur um ihn, übrigens beliebig drehen kann, oder es mag S der Schwer-Punkt des Körpers und letzterer ganz frei seyn, so ist es doch immer nur das Centrifugal-Gegen-Paar ganz allein, welches die Dreh-Axe und die Winkel-Geschwindigkeit zu ändern im Stande ist, und dann nur um unendlich wenig. Es bringt aber, wenn es allein auf den Körper wirkt, eine Drehung um eine, durch den Punkt S gehende Axe WW′ mit einer (unendlich-kleinen) Winkel-Geschwindig-

*) Der Anfänger wird noch einmal ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß die sogenannten Centrifugal-Kräfte nicht wirkliche neue Kräfte sind, sondern die Drucke, welche im Augenblick einer Drehung die Dreh-Axe erleidet. Ohne daß aber neue Kräfte hinzutreten, werden diese Drucke die Dreh-Axe doch verändern können, wenn letztere nicht in Bezug auf sie gehörig fest und unbeweglich ist.

keit $d\omega$ hervor. Da nun die Anfangs-Drehung, wenn man die Einwirkung der Centrifugal-Kräfte wegläßt, im nächsten Momente fortdauert, so vereinigen sich im nächsten Moment beide Drehungen, um UU' und WW', in eine einzige Drehung, um die gesuchte Dreh-Axe VV' mit der gesuchten Winkel-Geschwindigkeit ω_1 (vermöge des Parallelogramms der Drehungen). Diese neue Dreh-Axe geht wieder durch den Punkt S, so daß, wenn dieser Punkt S auch der Schwer-Punkt und ganz frei seyn sollte, solcher doch in Ruhe bliebe.

I. Bestimmen wir nun zuerst die Ebene und das Moment m_0 des Centrifugal-Gegen-Paares (nach §. 61.). — Zu dem Ende lege man drei neue Koordinaten-Axen durch S, nämlich SZ' mit UU' zusammenfallend, so daß SZ' mit SX_1, SY_1, SZ_1 bezüglich die Winkel α, β, γ macht; dann kann man in der durch SZ' oder UU' und durch die Axe des Anfangs-Gegen-Paares Q gegebenen Ebene noch SY' senkrecht auf SZ' nehmen, so wie auch SX' senkrecht auf diese Ebene. Sind nun x', y', z' die auf diese letzteren Axen bezogenen Koordinaten-Werthe eines Elementes dM, dessen, auf SX_1, SY_1, SZ_1 bezogenen Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1 sind; und stellen α', β', γ' so wie α'', β'', γ'' bezüglich die Winkel vor, welche SY' und SX' bezüglich mit SX_1, SY_1, SZ_1 machen, so hat man

$$x' = x_1\cdot\cos\alpha'' + y_1\cdot\cos\beta'' + z_1\cdot\cos\gamma'',$$
$$y' = x_1\cdot\cos\alpha' + y_1\cdot\cos\beta' + z_1\cdot\cos\gamma'$$
und $$z' = x_1\cdot\cos\alpha + y_1\cdot\cos\beta + z_1\cdot\cos\gamma.$$

Weil nun SX_1, SY_1, SZ_1 Haupt-Dreh-Axen sind, also

$$\Sigma(y_1 z_1\cdot dM) = 0,\ \Sigma(x_1 z_1\cdot dM) = 0 \text{ und } \Sigma(x_1 y_1\cdot dM) = 0$$

ist, so geben die vorstehenden Werthe von x', y', z' sogleich

$$\Sigma(x'z'\cdot dM) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha''\cdot\Sigma(x_1^2\cdot dM) + \cos\beta\cdot\cos\beta''\cdot\Sigma(y_1^2\cdot dM) + \cos\gamma\cdot\cos\gamma''\cdot\Sigma(z_1^2\cdot dM)$$

und

$$\Sigma(y'z'\cdot dM) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha'\cdot\Sigma(x_1^2\cdot dM) + \cos\beta\cdot\cos\beta'\cdot\Sigma(y_1^2\cdot dM) + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'\cdot\Sigma(z_1^2\cdot dM).$$

Nun ist aber

$$\Sigma(y_1^2+z_1^2)\cdot dM = \mathfrak{A}, \quad \Sigma(x_1^2+z_1^2)\cdot dM = \mathfrak{B},$$
$$\Sigma(x_1^2+y_1^2)\cdot dM = \mathfrak{C},$$

folglich

$$\Sigma(x_1^2\cdot dM) = \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}), \quad \Sigma(y_1^2\cdot dM) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C})$$

und $\Sigma(z_1^2\cdot dM) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C})$;

also kann man diese Werthe in obige Ausdrücke substituiren, die mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ afficirten Glieder zusammenfassen, und die Gleichungen

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha'' + \cos\beta\cdot\cos\beta'' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0$$

zu Hülfe nehmen, und man erhält

$$\Sigma(x'z'\cdot dM) = -\cos\alpha\cdot\cos\alpha''\cdot\mathfrak{A} - \cos\beta\cdot\cos\beta''\cdot\mathfrak{B} - \cos\gamma\cdot\cos\gamma''\cdot\mathfrak{C};$$
$$\Sigma(y'z'\cdot dM) = -\cos\alpha\cdot\cos\alpha'\cdot\mathfrak{A} - \cos\beta\cdot\cos\beta'\cdot\mathfrak{B} - \cos\gamma\cdot\cos\gamma'\cdot\mathfrak{C}.$$

Werden nun hier statt $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ ihre Werthe (aus §. 86. III. 8.—10.) substituirt, so zeigt sich

$$\Sigma(x'z'\cdot dM) = 0$$

und

$$\Sigma(y'z'\cdot dM) = \frac{\sin\delta}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2}\cdot\cos\lambda'^2+\mathfrak{B}^{-2}\cdot\cos\mu'^2+\mathfrak{C}^{-2}\cdot\cos\nu'^2}} = \frac{Q\cdot\sin\delta}{\omega'},$$

weil SX' auf der Axe des Anfangs-Gegen-Paares Q senkrecht gedacht worden ist, folglich

$$\cos\lambda'\cdot\cos\alpha'' + \cos\mu'\cdot\cos\beta'' + \cos\nu'\cdot\cos\gamma'' = 0$$

seyn muß, und weil SY' mit der Axe des Anfangs-Gegen-Paares Q den Winkel $90^\circ-\delta$ macht, dessen Kosinus $=\sin\delta$ ist, so daß man (nach I. Th. Geom. §. 1. VII. Nr. 7.)

$$\cos\lambda'\cdot\cos\alpha' + \cos\mu'\cdot\cos\beta' + \cos\nu'\cdot\cos\gamma' = \sin\delta$$

hat; weil endlich (nach §. 86. Nr. 7.)

$$\sqrt{\mathfrak{A}^{-2}\cdot\cos\lambda'^2+\mathfrak{B}^{-2}\cdot\cos\mu'^2+\mathfrak{C}^{-2}\cdot\cos\nu'^2} = \frac{\omega'}{Q}$$

ist*).

*) Man konnte diese Resultate (aus dem §. 60. C. und E.) ohne alle Rechnung erhalten. Da nämlich eine freiwillige Drehung um UU' erfolgt, so ist die Summe der statischen Momente aller auf die Ebene des Gegen-Paares projicirten Dreh-Kräfte ein Maximum und = Q (nach §. 60. E.

Nun zerlegt sich aber (nach §. 61.) das gesuchte Centrifugal-Gegen-Paar m_0 in zwei andere, welche in den Koordinaten-Ebenen $X'SZ'$ und $Y'SZ'$ liegen, und deren Momente m' und m'' gegeben sind durch die Gleichungen

$$m' = -\omega'^2 \cdot \Sigma(x'z' \cdot dM) \text{ und } m'' = \omega'^2 \cdot \Sigma(y'z' \cdot dM)$$

Folglich wird dasmal $m' = 0$; und es bleibt also nur noch m'' übrig, in der Ebene $Y'SZ'$; d. h. das gesuchte Centrifugal-Gegen-Paar liegt in der Ebene, welche die Dreh-Axe UU' und die Axe des Anfangs-Gegen-Paares Q mit einander bilden, und sein Moment m'' oder m^0 ist gegeben durch die Gleichung

$$m_0 = \pm m'' = \omega'^2 \cdot \frac{\sin\delta}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda'^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu'^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu'^2}} = Q \cdot \omega' \cdot \sin\delta;$$

während δ der Winkel ist, welchen die Axe des Anfangs-Gegen-Paares mit der Dreh-Axe UU' macht.

In dieser Beziehung kann man also sagen, „daß das gesuchte Centrifugal-Gegen-Paar, seiner Ebene und „seinem Momente nach, durch das Parallelogramm „vorgestellt ist, welches die Anfangs-Dreh-Axe von „der Länge der Winkel-Geschwindigkeit ω', und die „Axe des Anfangs-Gegen-Paares Q mit einander „machen, wenn letztere von der Länge Q genommen „wird *)."

C.). — Daher ist die Summe der statischen Momente derselben Dreh-Kräfte auf irgend eine, auf der letztern senkrechte Ebene, z. B. auf $Y'SZ'$ projicirt, der Null gleich; d. h. es ist (nach §. 37.) $\omega' \cdot \Sigma(x'z' \cdot dM) = 0$. — Ferner findet sich die Summe der statischen Momente aller Dreh-Kräfte $r\omega \cdot dM$ auf die Ebene $X'SZ'$, welche mit der Ebene der größten Momenten-Summe den Winkel $90^0 - \delta$ macht (nach II. Th. §. 34.)

$$= Q \cdot \cos(90^0 - \delta) = Q \cdot \sin\delta,$$

so daß (nach §. 37.)

$$\omega' \cdot \Sigma(y'z' \cdot dM) = Q \cdot \sin\delta$$

seyn muß.

*) Man muß jedoch nicht übersehen, daß $Q\omega' \cdot \sin\delta$ das Moment des Centrifugal-Gegen-Paares nur dann ist, wenn die Druck-Einheit zu Grunde gelegt wird. Will man daher solches mit Q vergleichen, bei welchem die Stoß-Einheit (§. 10.) zu Grunde gelegt ist, so muß man ersteres durch $Q\omega \cdot \sin\delta \cdot dt$ ausdrücken, so daß eben deshalb das Centrifugal-Gegen-Paar

II. Vereinigt man beide Gegen-Paare Q und $Q\omega' \cdot \sin\delta \cdot dt$, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, in ein einziges, so ist solches seinem Momente Q' nach

$$= \sqrt{Q^2 + Q^2 \cdot \omega'^2 \cdot \sin\delta^2 \cdot dt^2} = Q \cdot \sqrt{1 + \omega'^2 \cdot \sin\delta^2 \cdot dt^2} = Q,$$

sobald man die unendlich kleinen Glieder der zweiten Ordnung außer Acht läßt *). Die Formeln für die Kosinus der Winkel, welche dieses neue Gegen-Paar mit dem alten macht, geben bezüglich 0 und 1, so daß also dieses neue Gegen-Paar seinem Momente und seiner Lage im absoluten Raume nach, mit dem Anfangs-Gegen-Paar genau zusammenfällt. Gegen den Körper wird aber das neue Gegen-Paar eine andere Lage haben als Anfangs, weil sich der Körper um seine augenblickliche Dreh-Axe gedreht hat, ehe das Centrifugal-Gegen-Paar hinzutrat. — Dieses neue Gegen-Paar Q' (oder Q) würde aber dem, in der neuen Lage ruhenden Körper durch seinen Stoß dieselbe Bewegung geben, welche der Körper im zweiten Moment wirklich hat.

III. Hat man die Ebene und das Moment des Centrifugal-Gegen-Paares gefunden, und beachtet man, daß seine Ebene durch die augenblickliche Umdrehungs-Axe UU' und durch die Projektion der letztern auf die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares Q gegeben ist, und daß UU' ein der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares Q zugeordneter Durchmesser des zu dem Punkte S gehörigen Central-Ellipsoids ist, so folgt, daß dieses Gegen-Paar m_0 eine (unendlich-kleine) Drehung mit der leicht zu berechnenden Winkel-Geschwindigkeit $d\omega$ hervorbringen wird, um eine Dreh-Axe WW' (Fig. 16.), welche ein, der Ebene des Gegen-Paares m_0 zugeordneter Durchmesser des Central-Ellipsoids ist (nach §. 88. II.), und daher in der durch den

seinem Momente nach unendlich klein sich zeigt, gegen das Anfangs-Gegen-Paar.

*) Dieses Weglassen der unendlich Kleinen der zweiten und höhern Ordnungen ist da, wo unendlich Kleine der ersten Ordnung mit einander verglichen werden, keine Annäherung, sondern eine unerläßliche Bedingung der vollständigen Genauigkeit (vgl. I. Th. Analys. Kap. II.).

Punkt S **gehenden Ebene des Anfangs-Gegen-Paares** Q **selbst liegt** (nach §. 80. II.).

IV. Vereinigt man nun beide Drehungen um UU′ und WW′ (Fig. 16.), welche die Winkel-Geschwindigkeiten ω' und $d\omega$ haben, mittelst des Parallelogramms der Drehungen, in die neue Drehung um VV′, indem man auf UU′ erst SU $= \omega'$, auf WW′ aber SW $= d\omega$ abträgt, und das Parallelogramm SUWV auszieht, dessen Diagonale SV der Größe und Richtung nach die neue gesuchte Winkel-Geschwindigkeit und die neue gesuchte Dreh-Axe giebt, — so ist die eine Seite SW dieses Parallelogramms SUWV in der, durch den Punkt S gedachten Ebene des Anfangs-Gegen-Paares Q, daher die andere Seite UV desselben Parallelogramms parallel mit der Ebene des Gegen-Paares; folglich steht der End-Punkt V der Diagonale SV von der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares eben so weit ab, als der End-Punkt U der Seite dieses Parallelogramms.

V. Denken wir uns die Ebene SWUV verlängert, so schneidet sie das Central-Ellipsoid in einer Ellipse, und in dieser Ellipse sind (nach §. 80. I.) SWB und SU_1 zusammengehörige Durchmesser (oder vielmehr Halbmesser) und deshalb ist, wenn man durch U_1 mit SW eine Parallele U_1V_1 legt, welche der verlängerten SV in V_1 begegnet, U_1V_1 eine Tangente dieser Ellipse. Weil aber U_1V_1 unendlich-klein ist gegen SU_1, so ist diese Tangente U_1V_1 ein unendlich-kleines Element des elliptischen Bogens, und SV_1 ein Halbmesser der Ellipse, daher auch ein Halbmesser des Ellipsoids. Und weil in den ähnlichen Dreiecken SUV und SU_1V_1 die Seiten proportinal sind, so **verhalten sich die alte und die neue Winkel-Geschwindigkeit** (d. h. SU und SV) **zu einander, wie die Halbmesser** SU_1 **und** SV_1 **des Ellipsoids, welche den Polen** U_1 **und** V_1 **der augenblicklichen Umdrehungs-Axen auf dem Central-Ellipsoid, zukommen.**

VI. Um nun die Lage dieser neuen Dreh-Axe SV_1 im absoluten Raume zu bestimmen, bedenke man zunächst, daß die Lage dieses Halbmessers SV_1 eine andere seyn muß als anfäng-

lich, (weil sich der Körper im ersten Moment um SU_1 gedreht hat), daß aber V_1 von der Ebene des Gegen-Paares jetzt gerade eben so weit abliegt als U_1 (nach III.). Da nun (nach II.) der Körper aus der Ruhe in dieselbe Bewegung versetzt wird, die er im zweiten Momente gerade hat, wenn auf den ruhenden Körper in der Lage, welche er zu Ende des ersten Moments einnimmt, ein Gegen-Paar von Stößen wirkt, welches seiner Ebene und seinem Momente nach von dem Anfangs-Gegen-Paar nicht verschieden ist; — so folgt (nach §. 88. II. und III.), daß die Berührungs-Ebene des Central-Ellipsoids an den Punkt V_1 wiederum mit der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares parallel ist, und daß deshalb, weil V_1 und U_1 von letzterer Ebene gleichweit abliegen (nach IV.), die Berührungs-Ebene an V_1 in ihrer neuen Lage, mit der Berührungs-Ebene an U_1 in der Anfangs-Lage des Körpers (und des Central-Ellipsoids) genau zusammenfällt. Denkt man sich daher die erstere Berührungs-Ebene an U_1 im Raume absolut fest, so dreht sich der Körper so lange um U_1, bis einer der um U_1 nächst herumliegenden Punkte in diese feste Ebene als der erste hineintritt; dieser ist dann der Punkt V_1, welcher die augenblickliche Dreh-Axe SV_1 im nächsten Momente bestimmt.

§. 90.

Weil aber jede augenblickliche Umdrehung um irgend eine durch S gehende Dreh-Axe (nach §. 86.) als aus der Ruhe mittelst des Stoßes irgend eines Gegen-Paares hervorgehend angesehen werden kann, so gilt der Uebergang (§. 89. III.—VI.) vom ersten Augenblicke zum zweiten, nothwendig auch von jedem Augenblicke der Drehung zu dem nächst folgenden; und es stellen sich also für die ganze Dauer der Drehung um den festen Punkt S (oder um den nicht festen aber in Ruhe bleibenden Schwer-Punkt S) folgende Wahrheiten heraus:

1) Der Körper dreht sich um den als unbeweglich gedachten Punkt S dergestalt, daß das zu diesem Punkte S gehörige Central-Ellipsoid beständig eine und dieselbe feste Ebene, welche

mit der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares parallel läuft, berührt, im Allgemeinen aber jedesmal mit einem andern Punkte seiner Oberfläche, und auch an einem andern Punkte der festen Ebene.

2) Zu jeder Zeit der Bewegung des Körpers um diesen als unbeweglich gedachten Punkt S, ist die Bewegung so, daß der Körper in seiner augenblicklichen Lage gegen die gedachte feste Ebene aus der Ruhe sogleich wieder in dieselbe Bewegung versetzt werden würde, wenn ein Gegen-Paar von Kräften stoßen wollte, welches dem Momente und der Lage im absoluten Raume nach, genau wieder mit dem Anfangs-Gegen-Paar zusammenfällt, welches daher nur gegen den Körper zu jeder andern Zeit eine andere Lage haben würde.

3) Der Körper dreht sich dabei beständig um die durch den Berührungs-Punkt mit der oben gedachten festen Ebene, und durch den Mittel-Punkt S des Central-Ellipsoids gegebene augenblickliche Dreh-Axe, und mit einer augenblicklichen Winkel-Geschwindigkeit, welche mit dem durch diese augenblickliche Dreh-Axe gebildeten Halbmesser des Central-Ellipsoids proportional ist.

4) Während der ganzen Dauer der Bewegung rollt also das Central-Ellipsoid auf der mit der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares parallelen festen Ebene ohne auf ihr zu gleiten, während jedoch in jedem Augenblicke die zum Abrollen nöthige Drehung mit bestimmter Winkel-Geschwindigkeit statt hat *).

Denn da die ganze Bewegung darin besteht, daß das Central-Ellipsoid um den augenblicklichen Pol sich mit gegebener Winkel-Geschwindigkeit dreht, bis die Oberfläche des Central-Ellipsoids an einem zweiten nächst anliegenden Punkte mit der festen Ebene in Berührung tritt, und dann eine Drehung um diesen zweiten Berührungs-Punkt mit der neuen Winkel-Geschwindigkeit erfolgt, u. s. w. f., so liegt die vorstehende Behauptung außer Zweifel.

---

*) Das Abrollen giebt daher nur die geometrische Bewegung des Körpers, während die Winkel-Geschwindigkeiten der augenblicklichen Umdrehungen erst die dynamische Bewegung desselben bestimmen.

5) Es kann aber Fälle geben, wo kein zweiter Punkt der Oberfläche des Central-Ellipsoids mit der gedachten festen Ebene in Berührung kommt. — Dieser Fall tritt allemal ein, wenn die feste Ebene auf der Dreh-Axe senkrecht steht, und dies ist wieder nur dann der Fall, wenn die Drehung um eine der, zu dem Punkte S gehörigen drei Haupt-Dreh-Axen beginnt. In diesem Falle muß die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares auf der Haupt-Dreh-Axe senkrecht gewesen seyn, und in demselben Falle dreht sich der Körper fortwährend um dieselbe Dreh-Axe mit immer einer und derselben Winkel-Geschwindigkeit. — Dies ist uns aber schon (aus §. 61. XI.) bekannt.

6) Indem man also, diese Ausnahms-Fälle abgerechnet, die Kurve auf der Oberfläche des Central-Ellipsoids, und die andere auf der festen Ebene sucht, welche bei dem Rollen des Central-Ellipsoids auf der festen Ebene um den unbeweglichen Mittel-Punkt des erstern, von den jedesmaligen Berührungs-Punkten gebildet werden, hat man die geometrische Bewegung des Körpers (mit welchem das Central-Ellipsoid fest verbunden ist). — Die erstere dieser Kurven ist aber offenbar die (im §. 83. näher bestimmte) Poloide, während die andere allemal die (im §. 84. näher betrachtete) Serpoloide ist.

Und indem man weiß, daß der Körper um jeden solchen Pol mit einer Winkel-Geschwindigkeit sich dreht, welche mit dem Halbmesser dieses Pols proportional ist, so kennt man zu gleicher Zeit auch die dynamische Bewegung des Körpers.

7) Denkt man sich die augenblicklichen Dreh-Axen durch diese beiden Kurven geführt, so hat man zwei Kegel-Flächen, von denen die eine im Körper, die andere im absoluten Raume fest ist. Diese bringen die eben gedachte geometrische Bewegung des Körpers ebenfalls hervor, wenn die erstere Kegel-Fläche auf der andern abrollt, ohne zu gleiten. Geschieht dies Rollen mit verschiedener Geschwindigkeit, so daß an jedem Paare zusammenfallender Seiten der beiden Kegel-Flächen die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung um diese Seite die (in 3.) bestimmte ist,

so hat man zu gleicher Zeit auch wieder die dynamische Bewegung des Körpers.

Der im Körper feste Kegel ist ein gemeiner mit kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt, d. h. eine Fläche der zweiten Ordnung (vgl. §. 92. II.); der im Raume feste dagegen hat die Serpoloide zur Grundfläche, ist daher ein transcendenter. Im Allgemeinen erscheint die Oberfläche des letztern längs seiner Seiten nach den Wellen der Serpoloide gefurcht (kanellirt).

Ist die Bewegung des Körpers gegeben, so sind dadurch diese beiden Kegel, die Geschwindigkeit des Abrollens und die Winkel-Geschwindigkeit an jeder Seite mit gegeben. Sind aber von den letztern vier Stücken drei gegeben, so ist das vierte mit und die ganze Bewegung gegeben.

Es versteht sich dabei, daß in Ausnahms-Fällen

a) der Körper fortwährend sich um eine, in ihm feste und nur im Raume um den ruhenden Punkt S herum bewegliche Axe drehen kann, so daß der im Körper feste Kegel verschwindet;

b) der Körper um eine in ihm bewegliche, aber im Raume feste Axe sich drehen kann, so daß der im Raume feste Kegel verschwindet;

c) die Dreh-Axe sowohl im Körper als im Raume fest seyn kann, so daß beide Kegel verschwinden.

Ob aber, und wann jeder der beiden Ausnahms-Fälle (a) oder (b) eintreten werde und könne, ergiebt sich vorzüglich aus der Betrachtung der allgemeinen Formeln, welche jedoch erst in der zweiten Abtheilung dieses Kapitels vollständig zu finden sind.

8) Sind in dem Körper zwei der drei Haupt-Trägheits-Momente A, B, C einander gleich, so daß das Central-Ellipsoid ein Umdrehungs-Körper und entweder $a = b > c$, oder $b = c < a$ wird, so werden Poloide und Serpoloide gewöhnliche Kreislinien; — und stehen die Längen dieser Kreislinien in einem incommensurablen Verhältniß zu einander, so kehrt derselbe

Punkt der Poloide nie auf denselben Punkt der Serpoloide, auf welchem er einmal gewesen ist, zurück. — Weil aber dann alle zu den Punkten der Poloide hingehenden Halbmesser des Central-Ellipsoids einander gleich sind, so ist nicht bloß der Winkel konstant, welchen die augenblickliche Dreh-Axe mit SZ_1 macht, sondern auch die Winkel-Geschwindigkeit selbst immer konstant.

9.) Sind die Haupt-Trägheits-Momente 𝔄, 𝔅, ℭ alle drei einander gleich, so ist das Central-Ellipsoid eine Kugel, und Poloide nebst Serpoloide reduciren sich auf einen bloßen Punkt. Der Körper dreht sich also in diesem Falle fortwährend um dieselbe im Raume und im Körper feste Dreh-Axe. — In diesem Falle ist aber auch jeder Durchmesser eine Haupt-Dreh-Axe des Körpers.

§. 91.

Um nun unser Problem gänzlich gelöst zu sehen, dürfen wir nur noch die Winkel-Geschwindigkeit ω_t oder ω, wie sie zu Ende irgend einer Zeit t seyn wird, als Funktion der Zeit t herstellen.

I. Zu dem Ende denke man sich diese Winkel-Geschwindigkeit ω in die drei Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r um die Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zerlegt, so daß p, q, r wie ω, gesuchte Funktionen von t, die Werthe p', q', r', ω' des (§. 86.) dagegen die Anfangs-Werthe derselben (für $t = 0$) sind. Versteht man nun unter SU die augenblickliche Dreh-Axe zu Ende der Zeit t, so hat man zunächst

$$1)\quad \cos USX_1 = \frac{p}{\omega},\quad \cos USY_1 = \frac{q}{\omega},\quad \cos USZ_1 = \frac{r}{\omega}.$$

Sind aber λ_1, μ_1 und ν_1 die Winkel, welche die Axe des Anfangs-Gegen-Paares Q mit den Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1 und SZ_1 macht, so sind auch diese Winkel Funktionen von t, während die λ', μ', ν' des (§. 86.) deren Anfangs-Werthe (für $t = 0$) seyn werden.

II. Da nun der Körper, wenn man ihn in der Lage, in

der er zu Ende der Zeit sich befindet, ruhend sich denkt, aus der Ruhe in dieselbe augenblickliche Drehung, wie solche zu Ende der Zeit t ist (nach §. 89. II.) durch den Stoß eines Gegen-Paares versetzt werden kann, welches seiner Ebene, seiner Richtung und seinem Momente nach mit dem Anfangs-Gegen-Paare zusammenfällt, so hat man (nach §. 86. II.)

$$2) \quad p = \frac{Q \cdot \cos\lambda_1}{\mathfrak{A}}; \; q = \frac{Q \cdot \cos\mu_1}{\mathfrak{B}}; \; r = \frac{Q \cdot \cos\nu_1}{\mathfrak{C}};$$

woraus

$$3) \quad \cos\lambda_1 = \frac{\mathfrak{A}p}{Q}; \; \cos\beta_1 = \frac{\mathfrak{B}q}{Q}; \; \cos\gamma_1 = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}$$

sogleich hervorgeht.

III. Nun ist das Centrifugal-Gegen-Paar, welches zu Ende der Zeit t hinzutritt und die Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r bezüglich um dp, dq, dr, d. h. um $\partial p_t \cdot dt$, $\partial q_t \cdot dt$ und $\partial r_t \cdot dt$ ändert, (nach §. 89. I.) seinem Momente nach

$$4) \quad = Q \cdot \omega \cdot \sin\delta \cdot dt,$$

wenn δ der Winkel ist, welchen die augenblickliche Dreh-Axe SU mit der Axe des Anfangs-Gegen-Paares bildet. Die Ebene dieses Centrifugal-Gegen-Paares ist zugleich die des Winkels δ. Nennen wir nun α'', β'', γ'' (gerade wie im §. 89. I.) die Winkel, welche die positive Seite der Axe (SX′) dieses Centrifugal-Gegen-Paares (die immer in der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares liegt) mit den drei Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1 und SZ_1 macht, so hat man allemal, weil sie auf der Axe des Anfangs-Gegen-Paares senkrecht steht:

$$5) \quad \cos\alpha'' \cdot \cos\lambda_1 + \cos\beta'' \cdot \cos\mu_1 + \cos\gamma'' \cdot \cos\nu_1 = 0;$$

zugleich aber auch, weil sie auf der augenblicklichen Dreh-Axe SU ebenfalls senkrecht steht;

$$\cos\alpha'' \cdot \cos USX_1 + \cos\beta'' \cdot \cos USY_1 + \cos\gamma'' \cdot \cos USZ_1 = 0,$$

d. h. (wegen der Gleichungen 1.)

$$6) \quad p \cdot \cos\alpha'' + q \cdot \cos\beta'' + r \cdot \cos\gamma'' = 0;$$

während die Gleichung (5.) wenn man in ihr die Werthe aus (3.) substituirt, in

7) $\mathfrak{A}p \cdot \cos\alpha'' + \mathfrak{B}q \cdot \cos\beta'' + \mathfrak{C}r \cdot \cos\gamma'' = 0$

übergeht.

IV. Vermöge des Verfahrens des (§. 86. I.) hat man aber, in so fern $\partial p \cdot dt$, $\partial q \cdot dt$, $\partial r \cdot dt$ (wo alle runden ∂ sich auf t beziehen) die durch das Centrifugal-Gegen-Paar $Q\omega \cdot \sin\delta \cdot dt$ hervorgebrachten Winkel-Geschwindigkeiten sind, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor dt weg dividirt, die drei (Differenzial-) Gleichungen

$$\partial p = \frac{Q\omega \cdot \sin\delta \cdot \cos\alpha''}{\mathfrak{A}},$$

$$\partial q = \frac{Q\omega \cdot \sin\delta \cdot \cos\beta''}{\mathfrak{B}},$$

$$\partial r = \frac{Q\omega \cdot \sin\delta \cdot \cos\gamma''}{\mathfrak{C}},$$

oder

8) $\mathfrak{A} \cdot \partial p = Q\omega \cdot \sin\delta \cdot \cos\alpha''$;

9) $\mathfrak{B} \cdot \partial q = Q\omega \cdot \sin\delta \cdot \cos\beta''$;

10) $\mathfrak{C} \cdot \partial r = Q\omega \cdot \sin\delta \cdot \cos\gamma''$.

In so fern nun aus den Gleichungen (6. u. 7.), in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos\alpha''^2 + \cos\beta''^2 + \cos\gamma''^2 = 1$$

die drei Kosinusse $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$ in p, q, r sich finden lassen, in so fern $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ist, und in so fern endlich auch $\sin\delta$ nur von p, q, r abhängen kann, so sind die Gleichungen (8. — 10.) diejenigen, aus welchen p, q, r also dann auch ω, in t ausgedrückt, sich finden lassen müssen. — Daher wollen wir nun solche zu integriren versuchen.

Man multiplicire zu dem Ende die drei Gleichungen (8. bis 10.) bezüglich mit p, q, r und addire die Resultate, so erhält man (wegen Nr. 6.)

$$\mathfrak{A}p \cdot \partial p + \mathfrak{B}q \cdot \partial q + \mathfrak{C}r \cdot \partial r = 0;$$

also, wenn man integrirt,

11) $\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 = h^2$,

wo h^2 eine noch unbestimmte aber positive Konstante ist, welche je-

jedoch aus den Anfangs-Werthen p', q', r' von p, q, r ihre Bestimmung erhält, nämlich

$$h^2 = \mathfrak{A}p'^2 + \mathfrak{B}q'^2 + \mathfrak{C}r'^2.$$

Multiplicirt man dieselben drei Gleichungen (8. — 10.) bezüglich mit $\mathfrak{A}p$, $\mathfrak{B}q$, $\mathfrak{C}r$, und addirt man abermals die Resultate, so ergiebt sich sogleich (wegen der 7.)

$$\mathfrak{A}^2 p \cdot \partial p + \mathfrak{B}^2 q \cdot \partial q + \mathfrak{C}^2 r \cdot \partial r = 0.$$

Diese Gleichung, integrirt, giebt aber

$$\mathfrak{A}^2 p^2 + \mathfrak{B}^2 q^2 + \mathfrak{C}^2 r^2 = k^2,$$

wo k^2 ebenfalls eine noch zu bestimmende aber positive Konstante ist.

Die Gleichung

$$\cos\lambda_1{}^2 + \cos\mu_1{}^2 + \cos\nu_1{}^2 = 1$$

giebt aber (vermöge der 3.) noch viel schneller

$$12) \quad \mathfrak{A}^2 p^2 + \mathfrak{B}^2 q^2 + \mathfrak{C}^2 r^2 = Q^2,$$

so daß man das vorstehende Integral gar nicht braucht, oder, wenn man es nimmt, $k^2 = Q^2$ findet.

VI. Wenn aber nun die Gleichungen (11. u. 12) bereits zwei Integral-Gleichungen sind zwischen p, q und r, so fehlt jetzt nur noch die dritte. Um diese letztere zu erhalten, muß man endlich doch $\sin\delta$, so wie $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$ in p, q, r auszudrücken suchen. Man hat aber (nach I. Th. Geom. §. 1. VII. 7.)

$$\cos\delta = \cos\lambda_1 \cdot \cos USX_1 + \cos\mu_1 \cdot \cos USY_1 + \cos\nu_1 \cdot \cos USZ_1$$

d. h. (wegen 1. u. 3. und zuletzt wegen 11.)

$$13) \quad \cos\delta = \frac{\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2}{Q\omega} = \frac{h^2}{Q}.$$

Diese Gleichung giebt sogleich

$$14) \quad \omega \cdot \cos\delta = \frac{h^2}{Q},$$

und diese letztere läßt sehen, daß wenn man die Winkel-Geschwindigkeit ω_t oder ω in drei zerlegt, um drei auf einander senkrechte Dreh-Axen, von denen die eine, nämlich $\omega \cdot \cos\delta$, ei-

ner Drehung um die Axe des Anfangs-Gegen-Paares angehört, diese immer und zu allen Zeiten konstant, nämlich $\frac{h^2}{Q}$ seyn wird.

VII. Aus der (14.) folgt aber nun leicht

$$15)\quad Q\omega \cdot \sin\delta = \sqrt{Q^2\omega^2 - h^4} = \sqrt{Q^2(p^2+q^2+r^2) - h^4};$$

oder auch, wenn man statt Q^2 und h^2 oder h^4 ihre Werthe setzt (aus 11. u. 12.)

$$16)\quad Q\omega \cdot \sin\delta = \sqrt{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^2p^2q^2 + (\mathfrak{A}-\mathfrak{C})^2p^2r^2 + (\mathfrak{C}-\mathfrak{B})^2q^2r^2},$$

oder

$$17)\quad Q\omega \cdot \sin\delta = W\ ^{*}),$$

wenn man durch W den Wurzel-Ausdruck zur Rechten in (16.) bezeichnet.

Auf der andern Seite geben die Gleichungen (6. u. 7.) in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos\alpha''^2 + \cos\beta''^2 + \cos\gamma''^2 = 1,$$

augenblicklich

$$18)\quad \cos\alpha'' = \pm\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\cdot qr}{W};\quad \cos\beta'' = \pm\frac{(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\cdot pr}{W};$$

$$\cos\gamma'' = \pm\frac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\cdot pq}{W},$$

wo entweder alle + Zeichen, oder alle − Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die Richtung von SX genommen ist, d. h. je nachdem die positive Richtung der Drehungen gedacht ist.

Substituirt man aber diese Werthe (aus 17. u. 18.) in die Gleichungen (8.—10.), so gehen solche über in die nachstehenden, nämlich

$$19)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}\cdot\partial p \pm (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\cdot qr = 0 \\ \mathfrak{B}\cdot\partial q \pm (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\cdot rp = 0 \\ \mathfrak{C}\cdot\partial r \pm (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot pq = 0 \end{array}\right\} \text{wo entweder alle } (+) \text{ oder alle } (-) \text{ Zeichen gelten.}$$

Dies sind aber genau die von Euler gegebenen Gleichungen.

---

*) Setzt man in (15.)

$$h^4 = h^2 \cdot h^2 = h^2 \cdot (\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2),$$

so erhält man auch noch

$$Q\omega \cdot \sin\delta = \sqrt{(Q^2 - \mathfrak{A}h^2)p^2 + (Q^2 - \mathfrak{B}h^2)q^2 + (Q^2 - \mathfrak{C}h^2)r^2}.$$

VIII. Findet man nun aus den Gleichungen (11. u. 12.)

$$20)\quad p^2 = \frac{Q^2 - \mathfrak{B}h^2 + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{A}} \text{ und } q^2 = \frac{Q^2 - \mathfrak{A}h^2 + (\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{B}};$$

und substituirt man diese Werthe in die dritte der Gleichungen (19.), nachdem selbige vorher in

$$21)\qquad \partial t_r = \pm\frac{\mathfrak{C}}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\cdot pq}$$

umgeformt ist, so erhält man

$$22)\quad t = \int\frac{\pm\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\cdot dr}{\sqrt{-[Q^2-\mathfrak{B}h^2+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2][Q^2-\mathfrak{A}h^2+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2]}}$$

Dieses Integral gehört zu den elliptischen Transcendenten, und führt noch eine Konstante ein, welche dadurch bestimmt wird, daß man für $t = 0$ den (Anfangs-) Werth r' von r kennt. Hat man aus dieser Gleichung r in t gefunden, so geben die Gleichungen (20.) sogleich noch p und q dazu, während zuletzt $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$ ebenfalls ohne weiteres in t ausgedrückt gefunden werden kann.

IX. Man kann aber auch die Differential-Gleichung zwischen t und ω direkt finden. Zu dem Ende verbindet man die drei Gleichungen

$$\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 = h^2, \quad (11.)$$

$$\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2 = Q^2, \quad (12.)$$

und

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$$

mit einander, findet aus ihnen p, q, r in ω ausgedrückt, namentlich

$$23)\qquad p^2 = \frac{Q^2 - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})h^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\omega^2}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})};$$

$$24)\qquad q^2 = \frac{Q^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{C})h^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cdot\omega^2}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})};$$

$$25)\qquad r^2 = \frac{Q^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})h^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\omega^2}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})};$$

und bildet sich aus

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

durch Differenziiren die Gleichung

$$\omega\cdot\partial\omega_t = p\cdot\partial p + q\cdot\partial q + r\cdot\partial r,$$

woraus, wenn man hier herein statt ∂p, ∂q, ∂r ihre Werthe (aus 19.) substituirt

$$26)\quad \partial t_\omega = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}\cdot\frac{\omega}{pqr},$$

d. h. (wegen 23. — 25.)

$$27)\quad t = \int \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\omega\cdot d\omega}{\sqrt{-(Q^2-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})h^2+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\omega^2)(Q^2-(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})h^2+\mathfrak{A}\mathfrak{C}\cdot\omega^2)(Q^2-(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})h^2+\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\omega^2)}}$$

hervorgeht *). Dieses Integral gehört wiederum zu den elliptischen Transcendenten und giebt t in ω, oder ω in t direkt. Die Konstante, welche die Integration einführt, wird dadurch bestimmt, daß man für $t = 0$ den Anfangs-Werth ω' von ω kennt.

Anmerk. Dieses Integral in Verbindung mit dem der Serpoloide löst nun die Aufgabe vollständig, so daß sie sich auf zwei elliptische Transcendenten zurückzieht, deren Auswerthung die einzige Schwierigkeit der Rechnung genannt werden kann.

Wir wollen aber jetzt noch einige Untersuchungen anstellen, welche sich unmittelbar an das Vorstehende anreihen.

§. 92.

I. Bezeichnet man durch l_t die Länge des von der augenblicklichen Dreh-Axe zu Ende der Zeit t, gebildeten Durchmessers des Central-Ellipsoids, so hat man, wenn f die Entfernung des Punktes S von der festen Ebene vorstellt, auf welcher während der Drehung des Körpers das Central-Ellipsoid fortrollt (vgl. §. 90. Nr. 1.):

$$1)\qquad f = \tfrac{1}{2}l_t\cdot\cos\delta,$$

in so fern δ der Winkel ist, welchen die augenblickliche Dreh-

*) Dasselbe Resultat hätte man natürlich auch aus $\partial t_\omega = \partial t_r \cdot \partial r_\omega$ erhalten, wenn man (aus 26.) r, und durch Differentiation dieser Gleichung auch ∂r_ω, in ω ausgedrückt gefunden, den Werth von r aber in den Ausdruck ∂t_r (in 22.) statt r substituirt hätte.

Axe mit der Axe des Anfangs-Gegen-Paares macht. Nach (§. 81. Nr. 4.) findet sich aber diese Entfernung f so, nämlich:

$$f = \sqrt{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda_1^2 + \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu_1^2 + \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu_1^2};$$

also auch, wenn man statt $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ ihre Werthe aus (§. 91. Nr. 3.) substituirt

$$f = \frac{1}{Q} \cdot \sqrt{\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2},$$

d. h. (nach §. 91. Nr. 11.)

$$2) \qquad f = \frac{h}{Q}, \quad \text{oder } h = fQ.$$

Bedenkt man nun, daß a, b, c die drei halben Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids vorstellen, und daß

$$3) \qquad a^2 = \frac{1}{\mathfrak{A}}, \; b^2 = \frac{1}{\mathfrak{B}} \text{ und } c^2 = \frac{1}{\mathfrak{C}}$$

ist, so hat man sogleich noch

$$4) \qquad Q^2 - \mathfrak{A}h^2 = \frac{Q^2}{a^2}(a^2 - f^2),$$

$$5) \qquad Q^2 - \mathfrak{B}h^2 = \frac{Q^2}{b^2}(b^2 - f^2),$$

$$6) \qquad Q^2 - \mathfrak{C}h^2 = \frac{Q^2}{c^2}(c^2 - f^2).$$

Diese Formeln (4.—6.) lassen sehen, daß die drei Ausdrücke $Q^2 - \mathfrak{A}h^2$, $Q^2 - \mathfrak{B}h^2$, $Q^2 - \mathfrak{C}h^2$ nie alle drei zugleich positiv, auch nie alle drei zugleich negativ seyn können, weil, wenn

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C} \quad \text{also} \quad a > b > c$$

gedacht wird, dann f immer zwischen a und c liegen muß.

Man findet ferner (aus § 78. IV. Nr. 14.)

$$\tfrac{1}{2} l_t = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda_1^2 + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu_1^2 + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu_1^2}{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda_1^2 + \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu_1^2 + \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu_1^2}\right)}.$$

Substituirt man nun hier herein statt $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ ihre Werthe (aus §. 91. Nr. 3.), so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} l_t = \sqrt{\left(\frac{p^2 + q^2 + r^2}{\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2}\right)},$$

d. h. (wegen §. 91. Nr. 11.)

$$7) \qquad \tfrac{1}{2} l_t = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{fQ} \quad (\text{§. 90. Nr. 3.}),$$

während man (aus der Gleichung Nr. 14. des §. 91.)

8) $\cos\delta = \frac{h^2}{Q\omega} = \frac{f^2 Q}{\omega}$ *)

hat. Ist also ω in t ausgedrückt, so hat man auch l_t und insbesondere $\cos\delta$, d. h. den Winkel δ, welchen die augenblickliche Dreh-Axe mit der Axe des Anfangs-Gegen-Paares macht, in die Zeit t ausgedrückt.

II. Bestimmen wir nun die Gleichung des Kegels, welchen die augenblickliche Dreh-Axe nach und nach in unserm bewegten Körper beschreibt.

Es seyen zu dem Ende x_1, y_1, z_1 die auf die Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der augenblicklichen Dreh-Axe, und u sey die Entfernung dieses Punktes von S, so hat man

9) $x_1 = u\cdot\frac{p}{\omega}$; $y_1 = u\cdot\frac{q}{\omega}$ und $z_1 = u\cdot\frac{r}{\omega}$,

in so fern $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ die Kosinusse der Winkel sind, welche die augenblickliche Dreh-Axe mit den Axen SX_1, SY_1, SZ_1 macht. Substituirt man hier herein die Werthe von p, q in r und eliminirt man zuletzt r und u, so hat man die gesuchte Gleichung. Diese Elimination bewerkstelligt sich aber dadurch am einfachsten, daß man von den beiden Gleichungen (§. 91. NNr. 11. 12.) ausgeht, nämlich von den Gleichungen

$$\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 = h^2$$

und

$$\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2 = Q^2,$$

solche mit $\frac{u^2}{\omega^2}$ multiplicirt, in die Produkte aber statt $\frac{p^2u^2}{\omega^2}$, $\frac{q^2u^2}{\omega^2}$, $\frac{r^2u^2}{\omega^2}$ sogleich ihre Werthe x_1^2, y_1^2, z_1^2 (aus 9.) substituirt. Dies giebt nämlich die beiden Gleichungen

---

*) Die Gleichungen (7. und 8.) stimmen mit der (1.) genau überein. Man hätte daher l_t kürzer aus der (1.) in Verbindung mit der (Nr. 14. des §. 91.) ableiten können.

$$\mathfrak{A}\cdot x_1^2 + \mathfrak{B}\cdot y_1^2 + \mathfrak{C}\cdot z_1^2 = h^2\cdot\frac{u^2}{\omega^2}$$

und $$\mathfrak{A}^2\cdot x_1^2 + \mathfrak{B}^2\cdot y_1^2 + \mathfrak{C}^2\cdot z_1^2 = Q^2\cdot\frac{u^2}{\omega^2}.$$

Eliminirt man nachgehends noch aus diesen beiden Gleichungen $\frac{u^2}{\omega^2}$, so erhält man sogleich

10) $\mathfrak{A}(Q^2-\mathfrak{A}h^2)\cdot x_1^2 + \mathfrak{B}(Q^2-\mathfrak{B}h^2)\cdot y_1^2 + \mathfrak{C}(Q^2-\mathfrak{C}h^2)\cdot z_1^2 = 0$;

und dies ist die Gleichung des gedachten Kegels, welcher, wie man nun sieht und wie oben (§. 83. VI. und §. 90. Nr. 7.) behauptet wurde, eine Fläche der zweiten Ordnung ist. — Setzt man in diese Gleichung statt h seinen Werth fQ, so wie statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, bezüglich ihre Werthe $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ und $\frac{1}{c^2}$, so schreibt sich die Gleichung desselben Kegels auch noch so, nämlich:

11) $$\frac{a^2-f^2}{a^4}\cdot x_1^2 + \frac{b^2-f^2}{b^4}\cdot y_1^2 + \frac{c^2-f^2}{c^4}\cdot z_1^2 = 0.$$

Sucht man die Kurve, in welcher diese Kegel-Fläche das Central-Ellipsoid schneidet, so findet sich natürlich die Poloide wieder. Auch geht diese Gleichung der Kegel-Fläche in die Gleichungen zweier Ebenen über, so oft unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}<\mathfrak{B}<\mathfrak{C}$, d. h. $a>b>c$ ist, die Entfernung $f = b$ wird. Sie giebt bloß die Gerade SX_1, wenn $f = a$, oder bloß die Gerade SZ_1, wenn $f = c$ werden sollte. Denkt man sich endlich zwei der drei Koefficienten von x_1^2, y_1^2 und z_1^2 in dieser Gleichung einander gleich, so ist der Kegel ein Umdrehungs-Kegel *).

*) Dieser Fall tritt ein, so oft zwei der drei Haupt-Trägheits-Momente, d. h. zwei der drei Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids einander gleich werden, und die Poloide ist dann eine Kreislinie. Er tritt aber auch außerdem noch ein. Wenn z. B.

$$\frac{a^2-f^2}{a^4} = \frac{b^2-f^2}{b^4} \text{ oder } \mathfrak{A}(Q^2-\mathfrak{A}h^2) = \mathfrak{B}\cdot(Q^2-\mathfrak{B}h^2)$$

gesetzt wird, so ist diesen Gleichungen zwar durch $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ oder $a = b$ genügt, aber auch noch wenn f oder Q so genommen werden, daß

$$(a^2+b^2)f^2 = a^2b^2 \text{ oder } Q^2 = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})h^2 \text{ oder } f^2 = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$$

ist. Die Poloide ist aber dann keine Kreislinie.

III. Die Gleichung der Kegel-Fläche, welche die Serpoloide zur Grundfläche hat, wird zu transcendent, um sie hier entwickeln zu wollen.

Dagegen läßt sich leicht die Gleichung einer dritten Kegel-Fläche finden, nämlich derjenigen, welche die Axe des Anfangs-Gegen-Paares bei der Drehung des Körpers im Körper beschreibt.

Sind nämlich x', y', z' die auf SX_1, SY_1, SZ_1 bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes dieser unbeweglichen Axe des Anfangs-Gegen-Paares, dessen Entfernung von S wir durch u' bezeichnen wollen, so sind wieder

$$\frac{x'}{u'},\quad \frac{y'}{u'} \text{ und } \frac{z'}{u'}$$

die Kosinusse der Winkel λ_1, μ_1, ν_1, so daß man (nach §. 91. Nr. 3.) hat

$$\frac{x'}{u'} = \frac{\mathfrak{A}p}{Q},\quad \frac{y'}{u'} = \frac{\mathfrak{B}q}{Q} \text{ und } \frac{z'}{u'} = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}.$$

Findet man hieraus die Werthe von p, q, r und substituirt man solche in die Gleichungen

$$\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 = h^2$$

und

$$\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2 = Q^2,$$

so erhält man

$$\frac{x'^2}{\mathfrak{A}} + \frac{y'^2}{\mathfrak{B}} + \frac{z'^2}{\mathfrak{C}} = \frac{h^2}{Q^2}\cdot u'^2$$

und

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = u'^2 \text{ *)}.$$

Wird nun aus diesen beiden Gleichungen noch u' eliminirt, so hat man zuletzt

$$12)\ \begin{cases} \dfrac{Q^2-\mathfrak{A}h^2}{\mathfrak{A}}\cdot x'^2 + \dfrac{Q^2-\mathfrak{B}h^2}{\mathfrak{B}}\cdot y'^2 + \dfrac{Q^2-\mathfrak{C}h^2}{\mathfrak{C}}\cdot z'^2 = 0 \\ \text{oder} \\ (a^2-f^2)\cdot x'^2 + (b^2-f^2)\cdot y'^2 + (c^2-f^2)\cdot z'^2 = 0. \end{cases}$$

---

*) Da diese Gleichung aus den Elementen der Koordinaten-Theorie sich von selbst versteht, so hätte man hier das zweite der Integrale entbehren können.

Dies ist also die Gleichung der Kegel-Fläche, welche die Axe des Anfangs-Gegen-Paares während der Bewegung des Körpers, im Körper beschreibt. Auch dieser Kegel ist, wie man sieht ein gewöhnlicher Kegel mit elliptischem oder Kreis-Querschnitt. Auch er wird ein Umdrehungs-Kegel, so oft zwei der drei Koefficienten von x'^2, y'^2, z'^2 einander gleich werden. Dieser letztere Fall tritt aber nur dann und dann auch allemal ein, wenn zwei der drei Haupt-Trägheits-Momente, oder zwei der drei Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids einander gleich werden.

IV. Betrachten wir noch die in jedem Augenblicke der Bewegung in den einzelnen Massen-Elementen dM des Körpers vorhandenen „Größen der Bewegung“ und „lebendigen Kräfte.“

Zuvor jedoch wollen wir die Geschwindigkeit v eines Massen-Elementchens dM ihrer Größe und Richtung nach bestimmen. Weil aber jedes Elementchen dM, dessen Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1 seyn mögen (wenn man sie auf die Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 bezieht), zu Ende der Zeit t die drei Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r hat, so hat dasselbe die drei wahren Geschwindigkeiten (in der Richtung der Tangenten der Bahnen)

13) $\quad p\cdot\sqrt{y_1^2+z_1^2}, \qquad q\cdot\sqrt{x_1^2+z_1^2}, \qquad r\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,

in so fern $\sqrt{y_1^2+z_1^2}$, $\sqrt{x_1^2+z_1^2}$ und $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ bezüglich die drei Entfernungen des Elementchens dM von den drei Haupt-Dreh-Axen sind. Zerlegt man diese wahren Geschwindigkeiten nach den drei Axen SX_1, SY_1 und SZ_1 (nach Anleitung des §. 37), so erhält man (wenn p, q, r als positiv vorausgesetzt werden, so oft die Drehung von SY_1 nach SX_1, von SX_1 nach SZ_1 und von SZ_1 nach SY_1 hin erfolgt):

	nach SX_1	nach SY_1		nach SZ_1
von der erstern:	0 (Null),	$+pz_1$	und	$-py_1$;
von der andern:	$-qz_1$,	0 (Null)	und	$+qx_1$;
von der dritten:	$+ry_1$,	$-rx_1$	und	0 (Null).

Die Summen der parallel mit einer und derselben Axe wirkenden Geschwindigkeiten, geben nun die Seiten-Geschwindigkeiten

v_1, v_2, v_3, in welche die gesuchte Geschwindigkeit v nach den Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zerlegt werden kann, nämlich

14) $v_1 = ry_1 - qz_1$; $v_2 = pz_1 - rx_1$ und $v_3 = qx_1 - py_1$.

Die Geschwindigkeit v des Elementchens dM findet sich nun der Größe und Richtung nach aus diesen Seiten-Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 ohne Weiteres, jedoch ihrer Richtung nach nur gegen die selbst noch beweglichen Haupt-Dreh-Axen.

V. Die Produkte $v_1 \cdot dM$, $v_2 \cdot dM$, $v_3 \cdot dM$ sind nun die in jedem Augenblicke, d. h. zu Ende der Zeit t in den Elementen vorhandenen „Größen der Bewegung," nach den Axen SX_1, SY_1 und SZ_1 zerlegt. Bezeichnet man durch N_1, M_1, L_1 die Summe der statischen Momente dieser „Größen der Bewegung," in Bezug auf die Momenten-Axen SX_1, SY_1 und SZ_1, so findet sich sogleich

$$N_1 = \Sigma(z_1 v_2 - y_1 v_3) \cdot dM,$$
$$M_1 = \Sigma(x_1 v_3 - z_1 v_1) \cdot dM,$$
und
$$L_1 = \Sigma(y_1 v_1 - x_1 v_2) \cdot dM.$$

Denkt man aber daran, daß SX_1, SY_1 und SZ_1 die zu dem Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen sind, daß also

$$\Sigma(x_1 y_1 \cdot dM) = \Sigma(x_1 z_1 dM) = \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) = 0$$

und

$$\Sigma(x_1^2 + y_1^2) \cdot dM = \mathfrak{C}, \quad \Sigma(x_1^2 + z_1^2) \cdot dM = \mathfrak{B}$$

so wie
$$\Sigma(y_1^2 + z_1^2) \cdot dM = \mathfrak{A}$$

ist, — so gehen, wenn man statt v_1, v_2, v_3 ihre obigen Werthe setzt, die letztern Gleichungen über in

15) $N_1 = \mathfrak{A}p$, $M_1 = \mathfrak{B}q$, $L_1 = \mathfrak{C}r$.

Die Produkte $\mathfrak{A}p$, $\mathfrak{B}q$ und $\mathfrak{C}r$ stellen also die Summe der statischen Momente vor von allen, zu Ende der Zeit t in den einzelnen Massen-Elementchen dM vorhandenen „Größen der Bewegung," in Bezug auf die Momenten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1.

Dieselben Produkte $\mathfrak{A}p$, $\mathfrak{B}q$ und $\mathfrak{C}r$ stellen aber auch (nach §. 91. Nr. 3.) die Momente der drei Gegen-Paare vor, in welche sich das Anfangs-Gegen-Paar Q senkrecht auf die drei Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zerlegt.

Ferner ist auch (nach II. Th. §. 34.) die größeste Momenten-Summe derselben „Größen der Bewegung"

$$= \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2} = \sqrt{\mathfrak{A}^2 p^2 + \mathfrak{B}^2 q^2 + \mathfrak{C}^2 r^2};$$

also auch (nach §. 91. Nr. 12.)

$$= Q;$$

und die Kosinusse der Winkel, welche die Axe dieses Haupt-Momentes mit SX_1, SY_1, SZ_1 macht, sind bezüglich

$$\frac{N_1}{Q} \text{ oder } \frac{\mathfrak{A}p}{Q}, \quad \frac{M_1}{Q} \text{ oder } \frac{\mathfrak{B}q}{Q} \quad \text{und} \quad \frac{L_1}{Q} \text{ oder } \frac{\mathfrak{C}r}{Q}.$$

Also fällt die Haupt-Ebene, d. h. die Ebene der größesten Momenten-Summe (II. Th. §. 34.) der vorhandenen Größen der Bewegung, genau mit der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares zusammen (nach §. 91. Nr. 3.), und die größte Momenten-Summe selbst (aller „Größen der Bewegung") ist genau dem Momente Q des Anfangs-Gegen-Paares gleich.

VI. Die Summe aller zu Ende der Zeit t im Körper vorhandenen „lebendigen Kräfte" (§. 15.) ist

$$= \Sigma(v^2 \cdot dM) = \Sigma(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot dM.$$

Substituirt man aber hier herein statt v_1, v_2, v_3 ihre Werthe (aus 14.), und denkt man daran, daß

$$\Sigma(x_1 y_1 \cdot dM) = \Sigma(x_1 z_1 \cdot dM) = \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) = 0$$

ist, so erhält man dieselbe Summe der lebendigen Kräfte

$$= \mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2;$$

also auch (nach §. 91. Nr. 11.)

$$= h^2, \quad \text{oder auch} = f^2 Q^2$$

(§. 92. Nr. 2.).

Die Summe der lebendigen Kräfte im Körper ist also zu allen Zeiten eine und dieselbe, übrigens von der Größe und Lage des Anfangs-Gegen-Paares abhängig, nämlich $= h^2 = f^2 Q^2$.

§. 93.

Nach diesen Bemerkungen, welche die Natur der Bewegung des Körpers um den festen Punkt S (oder um den freien aber ruhenden Schwer-Punkt S) immer mehr zu veranschaulichen geeignet sind, wollen wir noch die Bewegung der drei Haupt-

Dreh-Axen des Körpers etwas näher in's Auge fassen und zwar gegen die, durch den Punkt S und im absoluten Raume unbeweglich gedachte Ebene des Anfangs-Gegen-Paares.

Zu dem Ende lege man durch S in der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares zwei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen SX und SY, und lasse SZ mit der positiven Seite der Axe des Anfangs-Gegen-Paares zusammenfallen. Ist nun θ der Winkel, unter welchem die Ebenen X_1SY_1 und XSY sich schneiden (die Neigung der beiden Ebenen) und SD die Durchschnitts-Linie (Knoten-Linie); ist ferner W. XSD $= \varphi$ und W. $DSX_1 = \psi$ (ganz so gedacht, wie wir dies im I. Th. Geom. §. 3. angenommen haben), so daß φ die Lage der Knoten-Linie in der Ebene XSY, ψ aber die Lage der Axe SX_1 gegen die Knoten-Linie in der Ebene X_1SY_1 vorstellen, so hat man, weil λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel ZSX_1, ZSY_1 und ZSZ_1 sind (nach I. Th. Geom. §. 3.) sogleich

1) $$\cos\lambda_1 = \sin\psi\cdot\sin\theta; \quad \cos\mu_1 = \cos\psi\cdot\sin\theta;$$
$$\cos\nu_1 = \cos\theta;$$

d. h. vermöge der Gleichungen (§. 91. Nr. 3.)

2) $$\sin\psi\cdot\sin\theta = \frac{\mathfrak{A}p}{Q};$$ 3) $$\cos\psi\cdot\sin\theta = \frac{\mathfrak{B}q}{Q}$$

und

4) $$\cos\theta = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}.$$

Die letztere giebt sogleich die Neigung θ in r, also auch in t ausgedrückt. Dividirt man aber die (2.) durch die (3.), so giebt dies sogleich noch

5) $$tg\psi = \frac{\mathfrak{A}p}{\mathfrak{B}q},$$

so daß auch ψ in p und q, also auch in t ausgedrückt sich sieht. Es bleibt also jetzt bloß der Winkel φ noch zu bestimmen übrig, der in den Gleichungen (2.—4.) nicht vorkommt, so daß man zu einer neuen Gleichung seine Zuflucht nehmen muß.

In dem nach t folgenden unendlich kleinen Zeit-Theilchen dt, wächst aber θ um $d\theta$, φ um $d\varphi$, und ψ um $d\psi$, so je-

doch, daß $d\theta = \partial\theta_t \cdot dt$, $d\varphi = \partial\varphi_t \cdot dt$ und $d\psi = \partial\psi_t \cdot dt$ ist. Nun ist die Winkel-Geschwindigkeit r nichts weiter als die Winkel-Geschwindigkeit der Axe SX_1 in der Ebene X_1SY_1 und zwar in der Richtung von SY_1 nach SX_1 hin gezählt. Denkt man sich also einen Punkt in SX_1 der von S um die Längen-Einheit entfernt ist, und nennt man w_t oder w den Weg dieses Punktes in der Zeit t und in der Ebene X_1SY_1, so ist (nach §§. 1. 4.)

$$r = \frac{dw}{dt}.$$

Der in der unmittelbar nach t folgenden unendlich kleinen Zeit dt beschriebene Weg dw besteht aber 1) aus dem Wege $\cos\theta \cdot d\varphi$ der Knoten-Linie in der Ebene X_1SY_1, welcher mit w in derselben Richtung gedacht ist, und 2) aus dem unendlich kleinen Zuwachs $d\psi$, um welchen ψ, d. h. die Lage der Axe SX_1 gegen die Knoten-Linie sich ändert, und um welchen (nach der von uns, dem I. Th. Geom. §. 3. gemäß angenommenen Lage der Axen SX_1 und SY_1) der erstere Theil $\cos\theta \cdot d\varphi$ sich vermindert. Man hat daher

$$r = \frac{dw}{dt} = \frac{\cos\theta \cdot d\varphi - d\psi}{dt},$$

d. h.

$$6) \qquad r = \cos\theta \cdot \partial\varphi - \partial\psi,$$

wo sich alle ∂ auf t beziehen. Diese Gleichung (6.) giebt nun noch den gesuchten Winkel φ in die Zeit t ausgedrückt, und zwar mittelst der nachstehenden Rechnung.

Man differenziirt die Gleichung (5.), so daß man

$$7) \qquad \frac{\partial\psi}{\cos\psi^2} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{q \cdot \partial p - p \cdot \partial q}{q^2}$$

erhält, und eliminirt nun (aus 5. 6. u. 7.) sogleich ψ und $\partial\psi$. Weil aber (aus 5. und wegen §. 91. Nr. 12.)

$$\cos\psi^2 = \frac{\mathfrak{B}^2 q^2}{\mathfrak{A}^2 p^2 + \mathfrak{B}^2 q^2} = \frac{\mathfrak{B}^2 q^2}{Q^2 - \mathfrak{C}^2 r^2}$$

sich findet, so giebt die (7.) sogleich

$$8) \qquad \partial\psi = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot (q \cdot \partial p - p \cdot \partial q)}{Q^2 - \mathfrak{C}^2 r^2},$$

oder, wenn man ∂p und ∂q mittelst der Gleichungen (§. 91. Nr. 19.) eliminirt,

$$\partial\psi = r\cdot\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2)-(\mathfrak{A}^2p^2+\mathfrak{B}^2q^2)}{Q^2-\mathfrak{C}^2r^2},$$

d. h. (wegen §. 91. Nr. 11. u. 12.)

$$9)\qquad \partial\psi = \frac{(\mathfrak{C}h^2-Q^2)r}{Q^2-\mathfrak{C}^2r^2}.$$

Nun folgt aber (aus 6.)

$$10)\quad \partial\varphi = \frac{r+\partial\psi}{\cos\theta} = \frac{Q}{\mathfrak{C}r}\cdot(r+\partial\psi) = Q\cdot\frac{h^2-\mathfrak{C}r^2}{Q^2-\mathfrak{C}^2r^2}.$$

Weil endlich $\partial\varphi_r = \partial\varphi_t\cdot\partial t_r = \partial\varphi\cdot\partial t_r$ ist, so folgt hieraus und aus (§. 91. Nr. 22.)

$$11)\ \varphi = Q\cdot\int\frac{\pm\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\cdot(h^2-\mathfrak{C}r^2)\cdot dr}{(Q^2-\mathfrak{C}^2r^2)\cdot\sqrt{-[Q^2-\mathfrak{B}h^2+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2][Q^2-\mathfrak{A}h^2+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2]}},$$

wo die hinzutretende unbestimmte Konstante durch die Anfangs-Werthe φ' und r' von φ und r sofort ihre Bestimmung erhält. Auch dieses Integral gehört zu den elliptischen Transcendenten. Ist aber solches ausgewerthet, so sieht sich φ, ψ und θ in t ausgedrückt, so daß man zu jeder Zeit t die Lage der drei Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1 und SZ_1 gegen die im Raume feste Ebene XSY des Anfangs-Gegen-Paares berechnen kann.

Anmerk. 1. Ist die Anfangs-Bewegung durch einen Stoß entstanden, welchen eine Masse m mit der Geschwindigkeit v' in der bestimmten Richtung AB ihres Schwer-Punktes ausübt, während m an dem gestoßenen Körper hängen bleibt, so daß die Richtung AB zu gleicher Zeit die Richtung des Stoßes ist, so bestimmen (nach II. Th. §. 23.) die Richtung AB und der feste Punkt S die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares, und das Produkt $mv'f'$ das Moment Q desselben, wenn f' die Entfernung der Richtung AB von S vorstellt. — Sind nun λ', μ', ν' die Anfangs-Werthe der Winkel λ_1, μ_1, ν_1, d. h. der Winkel ZSX_1, ZSY_1 und ZSZ_1, so sind

$$p' = \frac{Q\cdot\cos\lambda'}{\mathfrak{A}},\quad q' = \frac{Q\cdot\cos\mu'}{\mathfrak{B}}\quad\text{und}\quad r' = \frac{Q\cdot\cos\nu'}{\mathfrak{C}}$$

die Anfangs-Werthe der Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r. Der Anfangs-Werth φ' von φ dagegen hängt von der Annahme der Axe SX ab, welche gegen die Anfangs-Lage der Knoten-Linie SD (die man berechnen kann, sobald nur die Haupt-Dreh-Axen im Körper bekannt sind) ganz beliebig genommen werden kann.

Anmerk. 2. Man könnte sich auch noch fragen: 1) Mit welcher Geschwindigkeit der Pol der augenblicklichen Umdrehungs-Axe sich vom Mittel-Punkte S entfernt? (Diese wird offenbar mit dem Differential-Koefficienten des Radius-Vektor, d. h. der Winkel-Geschwindigkeit proportional) — 2) Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit welcher derselbe Pol die Poloide und 3) die Serpoloide durchläuft? — Endlich: 4) Wie groß ist die Winkel-Geschwindigkeit desselben Pols um die Axe des Anfangs-Gegen-Paares? U. dgl. m. — Weil aber diese Fragen einerseits geringeres Interesse haben, und andererseits keinen weiteren Schwierigkeiten der Rechnung unterliegen, so müssen wir uns wegen Mangels an Raum enthalten, diese Rechnungen hier wieder zu geben. Wir wollen daher in dem nächsten Paragraphen bloß noch einige Betrachtungen anstellen I. über die Geschwindigkeiten, mit welcher die End-Punkte der drei Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids 1) um die Axe des Anfangs-Gegen-Paares kreisen, 2) von der durch den Mittel-Punkt S gedachten Ebene des Anfangs-Gegen-Paares sich entfernen oder sich ihr nähern; endlich II. über die Kurven, welche ihre Projektionen auf der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares beschreiben.

§. 94.

Zu dem Ende gehen wir abermals von den beiden Integralen (§. 91. NNr. 11. u. 12.) aus, nämlich von

$$1) \qquad \mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2 = h^2,$$
$$2) \qquad \mathfrak{A}^2p^2+\mathfrak{B}^2q^2+\mathfrak{C}^2r^2 = Q^2,$$

und verbinden damit die drei Gleichungen

$$3)\quad \cos ZSX_1 = \cos\lambda_1 = \sin\psi\cdot\sin\theta = \frac{\mathfrak{A}p}{Q},$$

$$4)\quad \cos ZSY_1 = \cos\mu_1 = \cos\psi\cdot\sin\theta = \frac{\mathfrak{B}q}{Q},$$

$$5)\quad \cos ZSZ_1 = \cos\nu_1 = \cos\theta = \frac{\mathfrak{C}r}{Q},$$

so wie noch die Gleichung (§. 93. Nr. 10.)

$$6)\quad \partial\varphi_t = Q\cdot\frac{h^2-\mathfrak{C}r^2}{Q^2-\mathfrak{C}^2r^2},$$

so werden wir beliebig viele neue Gleichungen erhalten, von deren jeder wir ihre geometrische Bedeutung im Central-Ellipsoid aufsuchen können, sobald wir nicht aus den Augen lassen, daß die drei halben Haupt-Durchmesser des letztern gegeben sind durch die Gleichungen

$$7)\ a^2 = \mathfrak{A}^{-1};\quad 8)\ b^2 = \mathfrak{B}^{-1}\ \text{und}\ 9)\ c^2 = \mathfrak{C}^{-1}.$$

I. Aus der Gleichung (5.) folgt zunächst

$$10)\quad \sin\theta = \frac{1}{Q}\cdot\sqrt{Q^2-\mathfrak{C}^2r^2},$$

während $\varrho\cdot\sin\theta$ die Projektion ist, einer beliebigen, von S aus auf SZ_1 genommenen Länge ϱ, auf die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares (XSY). Nun ist aber

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2\cdot\sin\theta^2\cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\varrho^2\cdot\sin\theta^2\cdot\partial\varphi_t\cdot dt$$

ein unendlich kleiner Sektor, welchen diese Projektion $\varrho\cdot\sin\theta$ in der Zeit dt, welche unmittelbar nach t folgt, auf der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares beschreibt; also ist

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2\int_{t\div 0}\sin\theta^2\cdot\partial\varphi_t\cdot dt,$$

der in der Zeit t von der Projektion $\varrho\cdot\sin\theta$ auf der Ebene XSY beschriebene Sektor. Derselbe Sektor ist also auch (nach 6. u. 10.)

$$11)\ \cdots = \tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\int_{t\div 0}(h^2-\mathfrak{C}r^2)\cdot dt = \tfrac{1}{2}\varrho^2\cdot\left(h^2\cdot t-\int_{t\div 0}\mathfrak{C}r^2\cdot dt\right).$$

Nimmt man aber auf den beiden andern Haupt-Dreh-Axen ebenfalls die Länge ϱ, so sind die von den Projektionen dieser

Längen in derselben Zeit t auf derselben Ebene des Anfangs-Gegen-Paares beschriebenen Sektoren bezüglich:

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\left(h^2 t - \int_{t \div 0} \mathfrak{B} q^2 \cdot dt\right),$$

und

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\left(h^2 t - \int_{t \div 0} \mathfrak{A} p^2 \cdot dt\right).$$

Addirt man nun diese drei Sektoren, so erhält man ihre Summe

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\left(3h^2 t - \int_{t \div 0} (\mathfrak{A} p^2 + \mathfrak{B} q^2 + \mathfrak{C} r^2)\cdot dt\right),$$

d. h. (nach 1.)

$$= \frac{\varrho^2 h^2}{Q}\cdot t.$$

Folglich ist die Summe dieser drei Sektoren mit der Zeit t proportional.

II. Nehmen wir statt ϱ auf den drei Axen SZ_1, SY_1, SX_1 bezüglich die Längen $\varrho\cdot\sqrt{\mathfrak{C}}$, $\varrho\cdot\sqrt{\mathfrak{B}}$, $\varrho\cdot\sqrt{\mathfrak{A}}$ *), so sind die von den Projektionen dieser Längen auf die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares in letzterer Ebene und in der Zeit t beschriebenen drei Sektoren bezüglich

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\left(\mathfrak{C} h^2\cdot t - \int_{t \div 0} \mathfrak{C}^2 r^2 \cdot dt\right),$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\left(\mathfrak{B} h^2\cdot t - \int_{t \div 0} \mathfrak{B}^2 q^2 \cdot dt\right)$$

und

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\cdot\left(\mathfrak{A} h^2\cdot t - \int_{t \div 0} \mathfrak{A}^2 p^2 \cdot dt\right).$$

Folglich ist die Summe dieser drei Sektoren (nach 2.)

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{Q}\left((\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\cdot h^2 - Q^2\right)\cdot t,$$

also wiederum mit der Zeit t proportional.

---

*) D. h. bezüglich

$$\frac{\varrho}{c},\quad \frac{\varrho}{b} \text{ und } \frac{\varrho}{a}.$$

III. Da $\sin\theta = \sin Z_1SZ$, also $c\cdot\sin\theta$ auch die Entfernung des dritten Haupt-Pols des Central-Ellipsoids von der Axe des Anfangs-Gegen-Paares ist, und da man noch $c^2 = \frac{1}{\mathfrak{C}}$ hat, so ist das Quadrat dieser Entfernung $(c^2\cdot\sin\theta^2)$ (nach 5. oder 10.)

$$= \frac{1}{\mathfrak{C}} - \frac{\mathfrak{C}r^2}{Q^2}.$$

Daher sind die Quadrate der Entfernungen der beiden andern Haupt-Pole von der Axe des Anfangs-Gegen-Paares bezüglich

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} - \frac{\mathfrak{B}q^2}{Q^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{A}p^2}{Q^2};$$

folglich ist die Summe aller drei Quadrate

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} - \frac{h^2}{Q^2} = a^2 + b^2 + c^2 - f^2.$$

Die Summe dieser drei Quadrate ist also konstant, d. h. zu jeder Zeit t eine und dieselbe.

IV. Multiplicirt man aber jedes dieser Quadrate bezüglich mit $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, d. h. bezüglich mit $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{b^2}$ und $\frac{1}{a^2}$, so ist die Summe dieser drei Produkte

$$= 3 - \frac{\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2}{Q^2} = 3 - 1 = 2,$$

also ebenfalls konstant.

Dieses letztere Resultat läßt sich übrigens auch so schreiben:

$$\sin ZSX_1{}^2 + \sin ZSY_1{}^2 + \sin ZSZ_1{}^2 = 2,$$

und folgt freilich aus der Gleichung

$$\cos ZSX_1{}^2 + \cos ZSY_1{}^2 + \cos ZSZ_1{}^2 = 1$$

schnell genug und selbst dann, wenn SZ eine ganz beliebig gedachte Gerade ist, und nicht eben die Axe des Anfangs-Gegen-Paares.

V. Sucht man den Inhalt der Durchschnitts-Ellipse, welche die durch den Mittel-Punkt S gedachte Ebene des Anfangs-Gegen-Paares mit dem Central-Ellipsoid in jedem Augenblicke macht, so findet sich solcher

$$= \frac{abc}{f}\pi.$$

Dieser Inhalt ist also in jeder Lage des Körpers von der Zeit t unabhängig, obgleich die Form dieser Durchschnitts-Ellipse zu den verschiedenen Zeiten verschieden ist *).

VI. Sucht man die Kurve, welche die Projektion des dritten Haupt-Pols auf die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares in dieser Ebene beschreibt, so ist, wenn ϱ den Radius-Vektor von S aus genommen bedeutet,

$$\varrho = c \cdot \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{C}^2 r^2}{Q^2}\right)}.$$

Da nun φ der Winkel ist, welchen dieser Radius-Vektor ϱ beschreibt, so hat man die Gleichung der gesuchten Kurve zwischen den Polar-Koordinaten ϱ und φ, wenn man die vorstehende Gleichung mit der Gleichung (6.) nämlich mit

$$\partial\varphi_t = k \cdot \frac{h^2 - \mathfrak{C}r^2}{k^2 - \mathfrak{C}^2 r^2},$$

und mit der Gleichung zwischen r und t (§. 91. Nr. 22.) nämlich

$$\partial t_r = \frac{\mathfrak{C} \cdot \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{\sqrt{-[k^2 - \mathfrak{B}h^2 + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2][k^2 - \mathfrak{A}h^2 + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2]}}$$

durch Elimination von t und r mit einander verbindet. Man nimmt zu dem Ende

$$\partial\varphi_\varrho = \partial\varphi_t \cdot \partial t_r \cdot \partial r_\varrho,$$

substituirt rechts statt $\partial\varphi_t$ und ∂t_r ihre vorstehenden Werthe, bildet aus

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{C}^2 r^2}{k^2}\right)} \text{ die Gleichung } \mathfrak{C}\varrho^2 = k^2 - \mathfrak{C}^2 r^2,$$

und daraus, wenn man die letztere nach ϱ differenziirt,

$$\varrho = -\mathfrak{C}r \cdot \partial r_\varrho,$$

*) Die Resultate III. u. V. lassen sich als geometrische Eigenschaften eines jeden Ellipsoids ansehen, wie wir solche im (§. 85.) hingestellt haben.

findet so r und ∂r_ϱ in ϱ ausgedrückt, und erhält also

$$\partial\varphi_\varrho = F_\varrho, \text{ mithin } \varphi = \int F_\varrho \cdot d\varrho$$

als Gleichung der gesuchten Kurve. — Was aber von dem dritten Haupt-Pol so eben gesagt worden ist, gilt natürlich mutatis mutandis für jeden der beiden andern ebenfalls.

Daraus ergiebt sich aber, wenn man die hier angedeuteten Rechnungen wirklich ausführt, daß die von den Projektionen der Haupt-Pole des Central-Ellipsoids auf die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares beschriebenen Kurven von derselben Gattung sind, wie die Serpoloide. — In dem besondern Falle jedoch wo die Serpoloide eine Spirale wird, werden zwar diese Kurven ebenfalls Spiralen, aber von einer andern Art, denn sie halten sich immer zwischen zweien concentrischen Kreisen, welche gleichsam ihre Asymptoten sind, während, wie wir (aus §. 84.) wissen, bei der Spirale, in welche die Serpoloide übergeht, der zweite Kreis ein bloßer Punkt wird, der gleichsam als Asymptote dieser Spirale angesehen werden kann.

§. 95.

Von der Stabilität der Drehung um eine der drei Haupt-Dreh-Axen.

I. Wirkt das zu Anfang stoßende Gegen-Paar von Kräften in einer Ebene, die senkrecht steht auf die eine oder die andere derjenigen beiden Haupt-Dreh-Axen, deren zugehörige Haupt-Momente der Trägheit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ das kleinste oder das größte ist, so daß der mit diesen Haupt-Dreh-Axen der Richtung nach zusammenfallende halbe Haupt-Durchmesser a oder c bezüglich der größte oder der kleinste ist, so entsteht eine Drehung um diese Haupt-Dreh-Axe, welche immerfort dauert mit derselben Winkel-Geschwindigkeit, während die Dreh-Axe im Raume und im Körper unverändert bleibt (§. 90. Nr. 5.). — Wird dann die Bewegung durch ein von außen neu hinzutretendes aber sehr kleines Gegen-Paar von Kräften abgeändert, so wird die Dreh-Axe wiederum die Poloide und die Serpoloide beschreiben, während sich die Poloide um die Haupt-Dreh-Axe gleichsam wie um einen Mittel-Punkt herumlegt. Es wird

also nun die augenblickliche Dreh-Axe um diese Haupt-Dreh-Axe sich herumbewegen, und von der gedachten Haupt-Dreh-Axe entweder immer nur sehr wenig sich entfernen, oder doch periodisch im Körper sehr nahe an die Haupt-Dreh-Axe zurückkommen. Daher nennt man die Drehung um eine von diesen beiden Haupt-Dreh-Axen stabil.

II. Ganz anders ist es aber, wenn das Anfangs-Gegen-Paar senkrecht steht auf derjenigen Haupt-Dreh-Axe, welche mit dem mittleren halben Haupt-Durchmesser b des Central-Ellipsoids zusammenfällt. Die um diese Haupt-Dreh-Axe beginnende Drehung dauert zwar ebenfalls mit constanter Geschwindigkeit fort, während die Dreh-Axe im Raume wie im Körper dieselbe bleibt. Wird aber die Bewegung durch irgend ein noch so kleines von außen neu hinzutretendes Gegen-Paar von Kräften um noch so wenig geändert, so legt sich die Poloide, welche jetzt von der augenblicklichen Dreh-Axe beschrieben wird, entweder um den größesten a oder um den kleinsten c der Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids herum, oder sie ist die Ellipse, welche durch die Pole des mittlern Haupt-Durchmessers b hindurchgeht; und zwar tritt der erstere oder der andere oder der dritte dieser drei Fälle ein, je nachdem die Tangential-Ebene an dem Pol der zunächst entstehenden augenblicklichen Dreh-Axe, von dem Mittel-Punkt S der Drehung weiter abliegt, oder ihm näher liegt, oder eben so weit von diesem Mittel-Punkte ab bleibt, als sie es anfänglich war (nämlich um die Länge b). — Jetzt entfernt sich also die augenblickliche Dreh-Axe nach und nach sehr weit von der anfänglichen SY oder b, und legt sich auch nicht so um die gedachte Haupt-Dreh-Axe herum, daß sie periodisch auf beiden Seiten dahin oder in die Nähe derselben zurückkehrte, und in dieser Beziehung sagt man „die Drehung „um die mittlere Haupt-Dreh-Axe wäre nicht stabil."

Es ist aber in dem Falle, wo die Entfernung der Tangential-Ebene vom Mittel-Punkte, nach der von außen hinzugetretenen sehr kleinen Aenderung, doch noch dieselbe bleibt, wo also die Poloide eine Ellipse wird (d. h. eine von zwei Ellipsen, de-

ren Ebenen sich in dem mittleren Haupt-Durchmesser SY oder b schneiden) doch noch zu unterscheiden, ob der Pol der neuen augenblicklichen Dreh-Axe auf die eine Hälfte dieser Ellipse gerückt ist, oder auf die andere Hälfte. Wenn nämlich der Pol der augenblicklichen Dreh-Axe in dem erstern Falle immer weiter von dem Pole der Anfangs-Dreh-Axe SY abrückt, bis er endlich nach unendlich vielen Umdrehungen des Körpers (vgl. §. 84. II.) mit dem entgegengesetzten Pole des mittlern Haupt-Durchmessers 2b zusammenfallen will, — wird im andern Falle der Pol der augenblicklichen Umdrehungs-Axe auf der andern Hälfte derselben Ellipse in derselben Richtung fortschreiten, daher sogleich wieder, wenn auch abermals erst nach unendlich vielen Drehungen, in seine alte Lage (d. h. in den End-Punkt von b) so nahe als man nur immer will zurückkehren. In diesem letztern Falle entfernt sich also die augenblickliche Dreh-Axe wiederum nur sehr wenig von dem mittlern Haupt-Durchmesser, um den anfänglich die konstante Drehung statt gefunden hat, nämlich nur um so viel, als die von außen statt gefundene Einwirkung sie entfernt hat, und kommt ihr nachgehends immer näher.

III. Die beiden Ellipsen, in welche die Poloiden ausnahmsweise übergehen, wenn die Entfernung f der Tangential-Ebene, welcher die Poloiden ihre Entstehung verdanken, vom Mittel-Punkte S, dem mittlern halben Haupt-Durchmesser b des Central-Ellipsoids gleich ist, — zertheilen die ganze Oberfläche des Ellipsoids in vier Lappen, von denen je zwei einander gegenüber stehende einander congruent sind, so daß bloß zwei derselben zu betrachten bleiben.

Bringt nun irgend ein stoßendes Gegen-Paar den Körper um den Punkt S herum in drehende Bewegung, und befindet sich der Pol der augenblicklichen Dreh-Axe in dem einen oder in dem andern dieser Lappen, so geht er aus selbigem nie heraus, sondern die ganze Poloide, welche er im Laufe der Drehung des Körpers beschreibt, bleibt in demselben Lappen und legt sich um seinen mittlern Punkt herum. Liegt aber der Pol

der augenblicklichen Umdrehungs-Axe einmal in einer der Grenz-Ellipsen dieser Lappen, so tritt er auch aus dieser nicht heraus, sondern er bleibt immer in selbiger, so daß eben diese Grenz-Ellipse, zum Theil oder halb, die von ihm während der Drehung des Körpers beschriebene Poloide ist.

Ist nun a>b>c, aber a von b, oder b von c nur sehr wenig verschieden, so ist der eine dieser beiden Lappen sehr schmal. Dreht sich daher der Körper konstant um den Mittel-Punkt dieses sehr kleinen Lappens, mag letzterer der Pol des größten oder des kleinsten Haupt-Durchmessers des Ellipsoids seyn, so kann ein sehr kleines von außen noch hinzutretendes Gegen-Paar von Kräften den Pol der augenblicklichen Dreh-Axe doch leicht aus dem sehr kleinen Lappen heraus und entweder in die Grenz-Ellipse oder in den andern Lappen hinein treiben, und in so fern ist also auch die in (I.) behauptete Stabilität der Drehung um den größten oder um den kleinsten Haupt-Durchmesser als Dreh-Axe desto geringer, je weniger dieser Haupt-Durchmesser von dem mittlern Haupt-Durchmesser verschieden ist.

Ja selbst dann, wenn der Pol der augenblicklichen Dreh-Axe in dem sehr kleinen, aber dann nur sehr schmalen, dagegen immer von einem Pol zu dem entgegengesetzten des mittlern Haupt-Durchmessers reichenden Lappen bleibt, so kann er doch um den Mittel-Punkt des Lappens eine sehr lange Poloide beschreiben, so daß sich die augenblickliche Dreh-Axe von dem größten oder kleinsten Haupt-Durchmesser (um welchen die konstante Drehung statt gefunden hat, ehe das sehr kleine Gegen-Paar von außen noch hinzugetreten ist) doch sehr weit entfernen; welcher letztere Umstand jedoch der Stabilität der Drehung um SY_1 keinen Eintrag thun würde, wenn man unter Stabilität der Drehung die Bewegung der augenblicklichen Dreh-Axe um die Haupt-Dreh-Axe herum und die periodische Wiederkehr in die Nähe dieser Haupt-Dreh-Axe versteht.

In den Körpern also, wo das kleinste oder größte Haupt-Moment der Trägheit von dem mittlern nur sehr wenig verschieden ist, und wo folglich das zu dem Mittel-Punkte der Drehung

gehörige Central-Ellipsoid sehr nahe ein Umdrehungs-Ellipsoid ist, ist die Drehung nur um diejenige Haupt-Dreh-Axe stabil zu nennen, mit welcher derjenige der beiden andern Haupt-Durchmesser, welcher von dem mittlern am meisten verschieden ist *), zusammenfällt.

Anmerk. Wir haben in den bisherigen Untersuchungen zur Auffindung der Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r, ω und der Lage der Haupt-Dreh-Axen (d. h. von φ, ψ, θ) als Funktionen der Zeit, immer den allgemeinsten Fall vor Augen gehabt, in welchem die drei Haupt-Trägheits-Momente, also die drei Haupt-Durchmesser 2a, 2b, 2c alle drei von einander verschieden sind, und in welchem auch f von a, b, c noch verschieden, d. h. keine der drei Differenzen

$$Q^2 - \mathfrak{A}h^2, \quad Q^2 - \mathfrak{B}h^2, \quad Q^2 - \mathfrak{C}h^2,$$

der Null gleich ist. In diesem allgemeinen Falle kommt man, wie wir gesehen haben, zu den beiden elliptischen Transcendenten für r und φ (in t), von deren Auswerthung das ganze Problem zuletzt abhängt.

Betrachten wir nun einige der besonderen Fälle, wo diese End-Integrationen einfacher werden und sich mit Leichtigkeit durchführen lassen.

§. 96.

Betrachtung einiger besondern Fälle der Aufgabe.

I. Nehmen wir zunächst an, daß in einem besondern Falle eine der drei Differenzen

$$Q^2 - \mathfrak{A}h^2, \quad Q^2 - \mathfrak{B}h^2, \quad Q^2 - \mathfrak{C}h^2$$

der Null gleich sey; setzen wir z. B. voraus

1) $\quad Q^2 - \mathfrak{B}h^2 = 0, \quad$ oder $\quad f = b,$

wo b ein beliebiger der drei Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids ist, und wo f die Entfernung des Mittel-Punktes S

*) Dies ist z. B. der Fall mit der Erde, deren Drehung um ihre wirkliche (Erd-) Axe sehr stabil ist; dagegen es nicht seyn würde, in Bezug auf eine Umdrehung um den dritten Haupt-Durchmesser derselben, welcher wie man weiß, bei der Erde, von dem mittlern nur unbedeutend oder gar nicht verschieden ist.

von der festen Ebene, auf welcher das Central-Ellipsoid hinrollt, vorstellt.

In diesem besonderen Falle geben die Integrale (§. 91. NNr. 11. 12.) sogleich

$$2)\quad p = r\cdot\sqrt{\left(\frac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\mathfrak{A}}\right)} \text{ und } q = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})h^2+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2}}{\sqrt{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\mathfrak{B}}}.$$

Substituirt man diese Werthe statt p und q in die dritte der Gleichungen (§. 91. Nr. 19.), so erhält man zur Bestimmung von r in t, die Gleichung

$$3)\quad \partial r_t - \frac{r\cdot\sqrt{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})h^2-(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{C}r^2}}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = 0,$$

woraus sogleich

$$4)\quad t = \int \frac{\pm\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\cdot dr}{r\cdot\sqrt{\sigma^2-\varepsilon^2 r^2}}$$

folgt, sobald man

5) $(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})h^2 = \sigma^2$ und $(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{C} = \varepsilon^2$ setzt. Wenn nun r nicht Null ist (wo dann auch $p = 0$ seyn müßte, und q konstant), so muß $\mathfrak{B}$, der Größe nach, immer zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ liegen, weil sonst p imaginär seyn würde, also muß, wenn nicht $p = r = 0$ (Null) ist, b der mittlere der drei halben Haupt-Durchmesser seyn; folglich sind dann (wenn nicht $p = r = 0$ ist) σ^2 und ε^2 immer positiv, so daß man auch σ und ε selbst positiv nehmen kann. Das Integral der Gleichung (4.) giebt daher

$$6)\quad t + const = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{\sigma}\cdot log\frac{\sigma-\sqrt{\sigma^2-\varepsilon^2 r^2}}{\varepsilon r}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun noch, wenn sie nach r aufgelöst wird,

$$7)\quad \begin{cases} \text{einmal } r = 0 \\ \text{und noch } r = \dfrac{2\eta}{C\cdot e^{\sigma' t}+C^{-1}\cdot e^{-\sigma' t}}, \end{cases}$$

wenn der Kürze wegen

$$8) \quad \frac{\sigma}{\sqrt{\mathfrak{ABC}}} = \sqrt{\left(\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})h^2}{\mathfrak{ABC}}\right)} = \sigma' \text{ und } \frac{\sigma}{\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})h^2}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{C}}\right)} = \eta$$

gesetzt wird, wo auch σ' und η positiv gedacht sind.

Zur Bestimmung der Konstante C hat man, wenn r' den Anfangs-Werth von r vorstellt,

$$9) \qquad r' = \frac{2\eta}{C + C^{-1}},$$

woraus sich C mittelst einer quadratischen Gleichung bestimmt, nämlich

$$10) \qquad C = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - r'^2}}{r'}.$$

Welcher dieser beiden Werthe statt C genommen werden muß, bleibt noch zu bestimmen.

Wird aber von diesen beiden Werthen von C der eine statt C genommen, so ist der andere allemal der Werth von $\frac{1}{C}$. — Beide Werthe von C sind positiv, wenn r' positiv, dagegen negativ, wenn r' negativ ist. — Ist also r' positiv, so ist r immerfort positiv; ist aber r' negativ, so ist r immerfort negativ.

Die zweite der Gleichungen (7.) läßt sehen, daß wenn auch r anfänglich (also r') beliebig groß gegeben seyn sollte, doch mit der Zeit dieselbe Winkel-Geschwindigkeit r immerfort kleiner wird und der Null zuletzt immer näher rückt, ohne sie je erreichen zu können. In diesem Sinne kann man sagen, daß nach unendlicher Zeit (in diesem besonderen Falle, wo $f = b$ ist) r und somit auch p (aus 2.) der Null gleich werden, daß also nach unendlicher Zeit die augenblickliche Dreh-Axe mit dem mittlern Haupt-Durchmesser b oder SY zusammenfallen, und dann die Winkel-Geschwindigkeit $\omega = \pm q$ und wegen

$$\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2 = Q^2,$$

auch

$$\omega = \pm q = \frac{Q}{\mathfrak{B}}$$

wird.

Sucht man den Werth t von t, für welchen $\partial r_t = 0$ wird und r demnach seinen größten Werth erreicht, so findet man zunächst (aus 7.)

$$\frac{1}{r} = r^{-1} = \frac{1}{2\eta}\cdot(Ce^{\sigma' t} + C^{-1}e^{-\sigma' t});$$

dann, wenn man diese Gleichung differenziirt und zugleich 0 statt ∂r_t, so wie t statt t setzt,

$$C\cdot e^{\sigma' t} - C^{-1}\cdot e^{-\sigma' t} = 0 \text{ oder } C\cdot e^{2\sigma' t} = C^{-1},$$

woraus

$$e^{2\sigma' t} = C^{-2}, \text{ also } e^{\sigma' t} = \pm C^{-1} = \pm\frac{1}{C}$$

und

$$11) \qquad t = \frac{-log(\pm C)}{\sigma'} = \frac{1}{\sigma'}\cdot log\left(\pm\frac{1}{C}\right)$$

folgt, wo die +Zeichen gelten, wenn C positiv, die (−) dagegen, wenn C negativ ist, so daß der Logarithmand allemal positiv wird.

Ist also $\pm C > 1$, demnach $\pm\frac{1}{C} < 1$, so wird t negativ, und dieser Widerspruch zeigt an, daß nun der Werth von r kein größter mehr wird, sondern ohne Aufhören immerfort abnimmt. Ist aber $\pm C < 1$, also $\pm\frac{1}{C} > 1$, so wird t positiv und r zeigt sich für diesen Werth von t wirklich als ein Maximum, so daß r anfänglich wächst und dann erst ohne Aufhören abnimmt.

Da nun, wie wir wissen, in diesem Falle, wo f = b und doch nicht r′, also auch nicht r, der Null gleich ist, der Pol der augenblicklichen Dreh-Axe die Poloide durchläuft, welche dasmal eine durch SY gehende Ellipse ist, so folgt, daß man statt $\pm C$ denjenigen der beiden Werthe (aus 10.) nehmen müsse, welcher <1 ist, wenn die Anfangslage der augenblicklichen Dreh-Axe so vorausgesetzt wird, daß die augenblickliche Dreh-Axe erst durch die Ebene X_1SZ_1 (wo r den größten Werth hat) hindurchgehen muß, ehe sie mit SY_1 oder deren Verlängerung zusammenfällt; daß aber statt $\pm C$ der andere Werth genommen werden muß, welcher dann allemal >1 ist, — so oft die Anfangs-Lage der augenblicklichen Dreh-Axe so gedacht ist, daß die Poloide

bis an SY_1 oder deren Verlängerung hin beschrieben wird, ohne daß die augenblickliche Dreh-Axe durch die Ebene X_1SZ_1 hindurch muß.

Dadurch ist aber die Konstante C erst vollkommen bestimmt.

II. Ist $r' = 0$ vorausgesetzt, so ist auch $r = 0$ immerfort; folglich auch (aus 2.) $p = 0$ immerfort, und

$$q = \pm\frac{Q}{\mathfrak{B}} = n,$$

so daß n positiv, auch negativ seyn kann. Die augenblickliche Dreh-Axe fällt nun fortwährend mit SY_1 zusammen, und die Winkel-Geschwindigkeit ω der Drehung ist immer konstant und $= \frac{Q}{\mathfrak{B}}$. Dabei kann jetzt $\mathfrak{B}$ das größte, mittelste oder kleinste der drei Haupt-Trägheits-Momente seyn, d. h. der halbe Haupt-Durchmesser b kann den größten, den mittleren oder den kleinsten der drei halben Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids vorstellen, weil der Grund, warum in (I.) $\mathfrak{B}$ gerade das mittelste der drei Haupt-Trägheits-Momente seyn mußte (in so fern nämlich sonst p imaginär wurde) jetzt wo $p = 0$ ist, nicht mehr existirt.

III. Betrachten wir jetzt einen andern besonderen Fall, wo f wiederum ganz beliebig gedacht ist, wo aber zwei der drei Haupt-Trägheits-Momente einander gleich vorausgesetzt sind, z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

In diesem Falle nennen wir die Ebene X_1SY_1 den Aequator des Central-Ellipsoids, in so fern $a = b$ ist, letzteres also ein Umdrehungs-Ellipsoid wird. Die Axe SZ_1 heißt dann auch schlechtweg die Axe der Figur. Endlich ist in demselben Falle jeder Halbmesser des Aequators eine Haupt-Dreh-Axe, so daß nun SX_1 und SY_1 zwei ganz beliebige auf einander senkrechte Halbmesser des Aequators der Figur sind.

Die drei Gleichungen der Bewegung (§. 91. Nr. 19.) werden jetzt so:

1) $\mathfrak{C}\cdot\partial r = 0$, also $r = const = r'$,

2) $\mathfrak{A}\cdot\partial q + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})r'p = 0$,

3) $\mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})r'q = 0$.

Um diese beiden letztern zu integriren, eliminire man q aus beiden (d. h. man differenziire die 3. und eliminire dann q und $\partial q'$), und man erhält:

$$4)\qquad \partial^2 p + \frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})^2 r'^2}{\mathfrak{A}^2} \cdot p = 0.$$

Diese lineäre Gleichung giebt (nach I. Th. Analys. §. 50.) integrirt, wenn man der Kürze wegen

$$5)\qquad \frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})^2 r'^2}{\mathfrak{A}^2} = n^2$$

setzt, so daß man n immer positiv und negativ zugleich nehmen kann;

$$6)\qquad p = \varepsilon \cdot \sin(nt+\zeta),$$

wo ε und ζ zwei noch unbestimmte Konstanten sind. Substituirt man diesen Werth von p in die Gleichung (3.), so findet sich q ohne neue Integration sogleich dazu, nämlich

$$7)\qquad q = \varepsilon \cdot \cos(nt+\zeta),$$

wo ε und ζ dieselben Konstanten sind, wie in (6.).

Zur Bestimmung dieser beiden Konstanten ε und ζ hat man, wenn p' und q' die Anfangs-Werthe von p und q vorstellen, (aus 6. und 7. für $t = 0$)

$$8)\qquad p' = \varepsilon \cdot \sin\zeta \qquad \text{und} \qquad 9)\qquad q' = \varepsilon \cdot \cos\zeta;$$

und daraus findet sich

$$10)\qquad \varepsilon = \sqrt{p'^2 + q'^2} \qquad \text{und} \qquad 11)\qquad tg\,\zeta = \frac{p'}{q'}.$$

Die Gleichungen (6. und 7.) geben nun

$$12)\qquad p^2 + q^2 = \varepsilon^2 = p'^2 + q'^2,$$

so daß, während p und q Funktionen von t sind, doch die Summe der Quadrate dieser beiden Winkel-Geschwindigkeiten konstant wird. Ferner folgt dann

$$13)\qquad \omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2,$$

so daß auch ω immer konstant ist. Und weil $\frac{r'}{\omega}$ der Kosinus des Winkels USZ_1 ist, welchen die augenblickliche Dreh-Axe SU mit der Axe SZ_1 der Figur macht, so folgt, daß auch dieser Winkel USZ_1 konstant ist, während die beiden andern Win-

kel USY_1 und USX_1 Funktionen von t mit periodisch wiederkehrenden Werthen sind *).

Das Integral (§. 93. Nr. 10.) giebt aber dasmal

14) $$\varphi = \frac{Q}{\mathfrak{A}} t + \varphi',$$

wenn φ' der Anfangs-Werth von φ ist. Der Weg der Knoten-Linie ist also mit der Zeit t proportional, d. h. die Knoten-Linie durchläuft ihren Weg auf der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares gleichförmig. Ferner ist auch noch

15) $$\cos\theta = \frac{\mathfrak{C}r'}{Q},$$

also ist auch die Neigung des Aequators gegen die Ebene des Anfangs-Gegen-Paares während der ganzen Dauer der Bewegung konstant. Zuletzt findet sich noch

$$tg\psi = \frac{p}{q} = tg(nt + \zeta),$$

folglich

16) $$\psi = nt + \zeta,$$

so daß ζ der Anfangs-Werth von ψ ist.

Ist endlich in diesem besondern Falle, wo man $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ hat, zu gleicher Zeit

$$\frac{\mathfrak{C}r'}{Q} = \pm 1, \text{ also } \cos\theta = \pm 1,$$

so fällt der Aequator fortwährend mit der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares zusammen; die Formel, welche φ geben soll, bekommt die Null im Nenner, und dies zeigt an, daß sie dasmal zur Bestimmung von φ nicht dient; und in der That existirt dasmal keine Knoten-Linie. Der Körper dreht sich nun fort-

---

*) Daß die Winkel-Geschwindigkeit ω und der Winkel USZ_1 konstant sind, folgt auch unmittelbar aus dem Umstande, daß die augenblickliche Dreh-Axe die Poloide durchläuft und daß die Winkel-Geschwindigkeit ω mit dem jedesmaligen Durchmesser des Central-Ellipsoids proportional ist. Die Poloide ist nämlich dasmal, wo $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, also auch a = b ist, augenfällig eine Kreislinie um SZ_1 herum, und alle Halbmesser, welche durch diese Poloide gehen, sind eben so augenfällig einander gleich. (Vgl. §. 90. Nr. 7.)

während mit der konstanten Winkel-Geschwindigkeit $\frac{Q}{\mathfrak{C}}$ um die Axe SZ_1 der Figur. — Dieser Fall tritt aber nur dann ein, wenn das Anfangs-Gegen-Paar senkrecht auf die Axe SZ_1 der Figur gewirkt hat.

Anmerk. Man muß bei allen diesen speziellen Untersuchungen, wie bei den allgemeinen nicht übersehen:

1) daß die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeiten p', q', r' (nach §. 86.) aus dem Anfangs-Gegen-Paare Q, wenn solches seinem Momente, seiner Ebene und seiner Richtung nach gegen den Körper und namentlich gegen die drei Haupt-Dreh-Axen desselben bestimmt und gegeben ist, augenblicklich ihre Bestimmung finden;

2) daß jedoch auch die Anfangs-Werthe ψ', θ' von ψ und θ, mit den Anfangs-Werthen p', q', r' mittelst der Gleichungen (§. 93. NNr. 2.—4.) zusammenhängen, nämlich mittelst der Gleichungen

$$\sin\psi' \cdot \sin\theta' = \frac{\mathfrak{A}p'}{Q}; \quad \cos\psi' \cdot \sin\theta' = \frac{\mathfrak{B}q'}{Q} \text{ und } \cos\theta' = \frac{\mathfrak{C}r'}{Q};$$

so daß p', q' und r' aus Q, ψ' und θ' sogleich sich finden lassen;

3) daß der Anfangs-Werth φ' von φ allemal bloß von der willkührlichen Annahme der Axe SX in der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares (gegen die Anfangs-Knoten-Linie) abhängt; endlich

4) daß vermöge derselben Gleichungen (§. 93. NNr. 2.—4.) für jede Zeit t gedacht, nämlich vermöge der Gleichungen

$$\sin\psi \cdot \sin\theta = \frac{\mathfrak{A}p}{Q}; \quad \cos\psi \cdot \sin\theta = \frac{\mathfrak{B}q}{Q} \quad \text{und} \quad \cos\theta = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}$$

die Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r und daher auch ω zu jeder Zeit t bekannt sind, so oft man zu derselben Zeit t die Neigung θ und den Winkel ψ kennt, welchen die Knoten-Linie mit der Haupt-Dreh-Axe SX_1 macht. — Umgekehrt läßt sich aus denselben Gleichungen ψ und θ (aber nicht φ) finden, wenn zu Ende irgend einer Zeit t die Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r bereits bekannt sind.

5) So wie endlich die Richtung des stoßenden Gegen-Paares Q in die entgegengesetzte übergeht, so ändern p, q und r alle drei zugleich ihre Vorzeichen, d. h. letztere werden negativ, wenn sie positiv gewesen sind, oder sie werden positiv, wenn sie negativ gewesen sind.

§. 97.

Beschäftigen wir uns noch damit, unter der Voraussetzung, daß die drei Haupt-Trägheits-Momente beliebig von einander verschieden sind, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen p und q fortwährend sehr klein bleiben, und wenn sie gefunden sind, das Problem der Umdrehung unter dieser Voraussetzung näherungsweise, zu lösen.

Weil aber die Gleichungen (§. 91. Nr. 19.), nämlich

$$1) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})qr = 0 \\ \mathfrak{B}\cdot\partial q + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})rp = 0 \\ \mathfrak{C}\cdot\partial r + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})pq = 0, \end{cases}$$

in Verbindung mit den Gleichungen (§. 93. NNr. 4.—6.) nämlich

$$2)\ \cos\theta = \frac{\mathfrak{C}r}{Q};\ 3)\ tg\,\psi = \frac{\mathfrak{A}p}{\mathfrak{B}q}\ \text{u.}\ 4)\ r = \cos\theta\cdot\partial\varphi - \partial\psi$$

das ganze Problem lösen, so darf man nur zusehen, was diese Gleichungen liefern, wenn man p und q fortwährend so klein voraussetzt, daß p^2, q^2 und pq gegen Glieder der ersten Dimension, also auch gegen ∂p, ∂q, ∂r verschwinden. — Die dritte der Gleichungen (1.) giebt aber sogleich (unter dieser Voraussetzung)

$$5) \qquad \partial r = 0, \quad \text{also} \quad r = r',$$

wo r' die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ist, so daß sogleich r', also r, völlig bestimmt ist, so oft man den Anfangs-Werth θ' von θ, d. h. von ZSZ_1 kennt.

Die beiden andern der Gleichungen (1.) werden ferner, wenn man den konstanten Werth r' statt r setzt; jetzt:

$$6) \qquad \mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})r'q = 0;$$

$$7) \qquad \mathfrak{B}\cdot\partial q + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})r'p = 0.$$

Dif-

Differenzirt man nun die erstere dieser Gleichungen und eliminirt man dann q und ∂q, so erhält man

8) $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\partial^2 p + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})r'^2 p = 0.$

Setzt man aber, der Bequemlichkeit wegen,

9) $\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = m^2 = -m'^2,$

so wird die vorstehende lineare Differenzial-Gleichung so geschrieben werden können, nämlich

10) $\partial^2 p + m^2 r'^2 \cdot p = 0$, oder $\partial^2 p - m'^2 r'^2 p = 0.$

Diese Gleichung kann nun sogleich (nach I. Th. Analys. §. 50.) integrirt werden. Man erhält ein Integral mit zwei noch zu bestimmenden Konstanten. Setzt man dann diesen Werth von p, oder vielmehr den daraus hergeleiteten Werth von ∂p, in die Gleichung (6.), so giebt solche sogleich q ohne neue Integration (also mit denselben beiden Konstanten) noch dazu. — Man muß aber dabei, um nicht imaginäre Formen zu bekommen, zwei Fälle unterscheiden, nämlich einmal, wenn m^2 negativ, also m'^2 positiv, folglich m imaginär, dagegen m' reell — und dann, wenn m^2 positiv, also m'^2 negativ, mithin m reell und m' imaginär ist. Der erstere Fall tritt allemal ein, wenn $\mathfrak{C}$ das mittlere der drei Haupt-Trägheits-Momente ist; der andere Fall dagegen findet allemal statt, so oft $\mathfrak{C}$ das größte oder das kleinste derselben drei Haupt-Trägheits-Momente vorstellt.

I. Es sey zuerst $\mathfrak{C}$ das mittelste der drei Haupt-Trägheits-Momente, folglich m' reell (und m imaginär). Das Integral der Gleichung (10.), nämlich der Gleichung

$$\partial^2 p - m'^2 r'^2 \cdot p = 0,$$

wird jetzt

11) $p = \varepsilon \cdot e^{m'r't} + \zeta \cdot e^{-m'r't}.$

Dieß giebt

$$\partial p = \varepsilon m'r' \cdot e^{m'r't} - \zeta m'r' \cdot e^{-m'r't};$$

und substituirt man solchen Werth von ∂p, in die Gleichung (6.), so erhält man

12) $q = \frac{\mathfrak{A}m'}{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}} \cdot \left(\varepsilon \cdot e^{m'r't} - \zeta \cdot e^{-m'r't}\right).$

Um die Konstanten ε und ζ zu bestimmen, setze man in (11. und 12.) $t = 0$ und p' statt p, so wie q' statt q, und man erhält

$$13)\quad p' = \varepsilon + \zeta; \qquad 14)\quad \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}m'}q' = \varepsilon - \zeta,$$

woraus

$$15)\quad 2\varepsilon = p' + \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}m'}q' \text{ und } 16)\ 2\zeta = p' - \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}m'}q',$$

wo $m' = \sqrt{\left(\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\right)}$, also $\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}m'} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}\right)}$ ist.

Die Werthe von p und q (aus 11. u. 12.) werden also mit der Zeit t immer größer und größer; folglich stehen sie mit der Voraussetzung im Widerspruch (so oft t nur einigermaßen groß ist), welche zu diesen Gleichungen geführt hat; *einen einzigen Fall ausgenommen, nämlich* wenn $\varepsilon = 0$ *seyn sollte*, d. h. (nach 15.) wenn

$$17)\qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})p'^2 + \mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})q'^2 = 0$$

seyn sollte. Aus dieser Gleichung (17.) folgt aber (vermöge der Gleichungen §. 91. NNr. 11. 12., welche auch noch gelten, wenn p', q', r' statt p, q, r gesetzt werden):

$$18)\qquad Q^2 - \mathfrak{C}h^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad f = c.$$

Dieser Ausnahmsfall ist also offenbar derjenige der beiden Fälle des (§. 96. I.), in welchem p und q immerfort kleiner werden, während die augenblickliche Dreh-Axe zu Anfange in derjenigen Poloide sich befindet, welche eine Ellipse ist, und welche als solche für $f = c$ hervorgeht (unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{C}$ das mittlere der Trägheits-Momente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — daß also c der mittlere der drei halben Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids ist)*).

Diesen Ausnahms-Fall abgerechnet, können also nicht p und q fortwährend sehr klein bleiben, wenn $\mathfrak{C}$ das mittlere der drei

*) Man wird nicht übersehen, daß hier SZ_1 und $\mathfrak{C}$ und c stehen, wo dort (im §. 96. I.) SY_1 und $\mathfrak{B}$ und b zu finden sind. Man wird also dort $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{B}$, desgleichen c mit b, und noch SZ_1 mit SY_1, so wie r mit q vertauschen müssen, wenn man jene Resultate mit den hiesigen vergleichen will.

Haupt-Trägheits-Momente ist, d. h. die augenblickliche Dreh-Axe kann (mit Ausnahme dieses einzigen Falles) nicht fortwährend in der Nähe des **mittlern** der drei Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids verweilen, wenn sie auch anfänglich in dessen Nähe sich befindet*).

II. Ist aber $\mathfrak{C}$ nicht das mittlere der drei Trägheits-Momente, so ist m reell, und das Integral der Gleichung (10.) kann nun so geschrieben werden, nämlich

$$11') \qquad p = \varepsilon \cdot \cos(mr't + \zeta).$$

Dieß liefert

$$\partial p = -\varepsilon m r' \cdot \sin(mr't + \zeta),$$

so daß die Gleichung (6.) sogleich

$$12') \qquad q = \frac{\mathfrak{A}m}{\mathfrak{B}-\mathfrak{C}}\, \varepsilon \cdot \sin(mr't + \zeta)$$

dazu giebt.

Weil aber

$$\frac{\mathfrak{A}m}{\mathfrak{B}-\mathfrak{C}} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}\right)} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}}{\sqrt{\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}}$$

ist, so kann man den Ausdrücken für p und q eine mehr symmetrische Form geben, wenn man statt ε, welches noch bestimmt werden muß, durchgehends $\varepsilon \cdot \sqrt{\pm \mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}$ schreibt, wo das (+) Zeichen gilt, wenn $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}$, wo aber das (—) Zeichen genommen werden muß, im Falle $\mathfrak{C} < \mathfrak{B}$ seyn sollte. Die Gleichungen (11'. und 12'.) nehmen dann die Form an

$$13') \qquad p = \varepsilon \cdot \sqrt{\pm \mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})} \cdot \cos(mr't + \zeta)$$

und

$$14') \qquad q = \varepsilon \cdot \sqrt{\pm \mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})} \cdot \sin(mr't + \zeta).$$

Zur Bestimmung der Konstanten hat man hieraus, für $t = 0$,

$$15') \qquad p' = \varepsilon \cdot \sqrt{\pm \mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})} \cdot \cos \zeta,$$

$$16') \qquad q' = \varepsilon \cdot \sqrt{\pm \mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})} \cdot \sin \zeta;$$

aus welchen

---

*) Auch hieraus könnte die Nicht-Stabilität der Drehung um den mittlern Haupt-Durchmesser gefolgert werden. (Vgl. §. 95. II.)

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\pm \frac{p^2\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})+q^2\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}\right)} \text{ und } tg\,\zeta = \frac{q'}{p'}\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}\right)}$$

hervorgeht, wo alle Wurzeln reell gedacht sind. Dadurch gehen aber die Gleichungen (13'. und 14'.) über in

$$17') \quad p = \sqrt{\left(\frac{p^2\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})+q^2\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}\right)} \times cos(mr't+\zeta)$$

und

$$18') \quad q = \sqrt{\left(\frac{p^2\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})+q^2\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}\right)} \times sin(mr't+\zeta).$$

Diese Werthe von p und q bleiben immer sehr klein, so lange keine der beiden Differenzen $\mathfrak{C}-\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}-\mathfrak{A}$, als absolute Zahl gedacht, sehr klein ist, d. h. so lange nicht $\mathfrak{C}-\mathfrak{B}$ sehr klein ist, wenn $\mathfrak{B}$ das mittlere der drei Trägheits-Momente vorstellt. Es wird also die augenblickliche Dreh-Axe fortwährend sehr nahe bei dem Haupt-Durchmesser 2c verweilen (es mag solcher der größte oder der kleinste seyn), so lange solcher nicht allzuwenig von dem mittlern Haupt-Durchmesser 2b verschieden ist*).

III. Bestimmen wir nun unter der Voraussetzung (der II. und) daß p und q immer sehr klein bleiben, die Winkel φ, ψ, θ noch dazu, welche die Lage des Körpers geben zu jeder Zeit t. Zu dem Ende nimmt man die Gleichungen (des §. 93. nämlich:)

$$1) \quad sin\,\psi \cdot sin\,\theta = \frac{\mathfrak{A}p}{Q}, \qquad 2) \quad cos\,\psi \cdot sin\,\theta = \frac{\mathfrak{B}q}{Q}$$

und

$$3) \quad cos\,\theta = \frac{\mathfrak{C}r'}{Q}.$$

Da nun

$$4) \qquad \mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r'^2 = Q^2$$

ist (nach §. 91. Nr. 12.), so ist weil p^2 und q^2 sehr klein, von der 2ten Dimension sind, sehr nahe $\mathfrak{C}^2r'^2 = Q^2$, also $cos\,\theta$ sehr

*) Hieraus folgt wieder die Stabilität der Drehung um den größten oder um den kleinsten Haupt-Durchmesser des Central-Ellipsoids, wie solche (im §. 95.) ausgesprochen worden ist, mit derselben dort bemerkten Ausnahme. — In den dem Vfr. bekannten Lehrbüchern sind diese Ausnahmen unerwähnt geblieben.

nahe $= \pm 1$, d. h. der Winkel θ oder ZOZ_1 muß fortwährend sehr klein seyn, also auch zu Anfange schon sehr klein gewesen seyn. Ist also dieser Winkel θ zu Anfange bekannt, so ist er während der ganzen Drehung des Körpers fortwährend bekannt, weil er (unter unserer Voraussetzung) fortwährend derselbe sehr kleine Winkel bleibt. — Setzt man in die Gleichungen (1. und 2.) statt p und q ihre Werthe (aus 17′ u. 18′.) und dann noch $t = 0$, so geben diese Gleichungen, wenn p' und q' bekannt seyn sollten, die Anfangs-Werthe ψ' und θ' von ψ und θ dazu, oder, wenn diese Anfangs-Werthe ψ' und θ' gegeben seyn sollten, die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeiten p' und q' dazu. — Die Gleichung (4.), da sie sich (bei Vernachlässigung der kleinen Glieder der zweiten Dimension) auf $\mathfrak{C}^2 r'^2 = Q^2$ reducirt, giebt $r' = \pm\frac{Q}{\mathfrak{C}}$, so daß auch r' bekannt ist. — Die Gleichung

$$5)\qquad tg\psi = \frac{\mathfrak{A}p}{\mathfrak{B}q} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}\right)} \times cotg(mr't+\zeta)$$

giebt den Winkel ψ zu jeder Zeit t; und die Gleichung (§. 93. Nr. 6.) nämlich

$$r' = cos\,\theta\cdot\partial\varphi - \partial\psi$$

giebt zuletzt, weil $cos\,\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \ldots$ ist, wenn man sie integrirt, und θ^2 außer Acht läßt,

$$r't = \varphi - \psi + const, \qquad \text{oder}$$

$$6)\qquad \varphi = r't + \psi + const\,^{*}).$$

Anmerk. Wir machen übrigens am Schlusse dieser Abtheilung noch einmal darauf aufmerksam

1) daß wir hier absichtlich nur den Fall der Umdrehung eines Körpers um einen Punkt S betrachtet haben, in welchem keine beschleunigenden Kräfte hinzutreten; und

---

*) Die Gleichungen (§. 93. NNr. 10. oder 11.), welche eigentlich φ liefern müssen, können hier deshalb nicht benutzt werden, weil sie in diesem Falle Null im Nenner haben. Darum mußte hier φ aus den dazu bestimmten Gleichungen direkt gefunden werden.

2) daß in diesem Falle, wenn der Punkt S der Schwer-Punkt ist, solcher nicht fest zu seyn braucht, während er doch in Ruhe bleibt und der Körper sich um ihn herumdreht, wie wenn er fest wäre; vorausgesetzt nämlich, daß Anfangs ein Gegen-Paar von Kräften gewirkt hat, dessen Moment $= Q$ gedacht wird.

Die jetzt folgende zweite Abtheilung dieses Kapitels mag nun die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt noch einmal betrachten, aber aus dem allgemeinern Stand-Punkte, auf welchen das d'Alembertsche Princip uns versetzt, und wobei die (immer nur fingirten) Centrifugal-Kräfte nicht besonders in Rechnung gebracht werden dürfen, während auch stetig wirkende (beschleunigende Kräfte) noch hinzutreten können.

Zweite Abtheilung.

Allgemeine Behandlung der Drehung eines festen Körpers um einen unbeweglichen Punkt.

Vorerinnerung.

Ohne auf die vorstehenden, mehr synthetischen Betrachtungen Rücksicht zu nehmen, erledigt sich das Problem dieser Drehung augenblicklich, wenn man zu Ende irgend einer Zeit t alle verlorenen Kräfte aufsucht (d. h. die in diesem Augenblicke vielleicht neu hinzutretenden beschleunigenden, und die in den einzelnen Massen-Elementen hervorgebrachten Aenderungen der „Größen der Bewegung", letztere in entgegengesetzter Richtung genommen) und diese verlorenen Kräfte, nach dem d'Alembertschen Principe, in's Gleichgewicht stellt. — Für das Gleichgewicht um einen festen Punkt bekommt man drei Gleichungen (nämlich die Summe der statischen Momente aller verlorenen Kräfte, in Bezug auf jede von drei durch den festen Punkt S gehende Momenten-Axen, der Null gleich); und diese drei Gleichungen sind daher die Gleichungen der Bewegung, welche alle Umstände dieser Drehung aussprechen, und welche man nur noch auf analytischem Wege behandeln (namentlich integriren) muß, um Alle Einzelnheiten der Bewegung hervorheben zu können. — Damit aber diese Rechnungen bequemer werden, schicken wir eine Anzahl Formeln voraus.

§. 98.

Allgemeine Formeln ohne Rücksicht auf die wirkenden Kräfte.

I. Um das Problem der Drehung eines Körpers um einen festen oder unbeweglichen Punkt S vollständig analytisch zu lösen, beginne man damit, daß man durch den unbeweglichen Punkt S zwei Systeme rechtwinklicher Koordinaten-Axen legt, von denen das eine SX, SY, SZ im absoluten Raume fest, das andere SX_1, SY_1, SZ_1 dagegen im Körper fest und mit dem Körper zugleich beweglich ist, so daß die 9 Winkel

X_1SX, Y_1SX, Z_1SX; X_1SY, Y_1SY, Z_1SY; X_1SZ, Y_1SZ, Z_1SZ,

deren Kosinusse wir in Rechnung bringen und bezüglich durch

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha''; \qquad \beta,\ \beta',\ \beta''; \qquad \gamma,\ \gamma',\ \gamma''$$

bezeichnen wollen, im Allgemeinen Funktionen der Zeit t seyn werden. Weil jedoch jedes dieser beiden Systeme von Koordinaten-Axen rechtwinklich ist und bleibt, so hat man sogleich noch Gleichungen zwischen diesen Kosinussen, namentlich:

$$1)\ \begin{cases} \alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta' + \gamma\cdot\gamma' = 0, \\ \alpha\cdot\alpha'' + \beta\cdot\beta'' + \gamma\cdot\gamma'' = 0, \\ \alpha'\cdot\alpha'' + \beta'\cdot\beta'' + \gamma'\cdot\gamma'' = 0, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \end{cases}$$

und ihre Differenzial-Gleichungen, d. h.

$$3)\ \begin{cases} (\alpha\cdot\partial\alpha' + \beta\cdot\partial\beta' + \gamma\cdot\partial\gamma') + (\alpha'\cdot\partial\alpha + \beta'\cdot\partial\beta + \gamma'\cdot\partial\gamma) = 0, \\ (\alpha\cdot\partial\alpha'' + \beta\cdot\partial\beta'' + \gamma\cdot\partial\gamma'') + (\alpha''\cdot\partial\alpha + \beta''\cdot\partial\beta + \gamma''\cdot\partial\gamma) = 0, \\ (\alpha'\cdot\partial\alpha'' + \beta'\cdot\partial\beta'' + \gamma'\cdot\partial\gamma'') + (\alpha''\cdot\partial\alpha' + \beta''\cdot\partial\beta' + \gamma''\cdot\partial\gamma') = 0, \end{cases}$$

und

$$4)\ \begin{cases} \alpha\cdot\partial\alpha + \beta\cdot\partial\beta + \gamma\cdot\partial\gamma = 0;\ \alpha'\cdot\partial\alpha' + \beta'\cdot\partial\beta' + \gamma'\cdot\partial\gamma' = 0; \\ \alpha''\cdot\partial\alpha'' + \beta''\cdot\partial\beta'' + \gamma''\cdot\partial\gamma'' = 0\ *), \end{cases}$$

wo sich alle Differenzial-Koefficienten auf die Zeit t beziehen.

---

*) Es ist auch noch

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,$$
$$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0,$$
$$\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,$$

und

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

welche auch noch analoge Differenzial-Gleichungen liefern.

II. Betrachtet man nun zu Ende irgend einer Zeit t ein Element dM des Körpers, und bezeichnet man seine, auf SX, SY, SZ bezogenen Koordinaten-Werthe durch x, y, z, während x_1, y_1, z_1 die Koordinaten-Werthe desselben Elementes dM auf die im Körper festen Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 bezogen vorstellen, — so sind x_1, y_1, z_1 (nach t) konstant, dagegen x, y, z (nach I. Th. Geom. pag. 161.) nachstehende Funktionen der Zeit t, nämlich:

$$5)\quad \begin{cases} x = \alpha\cdot x_1 + \alpha'\cdot y_1 + \alpha''\cdot z_1, \\ y = \beta\cdot x_1 + \beta'\cdot y_1 + \beta''\cdot z_1, \\ z = \gamma\cdot x_1 + \gamma'\cdot y_1 + \gamma''\cdot z_1; \end{cases}$$

so daß, wenn man nach allem t differenziirt,

$$6)\quad \begin{cases} \partial x = x_1\cdot\partial\alpha + y_1\cdot\partial\alpha' + z_1\cdot\partial\alpha'', \\ \partial y = x_1\cdot\partial\beta + y_1\cdot\partial\beta' + z_1\cdot\partial\beta'', \\ \partial z = x_1\cdot\partial\gamma + y_1\cdot\partial\gamma' + z_1\cdot\partial\gamma'' \end{cases}$$

wird; immer unter der Voraussetzung, daß sich alle ∂ auf die Zeit t beziehen.

III. Das Element dM hat zu Ende irgend einer Zeit t eine bestimmte augenblickliche Dreh-Axe SU, so daß im Allgemeinen die Winkel

USX_1, USY_1, USZ_1 und USX, USY, USZ

alle sechse, Funktionen der Zeit t seyn werden, von welchen die drei erstern die Lage der augenblicklichen Dreh-Axe im Körper, die drei andern die augenblickliche Lage derselben im absoluten Raume angeben. Stellt nun ω_t oder ω die Winkel-Geschwindigkeit der augenblicklichen Drehung um SU vor, und sind p_t, q_t, r_t, oder p, q, r die Winkel-Geschwindigkeiten der drei gleichzeitigen Drehungen um SX_1, SY_1, SZ_1, in welche die erstere (nach §. 66.) sich zerlegen läßt, so hat man

$$7)\quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

und

$$8)\quad \cos USX_1 = \frac{p}{\omega};\quad \cos USY_1 = \frac{q}{\omega};\quad \cos USZ_1 = \frac{r}{\omega}.$$

Weil aber (nach I. Th. Geom. §. 1. VII. 7.)

$$\cos USX = \cos USX_1 \cdot \cos XSX_1 + \cos USY_1 \cdot \cos XSY_1 + \cos USZ_1 \cdot \cos XSZ_1$$

ist, — und analoge Gleichungen für $\cos USY$ und $\cos USZ$ statt finden, — so folgt hieraus sogleich noch

$$9) \quad \begin{cases} \cos USX = \dfrac{p\alpha + q\alpha' + r\alpha''}{\omega}, \\ \cos USY = \dfrac{p\beta + q\beta' + r\beta''}{\omega}, \\ \cos USZ = \dfrac{p\gamma + q\gamma' + r\gamma''}{\omega}; \end{cases}$$

so daß die Zähler zur Rechten die Winkel-Geschwindigkeiten der drei gleichzeitigen Drehungen um SX, SY, SZ sind, in welche sich die augenblickliche Drehung um SU ebenfalls zerlegt (nach §. 66.).

IV. Man kann die Lage der augenblicklichen Dreh-Axe auch dadurch finden, daß man die Punkte x_1, y_1, z_1 im Körper sucht, welche augenblicklich die Geschwindigkeit Null haben. Zu dem Ende muß man die Seiten-Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z derselben, einzeln der Null gleich setzen. Dies giebt (nach 6.) die nachstehenden Gleichungen der augenblicklichen Dreh-Axe, nämlich:

$$10) \quad \begin{cases} x_1 \cdot \partial\alpha + y_1 \cdot \partial\alpha' + z_1 \cdot \partial\alpha'' = 0, \\ x_1 \cdot \partial\beta + y_1 \cdot \partial\beta' + z_1 \cdot \partial\beta'' = 0, \\ x_1 \cdot \partial\gamma + y_1 \cdot \partial\gamma' + z_1 \cdot \partial\gamma'' = 0, \end{cases}$$

wo x_1, y_1, z_1 bloß die Koordinaten-Werthe aller Punkte der augenblicklichen Dreh-Axe vorstellen. — Diese 3 Gleichungen sind nicht von einander unabhängig, sondern es muß aus je zweien derselben, die dritte durch bloße Umformung erhalten werden können. Dies bestätigt sich auch. Eliminirt man nämlich aus ihnen nach und nach x_1, y_1, z_1 (dadurch daß man dieselben bezüglich mit α, β, γ multiplicirt und addirt, dabei aber die Formeln 4. anwendet; dann dieselben mit α', β', γ' multiplicirt und addirt; zuletzt aber dieselben mit α'', β'', γ'' multiplizirt und addirt) so erhält man

$$11) \quad \begin{cases} (\alpha \cdot \partial\alpha' + \beta \cdot \partial\beta' + \gamma \cdot \partial\gamma') \cdot y_1 + (\alpha \cdot \partial\alpha'' + \beta \cdot \partial\beta'' + \gamma \cdot \partial\gamma'') \cdot z_1 = 0, \\ (\alpha' \cdot \partial\alpha + \beta' \cdot \partial\beta + \gamma' \cdot \partial\gamma) \cdot x_1 + (\alpha' \cdot \partial\alpha'' + \beta' \cdot \partial\beta'' + \gamma' \cdot \partial\gamma'') \cdot z_1 = 0, \\ (\alpha'' \cdot \partial\alpha + \beta'' \cdot \partial\beta + \gamma'' \cdot \partial\gamma) \cdot x_1 + (\alpha'' \cdot \partial\alpha' + \beta'' \cdot \partial\beta' + \gamma'' \cdot \partial\gamma') \cdot y_1 = 0. \end{cases}$$

In diesen letztern drei Gleichungen, sind immer (nach den Formeln 3.) je zweie der Koefficienten einander gleich und entge-

gengesetzt. Setzt man daher, um diesen Gleichungen (welche die der Projektionen der augenblicklichen Dreh-Axe auf die drei im Körper festen Koordinaten-Ebenen Y_1SZ_1, X_1SZ_1, X_1SY_1 sind) eine symmetrische Form zu geben

$$12)\begin{cases} -(\alpha''\cdot\partial\alpha'+\beta''\cdot\partial\beta'+\gamma''\cdot\partial\gamma')=\alpha'\cdot\partial\alpha''+\beta'\cdot\partial\beta''+\gamma'\cdot\partial\gamma''=A,\\ -(\alpha\cdot\partial\alpha''+\beta\cdot\partial\beta''+\gamma\cdot\partial\gamma'')=\alpha''\cdot\partial\alpha+\beta''\cdot\partial\beta+\gamma''\cdot\partial\gamma=B,\\ -(\alpha'\cdot\partial\alpha+\beta'\cdot\partial\beta+\gamma'\cdot\partial\gamma)=\alpha\cdot\partial\alpha'+\beta\cdot\partial\beta'+\gamma\cdot\partial\gamma'=C; \end{cases}$$

so werden dieselben drei Gleichungen (11.) jetzt diese Form annehmen:

$$13)\quad C\cdot y_1-B\cdot z_1=0;\ A\cdot z_1-C\cdot x_1=0;\ B\cdot x_1-A\cdot y_1=0.$$

Nun übersieht man leicht, daß wenn die erstere mit A, die zweite mit B, die dritte mit C multiplicirt wird, und wenn dann alle drei Resultate addirt werden, daß dann genau 0 = 0 sich ergiebt. Also läßt sich leicht jede dieser 3 Gleichungen aus den übrigen beiden algebraisch ableiten.

Nimmt man von diesen Gleichungen nur die beiden letztern, während x_1, y_1, z_1 noch immer bloß den Punkten der augenblicklichen Dreh-Axe angehören, so findet man

$$z_1=\frac{C}{A}\cdot x_1 \quad \text{und} \quad y_1=\frac{B}{A}\cdot x_1;$$

daher findet sich jetzt sogleich wieder

$$14)\begin{cases} \cos USX_1=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos USY_1=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos USZ_1=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{cases}$$

V. Vergleicht man nun die Resultate (8. und 14.) mit einander, so findet man sogleich, daß die Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r, mit den Ausdrücken A, B, C (aus 12.) proportional sind. — Will man aber die Winkel-Geschwindigkeit ω selbst finden, in A, B, C ausgedrückt, so thut man am besten, irgend einen Punkt im Körper zu nehmen, für ihn die Seiten-Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z, und seine Entfernung von

der augenblicklichen Dreh-Axe zu berechnen, und die wahre Geschwindigkeit, nämlich $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ durch diese Entfernung zu dividiren, weil dieser Quotient die Winkel-Geschwindigkeit seyn muß.

Betrachten wir daher, um die Rechnungen zu erleichtern, einen Punkt in SZ_1, und zwar den, für welchen

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 1\ ^{*)}$$

ist, so findet sich (nach 6.) für diesen Punkt

$$\partial x = \partial \alpha''; \quad \partial y = \partial \beta''; \quad \partial z = \partial \gamma'';$$

folglich ist die wahre Geschwindigkeit dieses Punktes

$$= \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} = \sqrt{\partial \alpha''^2 + \partial \beta''^2 + \partial \gamma''^2}.$$

Die Entfernung dieses Punktes von der augenblicklichen Dreh-Axe ist nichts anders als $\sin USZ_1$, und dieser findet sich (aus 14.)

$$= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Deshalb findet sich nun, wenn man dividirt, die Winkel-Geschwindigkeit ω, nämlich

$$\omega = \frac{\sqrt{\partial \alpha''^2 + \partial \beta''^2 + \partial \gamma''^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Wenn man aber statt A und B ihre Werthe setzt (aus 12.), nämlich:

$$\alpha' \cdot \partial \alpha'' + \beta' \cdot \partial \beta'' + \gamma' \cdot \partial \gamma'' \text{ statt } A$$

und

$$-(\alpha \cdot \partial \alpha'' + \beta \cdot \partial \beta'' + \gamma \cdot \partial \gamma'') \text{ statt } B,$$

und wenn man $1 - \alpha''^2$ statt $\alpha^2 + \alpha'^2$, ferner $-\alpha''\beta''$ statt $\alpha\beta + \alpha'\beta'$ schreibt, u. s. w., so findet sich

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (1 - \alpha''^2) \cdot \partial \alpha''^2 + (1 - \beta''^2) \cdot \partial \beta''^2 \\ &\quad + (1 - \gamma''^2) \cdot \partial \gamma''^2 - 2\alpha''\beta'' \cdot \partial \alpha'' \cdot \partial \beta'' \\ &\quad - 2\alpha''\gamma'' \cdot \partial \alpha'' \cdot \partial \gamma'' - 2\beta''\gamma'' \cdot \partial \beta'' \cdot \partial \gamma'' \\ &= \partial \alpha''^2 + \partial \beta''^2 + \partial \gamma''^2 - (\alpha'' \cdot \partial \alpha'' + \beta'' \cdot \partial \beta'' + \gamma'' \cdot \partial \gamma'')^2, \\ &= \partial \alpha''^2 + \partial \beta''^2 + \partial \gamma''^2 \text{ (wegen 4.)}. \end{aligned}$$

---

*) Man übersehe nicht, daß jetzt wieder x_1, y_1 und z_1 allen Punkten im Körper angehören, und daß nur in den Gleichungen der augenblicklichen Dreh-Axe in (IV.) die x_1, y_1, z_1 bloß den Punkten dieser letztern angehören sollten.

Daher geht obige Gleichung für ω über in

15) $$\omega = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

und deshalb folgt auch noch (aus der Vergleichung von 8. u. 14.)

16) $$p = A, \qquad q = B, \qquad r = C.$$

VI. Will man die wahre Geschwindigkeit $v = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ des durch x, y, z oder x_1, y_1, z_1 gegebenen, übrigens beliebigen Elementes dM, nach den drei im Körper festen Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zerlegen, so darf man nur die drei Seiten-Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z nach denselben drei Axen zerlegen und addiren. Nennt man diese drei gesuchten Seiten-Geschwindigkeiten parallel mit SX_1, SY_1, SZ_1, bezüglich v_1, v_2, v_3, so findet sich für sie augenblicklich

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha \cdot \partial x + \beta \cdot \partial y + \gamma \cdot \partial z, \\ v_2 &= \alpha' \cdot \partial x + \beta' \cdot \partial y + \gamma' \cdot \partial z, \\ v_3 &= \alpha'' \cdot \partial x + \beta'' \cdot \partial y + \gamma'' \cdot \partial z. \end{aligned}$$

Substituirt man aber hier herein statt ∂x, ∂y, ∂z die Werthe (aus 6.), und reducirt man wie gewöhnlich, so findet sich hieraus

17) $$\begin{cases} v_1 = C \cdot y_1 - B \cdot z_1 = r y_1 - q z_1; \\ v_2 = A \cdot z_1 - C x_1 = p z_1 - r x_1; \\ v_3 = B \cdot z_1 - A \cdot y_1 = q x_1 - p y_1 \text{ *)}. \end{cases}$$

Und sucht man jetzt noch einmal die Punkte, für welche diese Geschwindigkeiten Null sind, so bekommt man die Gleichungen (13.) für die augenblickliche Dreh-Axe wieder.

VII. Will man $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ finden in x_1, y_1, z_1 ausgedrückt, so stehen dazu mehrere Wege offen. Man kann namentlich aus den so eben gefundenen Seiten-Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 wiederum die Seiten-Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z ableiten, indem man hat

---

*) Dies sind dieselben Resultate, wie wir sie bereits (im §. 92. IV.) gefunden haben.

$$\partial x = \alpha \cdot v_1 + \alpha' \cdot v_2 + \alpha'' \cdot v_3,$$
$$\partial y = \beta \cdot v_1 + \beta' \cdot v_2 + \beta'' \cdot v_3,$$
$$\partial z = \gamma \cdot v_1 + \gamma' \cdot v_2 + \gamma'' \cdot v_3,$$

oder

$$18) \begin{cases} \partial x = \alpha \cdot (ry_1 - qz_1) + \alpha' \cdot (pz_1 - rx_1) + \alpha'' \cdot (qx_1 - py_1), \\ \partial y = \beta \cdot (ry_1 - qz_1) + \beta' \cdot (pz_1 - rx_1) + \beta'' \cdot (qx_1 - py_1), \\ \partial z = \gamma \cdot (ry_1 - qz_1) + \gamma' \cdot (pz_1 - rx_1) + \gamma'' \cdot (qx_1 - py_1). \end{cases}$$

Differenziirt man nun hier nach allem t, so erhält man sogleich $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, in x_1, y_1, z_1 ausgedrückt, nämlich

$$19) \begin{cases} \partial^2 x = \alpha \cdot (y_1 \partial r - z_1 \partial q) + \alpha' \cdot (z_1 \partial p - x_1 \partial r) + \alpha'' \cdot (x_1 \partial q - y_1 \partial p) \\ \qquad + (ry_1 - qz_1) \cdot \partial \alpha + (pz_1 - rx_1) \cdot \partial \alpha' + (qx_1 - py_1) \cdot \partial \alpha''; \\ \partial^2 y = \beta \cdot (y_1 \partial r - z_1 \partial q) + \beta' \cdot (z_1 \partial p - x_1 \partial r) + \beta'' \cdot (x_1 \partial q - y_1 \partial p) \\ \qquad + (ry_1 - qz_1) \cdot \partial \beta + (pz_1 - rx_1) \cdot \partial \beta' + (qx_1 - py_1) \cdot \partial \beta''; \\ \partial^2 z = \gamma \cdot (y_1 \partial r - z_1 \partial q) + \gamma' \cdot (z_1 \partial p - x_1 \partial r) + \gamma'' \cdot (x_1 \partial q - y_1 \partial p) \\ \qquad + (ry_1 - qz_1) \cdot \partial \gamma + (pz_1 - rx_1) \cdot \partial \gamma' + (qx_1 - py_1) \cdot \partial \gamma''. \end{cases}$$

Bekanntlich sind $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ die (auf die Druck-Einheit bezogenen) Zuwachse, welche die Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z in dem, nach t unmittelbar folgenden Zeittheilchen dt erleiden. Denkt man sich diese Zuwachse nach den im Körper festen Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zerlegt, und die Summen derselben in jeder dieser drei Richtungen durch p_1, q_1, r_1 bezeichnet, so erhält man

$$p_1 = \alpha \cdot \partial^2 x + \beta \cdot \partial^2 y + \gamma \cdot \partial^2 z; \quad q_1 = \alpha' \cdot \partial^2 x + \beta' \cdot \partial^2 y + \gamma' \cdot \partial^2 z;$$
$$r_1 = \alpha'' \cdot \partial^2 x + \beta'' \cdot \partial^2 y + \gamma'' \cdot \partial^2 z;$$

und daher auch (aus 19., vermöge der Formeln 1.—4.)

$$20) \begin{cases} p_1 = (y_1 \partial r - z_1 \partial q) + (pz_1 - rx_1) \cdot r - (qx_1 - py_1) \cdot q, \\ q_1 = (z_1 \partial p - x_1 \partial r) + (qx_1 - py_1) \cdot p - (ry_1 - qz_1) \cdot r, \\ r_1 = (x_1 \partial q - y_1 \partial p) + (ry_1 - qz_1) \cdot q - (pz_1 - rx_1) \cdot p. \end{cases}$$

Diese Werthe für p_1, q_1, r_1 stellen also die (in dem unmittelbar nach t folgenden Zeittheilchen dt) erworbenen Zuwachse der Seiten-Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z, parallel mit SX_1, SY_1, SZ_1 zerlegt, vor.

VIII. Da zu Ende der Zeit t das Element dM nach den Axen SX_1, SY_1, SZ_1 die Geschwindigkeiten

$$v_1 = ry_1 - qz_1; \quad v_2 = pz_1 - rx_1; \quad v_3 = qx_1 - py_1,$$

also die Größen der Bewegung

$(ry_1 - qz_1) \cdot dM; \quad (pz_1 - rx_1) \cdot dM; \quad (qx_1 - py_1) \cdot dM$

hat, so ist es auch leicht, die Summen der statischen Momente L_1, M_1, N_1 dieser „Größen der Bewegung" bezüglich auf die Momenten-Axen SZ_1, SY_1, SX_1 zu finden. Es ist nämlich

$$21) \begin{cases} L_1 = \Sigma[(ry_1 - qz_1) \cdot y_1 - (pz_1 - rx_1) \cdot x_1] \cdot dM, \\ M_1 = \Sigma[(qx_1 - py_1) \cdot x_1 - (ry_1 - qz_1) \cdot z_1] \cdot dM, \\ N_1 = \Sigma[(pz_1 - rx_1) \cdot z_1 - (qx_1 - py_1) \cdot y_1] \cdot dM. \end{cases}$$

Sind jedoch die im Körper festen Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zu gleicher Zeit die zu dem Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen, und sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die drei Haupt-Trägheits-Momente, so daß man hat

$$22) \quad \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) = 0, \quad \Sigma(x_1 z_1 \cdot dM) = 0, \quad \Sigma(x_1 y_1 \cdot dM) = 0;$$

$$23) \quad \Sigma(y_1^2 + z_1^2) \cdot dM = \mathfrak{A}, \quad \Sigma(x_1^2 + z_1^2) \cdot dM = \mathfrak{B},$$
$$\Sigma(x_1^2 + y_1^2) \cdot dM = \mathfrak{C},$$

so reduciren sich diese Ausdrücke für L_1, M_1, N_1 bedeutend, und sie werden:

$$24) \quad L_1 = \mathfrak{C}r, \quad M_1 = \mathfrak{B}q, \quad N_1 = \mathfrak{A}p\ ^*),$$

wo L_1, M_1, N_1 die Summen der statischen Momente der zu Ende der Zeit t in allen Elementen dM des Körpers vorhandenen „Größen der Bewegung" vorstellen, die bezüglich zu den Momenten-Axen SZ_1, SY_1, SX_1 gehören.

IX. Diese „Größen der Bewegung" $(ry_1 - qz_1) \cdot dM$, $(pz_1 - rx_1) \cdot dM$ und $(qx_1 - py_1) \cdot dM$ als Kräfte angesehen, kann man in eine einzige Kraft vereinigen und in ein zugehöriges Gegen-Paar, dessen Ebene senkrecht darauf steht. Diese Ebene wird dann (nach II. Th. §. 34.) die diesen Kräften entsprechende Haupt-Ebene genannt; auch ist sie die Ebene der größten Momenten-Summe derselben Kräfte, und das Moment dieses Gegen-Paares ist diese größte Momenten-Summe selbst (alles nach II. Th. §. 34.). Ist nun H_1 dieses Moment

---

*) Dieselben Resultate sind (§. 92. V. Nr. 15.) auch schon gefunden worden.

oder diese größte Momenten-Summe, so hat man bekanntlich (nach II. Th. §§. 23.—34.)

$$H_1 = \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2};$$

also hier (wegen der Gleichungen 24.)

$$25) \quad H_1 = \sqrt{\mathfrak{A}^2 p^2 + \mathfrak{B}^2 q^2 + \mathfrak{C}^2 r^2}.$$

Wenn nun Sm dessen Axe ist, und zwar die positive Seite derselben, so findet sich noch

$$26) \quad \cos mSX_1 = \frac{\mathfrak{A}p}{H_1}; \qquad \cos mSY_1 = \frac{\mathfrak{B}q}{H_1};$$
$$\cos mSZ_1 = \frac{\mathfrak{C}r}{H_1};$$

woraus dann wieder

$$27) \quad \begin{cases} H_1 \cdot \cos mSX = \mathfrak{A}p \cdot \alpha + \mathfrak{B}q \cdot \alpha' + \mathfrak{C}r \cdot \alpha'', \\ H_1 \cdot \cos mSY = \mathfrak{A}p \cdot \beta + \mathfrak{B}q \cdot \beta' + \mathfrak{C}r \cdot \beta'', \\ H_1 \cdot \cos mSZ = \mathfrak{A}p \cdot \gamma + \mathfrak{B}q \cdot \gamma' + \mathfrak{C}r \cdot \gamma'' \end{cases}$$

hervorgeht. Diese letztern Ausdrücke zur Rechten (in 27.) sind also (nach II. Th. §. 34.) die Summen der statischen Momente derselben, zu Ende der Zeit t in den einzelnen Elementen vorhandenen „Größen der Bewegung" aber in Bezug auf die Momenten-Axen SX, SY, SZ genommen. — Es ist aber in dieser Nummer, so wie in dem Folgenden nun vorausgesetzt, daß die im Körper als fest gedachten Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 allemal die zu S gehörigen Haupt-Dreh-Axen sind.

X. Bestimmt man die Lage der beiden Koordinaten-Axen-Systeme zu einander durch die Winkel θ, φ, ψ, von denen der eine (θ) die Neigung der beiden Ebenen X_1SY_1 und XSY zu einander, die beiden andern aber die Lage der Knoten-Linie (der Durchschnitts-Linie dieser Ebenen) SD gegen die Koordinaten-Axen SX und SX_1 bedeuten, so sind φ, ψ, θ ebenfalls Funktionen der Zeit t, in welche α, α', α'', β, β', β'' und γ, γ', γ'' ausgedrückt werden können, nämlich (nach I. Th. Geom. §. 3.) wie folgt:

$$
28)\quad \begin{cases}
\alpha = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\theta;\\
\beta = -\sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\theta;\\
\gamma = \sin\psi\cdot\sin\theta;\\
\alpha' = -\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta;\\
\beta' = \sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta;\\
\gamma' = \cos\psi\cdot\sin\theta;\\
\alpha'' = -\sin\varphi\cdot\sin\theta;\\
\beta'' = -\cos\varphi\cdot\sin\theta;\\
\gamma'' = \cos\theta.
\end{cases}
$$

Vermöge dieser Gleichungen (28.) kann man nun auch die Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r in φ, ψ und θ ausdrücken. Man hat nämlich (nach 12. und 16.)

$$
29)\quad \begin{cases}
p = \alpha'\cdot\partial\alpha'' + \beta'\cdot\partial\beta'' + \gamma'\cdot\partial\gamma'',\\
q = \alpha''\cdot\partial\alpha + \beta''\cdot\partial\beta + \gamma''\cdot\partial\gamma,\\
r = \alpha\cdot\partial\alpha' + \beta\cdot\partial\beta' + \gamma\cdot\partial\gamma'.
\end{cases}
$$

Weil aber (nach 28.) α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', Funktionen von φ, ψ, θ sind, so hat man z. B.

$$\partial\alpha'' = \partial\alpha''_{\varphi}\cdot\partial\varphi + \partial\alpha''_{\psi}\cdot\partial\psi + \partial\alpha''_{\theta}\cdot\partial\theta$$

u. s. w. f. Dadurch werden die Gleichungen (29.) die nachstehenden:

$$
\begin{aligned}
p = & (\alpha'\cdot\partial\alpha''_{\varphi} + \beta'\cdot\partial\beta''_{\varphi} + \gamma'\cdot\partial\gamma''_{\varphi})\cdot\partial\varphi\\
& + (\alpha'\cdot\partial\alpha''_{\psi} + \beta'\cdot\partial\beta''_{\psi} + \gamma'\cdot\partial\gamma''_{\psi})\cdot\partial\psi\\
& + (\alpha'\cdot\partial\alpha''_{\theta} + \beta'\cdot\partial\beta''_{\theta} + \gamma'\cdot\partial\gamma''_{\theta})\cdot\partial\theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q = & (\alpha''\cdot\partial\alpha_{\varphi} + \beta''\cdot\partial\beta_{\varphi} + \gamma''\cdot\partial\gamma_{\varphi})\cdot\partial\varphi\\
& + (\alpha''\cdot\partial\alpha_{\psi} + \beta''\cdot\partial\beta_{\psi} + \gamma''\cdot\partial\gamma_{\psi})\cdot\partial\psi\\
& + (\alpha''\cdot\partial\alpha_{\theta} + \beta''\cdot\partial\beta_{\theta} + \gamma''\cdot\partial\gamma_{\theta})\cdot\partial\theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r = & (\alpha\cdot\partial\alpha'_{\varphi} + \beta\cdot\partial\beta'_{\varphi} + \gamma\cdot\partial\gamma'_{\varphi})\cdot\partial\varphi\\
& + (\alpha\cdot\partial\alpha'_{\psi} + \beta\cdot\partial\beta'_{\psi} + \gamma\cdot\partial\gamma'_{\psi})\cdot\partial\psi\\
& + (\alpha\cdot\partial\alpha'_{\theta} + \beta\cdot\partial\beta'_{\theta} + \gamma\cdot\partial\gamma'_{\theta})\cdot\partial\theta.
\end{aligned}
$$

Differenziirt man nun die Gleichungen (28.) nach allem φ, nach allem ψ und nach allem θ, und substituirt man die 27 Werthe die man erhält, in die vorstehenden drei Gleichungen, so ergeben sich

sich nach allen Reduktionen die nachstehenden in der Folge so wichtigen Formeln, nämlich *)

$$(\odot)\cdots\left\{\begin{array}{l} p = sin\psi \cdot sin\theta \cdot \partial\varphi - cos\psi \cdot \partial\theta, \\ q = cos\psi \cdot sin\theta \cdot \partial\varphi + sin\psi \cdot \partial\theta, \\ r = cos\theta \cdot \partial\varphi - \partial\psi. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen geben auch φ, ψ, θ, sobald man vorher p, q, r in t ausgedrückt hat **). Dagegen bedeuten jetzt p, q, r die drei Winkel-Geschwindigkeiten um die zu dem festen Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1 und SZ_1.

Daß in diesen Gleichungen $(\odot)$ der Winkel φ selbst nicht vorkommt, war vorauszusehen, weil die Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r offenbar dieselben bleiben müssen, wenn man den Winkel φ um irgend eine Konstante vergrößert, d. h. wenn man die Axe SX etwas weiter zurück oder vorwärts legt.

XI. Schließlich wollen wir noch auf einige Relationen aufmerksam machen, welche zwischen p, q, r und den Kosinussen α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' statt finden. Diese sind nämlich:

$$30)\left\{\begin{array}{lll} \partial\alpha = \alpha''q - \alpha'r; & \partial\beta = \beta''q - \beta'r; & \partial\gamma = \gamma''q - \gamma'r; \\ \partial\alpha' = \alpha r - \alpha''p; & \partial\beta' = \beta r - \beta''p; & \partial\gamma' = \gamma r - \gamma''p; \\ \partial\alpha'' = \alpha'p - \alpha q; & \partial\beta'' = \beta'p - \beta q; & \partial\gamma'' = \gamma'p - \gamma q. \end{array}\right.$$

*) Man erleichtert sich diese Rechnungen sehr, wenn man bemerkt, daß

$$\begin{array}{lll} \partial\alpha''_{\varphi} = \beta'', & \partial\beta''_{\varphi} = -\alpha'', & \partial\gamma''_{\varphi} = 0, \\ \partial\alpha''_{\psi} = 0, & \partial\beta''_{\psi} = 0, & \partial\gamma''_{\psi} = 0, \\ \partial\alpha''_{\theta} = -sin\varphi \cdot cos\theta, & \partial\beta''_{\theta} = -cos\varphi \cdot cos\theta, & \partial\gamma''_{\theta} = -sin\theta, \\ \partial\alpha'_{\varphi} = \beta', & \partial\beta'_{\varphi} = -\alpha', & \partial\gamma'_{\varphi} = 0, \\ \partial\alpha'_{\psi} = -\alpha, & \partial\beta'_{\psi} = -\beta, & \partial\gamma'_{\psi} = -\gamma, \\ \partial\alpha_{\varphi} = \beta, & \partial\beta_{\varphi} = -\alpha, & \partial\gamma_{\varphi} = 0, \\ \partial\alpha_{\psi} = \alpha', & \partial\beta_{\psi} = \beta', & \partial\gamma_{\psi} = \gamma' \end{array}$$

ist, so daß z. B. sogleich

$$\alpha'' \cdot \partial\alpha_{\psi} + \beta'' \cdot \partial\beta_{\psi} + \gamma'' \cdot \partial\gamma_{\psi} = \alpha'' \cdot \alpha' + \beta'' \cdot \beta' + \gamma'' \cdot \gamma' = 0$$

und

$$\alpha \cdot \partial\alpha'_{\psi} + \beta \cdot \partial\beta'_{\psi} + \gamma \cdot \partial\gamma'_{\psi} = -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = -1$$

sich findet; u. dgl. m.

**) Die dritte dieser Gleichungen ist genau die im (§. 93. Nr. 6.) gefundene, nur daß sie hier in so fern etwas allgemeiner ist, als dort XSY die Ebene des Anfangs-Gegen-Paars, hier aber eine ganz beliebige Ebene ist.

Man findet diese Relationen auf folgendem Wege:
Man nimmt (aus 29. 3. 4.)

$$\alpha'\cdot\partial\alpha + \beta'\cdot\partial\beta + \gamma'\cdot\partial\gamma = -\mathrm{r},$$
$$\alpha''\cdot\partial\alpha + \beta''\cdot\partial\beta + \gamma''\cdot\partial\gamma = +\mathrm{q},$$
$$\alpha\cdot\partial\alpha + \beta\cdot\partial\beta + \gamma\cdot\partial\gamma = 0,$$

multiplicirt solche bezüglich mit α', α'', α und addirt; multiplicirt solche bezüglich mit β', β'', β und addirt; multiplicirt endlich solche mit γ', γ'', γ und addirt; und man wird die drei erstern dieser Relationen haben, sobald man die Gleichungen (1. u. 2.) anwendet.

Geht man eben so von

$$\alpha''\cdot\partial\alpha' + \beta''\cdot\partial\beta' + \gamma''\cdot\partial\gamma' = -\mathrm{p},$$
$$\alpha\cdot\partial\alpha' + \beta\cdot\partial\beta' + \gamma\cdot\partial\gamma' = +\mathrm{r},$$
$$\alpha'\cdot\partial\alpha' + \beta'\cdot\partial\beta' + \gamma'\cdot\partial\gamma' = 0,$$

aus, so erhält man bald die folgenden drei der Relationen (30.). Und geht man zuletzt von den Gleichungen

$$\alpha\cdot\partial\alpha'' + \beta\cdot\partial\beta'' + \gamma\cdot\partial\gamma'' = -\mathrm{q},$$
$$\alpha'\cdot\partial\alpha'' + \beta'\cdot\partial\beta'' + \gamma'\cdot\partial\gamma'' = +\mathrm{p},$$
$$\alpha''\cdot\partial\alpha'' + \beta''\cdot\partial\beta'' + \gamma''\cdot\partial\gamma'' = 0$$

aus, so erhält man auf ganz analoge Weise die letztern drei der obigen Relationen.

Aus den neun Gleichungen (30.) folgt dann noch unmittelbar

$$31) \begin{cases} \mathrm{p}\cdot\partial\alpha + \mathrm{q}\cdot\partial\alpha' + \mathrm{r}\cdot\partial\alpha'' = 0, \\ \mathrm{p}\cdot\partial\beta + \mathrm{q}\cdot\partial\beta' + \mathrm{r}\cdot\partial\beta'' = 0, \\ \mathrm{p}\cdot\partial\gamma + \mathrm{q}\cdot\partial\gamma' + \mathrm{r}\cdot\partial\gamma'' = 0. \end{cases}$$

Anmerk. In allen diesen Formeln ist von den wirkenden Kräften nicht die Rede, weder von denen, welche die Anfangs-Bewegung hervorgebracht haben, noch von denen, welche stetig noch hinzutreten und die Bewegung ändern; sondern diese Formeln drücken nur den Zusammenhang aus, der zwischen den, bei jeder Bewegung um einen unbeweglichen Punkt S zu Ende irgend einer Zeit t vorkommenden Größen statt findet. Dieser ganze Paragraph ist daher nur als Einleitung anzusehen in das wirkliche Problem (der Drehung des Körpers um einen festen Punkt, wenn beliebig gegebene Stöße zu Anfange gewirkt haben, und beliebige Kräfte stetig noch hinzutreten). Dieses Problem selbst wird aber nun unmittelbar durch das d'Alembertsche Princip ohne weiteres gelößt.

§. 99.

Ein beliebiger Körper, welcher um einen festen Punkt S beliebig sich drehen kann, wird durch beliebige gleichzeitige Stöße aus der Ruhe in Bewegung gebracht. Außerdem wirken zu Ende einer jeden Zeit t, auf jedes Element dM des Körpers die, parallel mit den im Körper festgedachten Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 wirkenden Kräfte

$$X_1 \cdot dM \cdot dt; \quad Y_1 \cdot dM \cdot dt; \quad Z_1 \cdot dM \cdot dt.$$

oder, wenn man letztere auf die Druck-Einheit bezieht, die Kräfte

$$X_1 \cdot dM; \quad Y_1 \cdot dM; \quad Z_1 \cdot dM \text{ *)}.$$

Man soll die Drehung des Körpers um den Punkt S näher bestimmen.

I. Man führe alles so ein, wie solches im vorhergehenden Paragraphen beschrieben worden ist, so sind p_1, q_1, r_1 (§. 98. VII. 20.) die Zuwachse der Geschwindigkeiten, also $p_1 \cdot dM$, $q_1 \cdot dM$, $r_1 \cdot dM$ die Zuwachse der „Größen der Bewegung", welche das Element dM unmittelbar nach t, in dem Zeittheilchen dt, parallel mit SX_1, SY_1, SZ_1 erleidet; also sind

$$(X_1 - p_1) \cdot dM; \quad (Y_1 - q_1) \cdot dM; \quad (Z_1 - r_1) \cdot dM$$

die verlorenen Kräfte, welche nach dem d'Alembertschen Princip sich um den festen Punkt S im Gleichgewicht halten müssen.

Nun sind aber die Bedingungen des Gleichgewichts um einen festen Punkt S, durch drei Gleichungen ausgedrückt, nämlich die Summe der statischen Momente der verlorenen Kräfte dreimal (um drei verschiedene Momenten-Axen) der Null gleich. Dies giebt die Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} \Sigma[(X_1 - p_1) \cdot y_1 - (Y_1 - q_1) \cdot x_1] \cdot dM = 0, \\ \Sigma[(Z_1 - r_1) \cdot x_1 - (X_1 - p_1) \cdot z_1] \cdot dM = 0, \\ \Sigma[(Y_1 - q_1) \cdot z_1 - (Z_1 - r_1) \cdot y_1] \cdot dM = 0, \end{cases}$$

*) Sind die stetig hinzutretenden (d. h. die beschleunigenden) Kräfte parallel mit den im Raume festen Axen SX, SY, SZ, zerlegt und durch $X \cdot dM$, $Y \cdot dM$, $Z \cdot dM$ bezeichnet, so hat man

$$X_1 = \alpha \cdot X + \beta \cdot Y + \gamma \cdot Z$$
$$Y_1 = \alpha' \cdot X + \beta' \cdot Y + \gamma' \cdot Z$$
$$Z_1 = \alpha'' \cdot X + \beta'' \cdot Y + \gamma'' \cdot Z.$$

wo sich die Σ jedesmal über alle Elemente der ganzen Masse M des Körpers erstrekken. Aus diesen drei Gleichungen müssen also nun die drei unbekannten Funktionen φ, ψ, θ von t, gefunden werden, aus welchen dann mittelst der Formeln des vorhergehenden (§. 98.) alles übrige hergeleitet wird.

II. Man denke sich nun, um die Rechnungen, welche aus der Substitution der Werthe von p_1, q_1, r_1 (aus §. 98. Nr. 20.) hervorgehen, zu vereinfachen, daß SX_1, SY_1, SZ_1 die zu dem Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen, und daß $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei Haupt-Trägheits-Momente des Körpers seyen, so daß man

$$2)\quad \Sigma(y_1 z_1 \cdot dM) = 0,\ \Sigma(x_1 z_1 \cdot dM) = 0,\ \Sigma(x_1 y_1 \cdot dM) = 0$$

und

$$3)\quad \begin{cases} \Sigma(y_1^2 - x_1^2)\cdot dM = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \\ \Sigma(x_1^2 - z_1^2)\cdot dM = \mathfrak{C} - \mathfrak{A}, \\ \Sigma(z_1^2 - y_1^2)\cdot dM = \mathfrak{B} - \mathfrak{C} \end{cases}$$

hat. Ferner setze man der Kürze wegen

$$4)\quad \begin{cases} \Sigma(y_1 X_1 - x_1 Y_1)\cdot dM = R, \\ \Sigma(x_1 Z_1 - z_1 X_1)\cdot dM = Q, \\ \Sigma(z_1 Y_1 - y_1 Z_1)\cdot dM = P, \end{cases}$$

so daß P, Q, R die Summe der statischen Momente der beschleunigenden Kräfte $X_1 \cdot dM$, $Y_1 \cdot dM$, $Z_1 \cdot dM$ in Bezug auf die Momenten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 vorstellen, während die letztern die Haupt-Dreh-Axen sind, welche zu dem festen Punkte S gehören.

Unter diesen Voraussetzungen gehen die drei Gleichungen der Bewegung (1.) in die nachstehenden über, nämlich in

$$(\mathfrak{C})\cdots \begin{cases} \mathfrak{C}\cdot \partial r + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cdot pq = R, \\ \mathfrak{B}\cdot \partial q + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\cdot rp = Q, \\ \mathfrak{A}\cdot \partial p + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\cdot qr = P, \end{cases}$$

aus welchen nun p, q, r oder φ, ψ, θ gefunden werden müssen (in t ausgedrückt, während alle ∂ sich auf t beziehen), in so fern X_1, Y_1, Z_1 Funktionen von t, also in der Regel unmittelbare Funktionen von φ, ψ, θ seyn werden, so daß diese

Gleichungen (☾) in Verbindung mit den Gleichungen (§. 98. X. ⊙) die vollständige Auflösung des Problems liefern. Eliminirt man nämlich aus diesen sechs Gleichungen die Winkel-Geschwindigkeiten (dadurch, daß man vorher die Gleichungen §. 98. ⊙ noch einmal differenziirt, und dann aus allen neun Gleichungen die sechs Unbekannten p, q, r, ∂p, ∂q, ∂r auf algebraischem Wege wegschafft), so erhält man im Allgemeinen drei Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung zwischen φ, ψ und θ, welche dann noch der fernern Integration entgegensehen.

Diese Integration kann aber natürlich nur dann versucht werden, wenn X_1, Y_1, Z_1 wirklich gegeben sind, und in jedem besondern Falle, wo das letztere statt findet, wird man meistentheils noch die unübersteiglichen Hindernisse der Ausführung finden, welche so häufig das Integriren begleiten.

§. 100.

Wenn gar keine beschleunigenden Kräfte wirken.

Denkt man sich nun zunächst wiederum den besondern Fall (der ersten Abtheilung dieses Kapitels), wo gar keine Kräfte stetig hinzutreten, wo also bloß ein Anfangs-Stoß statt findet, den Körper in Bewegung setzt und dann letzteren sich selber überläßt (ohne daß irgend eine Kraft, also auch nicht die Schwere weiter hinzutritt), so erhält man diese drei Gleichungen der Bewegung, nämlich

$$(☾_1)\cdots\left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}\cdot\partial r + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot pq &= 0,\\ \mathfrak{B}\cdot\partial q + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\cdot rp &= 0,\\ \mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\cdot qr &= 0, \end{aligned}\right.$$

welche mit den Gleichungen (§. 98. X. ⊙) das Problem vollständig lösen, immer unter der Voraussetzung, daß SX_1, SY_1, SZ_1 die zu dem festen Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen des Körpers sind.

Von diesen Gleichungen ($☾_1$) lassen sich aber Integrale bequem finden. — Multiplicirt man nämlich diese Gleichungen bezüglich mit r, q, p und addirt man sie, so ergiebt sich

$$1) \quad \mathfrak{C}r \cdot \partial r + \mathfrak{B}q \cdot \partial q + \mathfrak{A}p \cdot \partial p = 0;$$

oder, wenn man integrirt,

$$\text{I.} \quad \mathfrak{C} \cdot r^2 + \mathfrak{B} \cdot q^2 + \mathfrak{A} \cdot p^2 = h^2,$$

wo h^2 eine noch unbestimmte aber positive Konstante ist, welche jedoch sogleich aus den Anfangs-Werthen p', q', r' von p, q, r ihre Bestimmung erhält, so daß

$$h^2 = \mathfrak{A}p'^2 + \mathfrak{B}q'^2 + \mathfrak{C}r'^2$$

sich findet.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen ($\mathfrak{C}_1$) bezüglich mit $\mathfrak{C}r$, $\mathfrak{B}q$, $\mathfrak{A}p$ und addirt man solche dann wiederum, so erhält man noch

$$2) \quad \mathfrak{C}^2 r \cdot \partial r + \mathfrak{B}^2 q \cdot \partial q + \mathfrak{A}^2 p \cdot \partial p = 0;$$

oder, wenn man integrirt

$$\text{II.} \quad \mathfrak{C}^2 \cdot r^2 + \mathfrak{B}^2 \cdot q^2 + \mathfrak{A}^2 \cdot p^2 = k^2,$$

wo auch k^2 eine noch zu bestimmende Konstante ist, während jedoch auch k^2 nur positiv seyn kann.

Findet man nun aus diesen Gleichungen (I. u. II.) sowohl p als auch q, nämlich

$$3) \quad p^2 = \frac{k^2 - \mathfrak{B}h^2 + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\mathfrak{A}} \text{ und } q^2 = \frac{k^2 - \mathfrak{A}h^2 + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2}{(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\mathfrak{B}},$$

und substituirt man diese Werthe statt p und q in die erste der Gleichungen ($\mathfrak{C}_1$), setzt man zu gleicher Zeit $\frac{1}{\partial t_r}$ statt ∂r (d. h. statt ∂r_t) und lößt man das Endresultat nach ∂t_r algebraisch auf, so erhält man

$$4) \quad \partial t_r = \frac{\mathfrak{C}}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) \cdot pq},$$

folglich

$$\text{III.} \quad t = \int \frac{\pm \mathfrak{C} \cdot \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \cdot dr}{\sqrt{-[k^2 - \mathfrak{B}h^2 + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2][k^2 - \mathfrak{A}h^2 + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2]}}.$$

Die Gleichungen ($\mathfrak{C}_1$) sind genau die Gleichungen (§. 91. Nr. 19.), also auch die der (NNr. 8.—10. des §. 91.); die Integrale (I. II. und III.) derselben sind genau die Integrale (§. 91. NNr. 11. 12. und 22.), nur mit dem Unterschiede,

daß dort die Konstante k sogleich als das Moment Q des Anfangs-Gegen-Paars sich auswies, während hier diese Konstante k erst aus den Anfangs-Werthen p', q' und r' von p, q, r ihre Bestimmung erhalten muß. Es ist nämlich offenbar (aus II.)

5) $k^2 = \mathfrak{A}^2 \cdot p'^2 + \mathfrak{B}^2 \cdot q'^2 + \mathfrak{C}^2 \cdot r'^2$,

d. h. (nach §. 98. NNr. 24. 25.)

6) $k^2 = L'^2_1 + M'^2_1 + N'^2_1 = H'^2_1$,

wenn L'_1, M'_1, N'_1 und H'_1 dasselbe bedeuten wie dort, aber zu Anfange der Bewegung, wo $t = 0$ ist. Denkt man sich aber, daß zu Anfange ein Gegen-Paar gestoßen hat, dessen Moment $= Q$ ist, und dessen positive Axen-Seite mit den drei Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 in ihrer Lage, wie solche zu Anfange der Bewegung gewesen ist, die Winkel λ'_1, μ'_1, ν'_1 macht, so muß, weil nach dem d'Alembertschen Principe auch im Anfange der Bewegung die verlorenen Kräfte um den festen Punkt S herum sich im Gleichgewichte halten müssen, allemal

7) $Q \cdot \cos \lambda'_1 = N'_1$; $Q \cdot \cos \mu'_1 = M'_1$ und $Q \cdot \cos \nu'_1 = L'_1$

seyn. Daraus geht aber sogleich, wenn man diese drei Gleichungen quadrirt und addirt,

8) $Q^2 = L'^2_1 + M'^2_1 + N'^2_1 = H'^2_1$,

also (wegen der 6.) noch

9) $k^2 = Q^2$

hervor. Mithin sind diese Integrale (I. II. III.) von denen (§. 91. NNr. 11. 12. u. 22.) gar nicht verschieden.

Man findet übrigens auch hier sogleich noch (genau so wie im §. 91. Nr. 27.)

IV) $$t = \int \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \cdot \omega \cdot d\omega}{\sqrt{-[k^2-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})h^2+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\omega^2][k^2-(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})h^2+\mathfrak{A}\mathfrak{C}\cdot\omega^2][k^2-(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})h^2+\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\omega^2]}},$$

wo $k^2 = Q^2$ ist.

§. 101.

Fortgesetzte Betrachtung des Falles, in welchem gar keine beschleunigenden Kräfte wirken.

Hat man aber aus dem d'Alembertschen Principe die Gleichungen der Bewegung und die vorstehenden Integrale (I.—IV.

des §. 100.) abgeleitet, so ist es jetzt nicht schwer, daraus wiederum die geometrische Bewegung des Körpers zu veranschaulichen und genau dieselben Resultate zu erhalten, welche in der erstern Abtheilung dieses Kapitels bereits auf dem entgegengesetzten Wege erzielt worden sind.

A. Denkt man sich nämlich zunächst den Körper zu Ende der Zeit t plötzlich in Ruhe versetzt, in der Lage gegen die Ebene des Anfangs-Gegen-Paars, die er eben hatte, und fragt man nun nach dem Gegen-Paare, dessen Stoß dem Körper augenblicklich dieselbe Bewegung, die er so eben (zu Ende der Zeit t) hatte, wiederum beibringen würde, — so bezeichne man sein gesuchtes Moment durch Q_t, und drücke seine Ebene und Richtung durch die gesuchten Winkel λ_1, μ_1, ν_1 aus, welche seine positive Axen-Seite mit den Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 in ihrer jetzigen Lage (zu Ende der Zeit t) macht, und man findet, wenn L_1, M_1, N_1 und H_1 die Bedeutung haben, welche ihnen in den Nummern (VIII. u. IX. des §. 98.) zukommt, und wenn man wiederum das d'Alembertsche Princip anwendet,

$$1)\quad \begin{cases} Q_t \cdot \cos\nu_1 = L_1 = \mathfrak{C}r; \\ Q_t \cdot \cos\mu_1 = M_1 = \mathfrak{B}q; \\ Q_t \cdot \cos\lambda_1 = N_1 = \mathfrak{A}p. \end{cases}$$

Daraus folgt aber sogleich, wenn man quadrirt und addirt,

$$2)\qquad Q_t = \sqrt{\mathfrak{A}^2 p^2 + \mathfrak{B}^2 q^2 + \mathfrak{C}^2 r^2} = H_1;$$

also auch (nach §. 100. II.)

$$3)\qquad Q_t = k = Q,$$

d. h. das gesuchte Gegen-Paar Q_t ist seinem Momente nach von dem Anfangs-Gegen-Paare nicht verschieden.

Was nun die Lage und Richtung dieses gesuchten Gegen-Paares betrifft, so findet sich solche aus (1.), nämlich aus den Gleichungen

$$4)\quad \cos\lambda_1 = \frac{\mathfrak{A}p}{Q}; \quad \cos\mu_1 = \frac{\mathfrak{B}q}{Q} \text{ und } \cos\nu_1 = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}.$$

Dies ist aber seine Lage gegen die Haupt-Dreh-Axen. Sucht man nun seine Lage gegen die im Raume festen Axen SX, SY,

SZ, d. h. die Winkel λ, μ, ν, welche seine Axe mit diesen letztern macht, so hat man natürlich (nach I. Th. §. 1. VII. 7.)

$$5)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\mathfrak{A}p\cdot\alpha + \mathfrak{B}q\cdot\alpha' + \mathfrak{C}r\cdot\alpha''}{Q}, \\ \cos\mu = \dfrac{\mathfrak{A}p\cdot\beta + \mathfrak{B}q\cdot\beta' + \mathfrak{C}r\cdot\beta''}{Q}, \\ \cos\nu = \dfrac{\mathfrak{A}p\cdot\gamma + \mathfrak{B}q\cdot\gamma' + \mathfrak{C}r\cdot\gamma''}{Q}. \end{cases}$$

Diese drei Zähler zur Rechten zeigen sich aber, vermöge der Gleichungen der Bewegung (§. 100. $\mathfrak{C}_1$) von t unabhängig. Multiplicirt man nämlich diese Gleichungen ($\mathfrak{C}_1$) bezüglich mit α'', α' und α, und addirt man die Resultate, so erhält man

$$\mathfrak{C}\cdot[\alpha''\cdot\partial r + (p\alpha' - q\alpha)r] + \mathfrak{B}\cdot[\alpha'\cdot\partial q + (r\alpha - p\alpha'')q] \\ + \mathfrak{A}\cdot[\alpha\cdot\partial p + (q\alpha'' - r\alpha')p] = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich aber vermöge der Formeln des (§. 98. Nr. 30.) auf

$$\mathfrak{C}\cdot\partial(r\alpha'') + \mathfrak{B}\cdot\partial(q\alpha') + \mathfrak{A}\cdot\partial(p\alpha) = 0,$$

und giebt, wenn man integrirt

$$\text{V.}\qquad \mathfrak{A}p\cdot\alpha + \mathfrak{B}q\cdot\alpha' + \mathfrak{C}r\cdot\alpha'' = \mathfrak{l},$$

wo $\mathfrak{l}$ eine noch unbestimmte Konstante ist.

Auf ganz analogem Wege findet man noch:

$$\text{VI.}\qquad \mathfrak{A}p\cdot\beta + \mathfrak{B}q\cdot\beta' + \mathfrak{C}r\cdot\beta'' = \mathfrak{l}'$$

und

$$\text{VII.}\qquad \mathfrak{A}p\cdot\gamma + \mathfrak{B}q\cdot\gamma' + \mathfrak{C}r\cdot\gamma'' = \mathfrak{l}'',$$

wo $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ eben so wie $\mathfrak{l}$, noch unbestimmte Konstanten sind. Die Gleichungen (5.) gehen daher nun über in

$$6)\quad \cos\lambda = \frac{\mathfrak{l}}{Q},\quad \cos\mu = \frac{\mathfrak{l}'}{Q},\quad \cos\nu = \frac{\mathfrak{l}''}{Q},$$

und diese Gleichungen zeigen nun, daß diese Winkel zu allen Zeiten dieselben, also auch so wie zu Anfange der Bewegung sind. Also fällt das gesuchte Gegen-Paar Q_t mit dem Anfangs-Gegen-Paare Q, seinem Momente, seiner Lage und seiner Richtung nach genau zusammen, und $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}$ sind nichts weiter als die Momente der drei Gegen-Paare in den Koordinaten-

Ebenen XSY, XSZ und YSZ, in welche das Anfangs-Gegen-Paar zerlegt werden kann*). (Dies ist aber der Satz §. 89. II.).

Daher ist auch die Ebene der größten Momenten-Summe H_1, aller zu Ende der Zeit t vorhandenen „Größen der Bewegung", so wie diese größte Momenten-Summe H_1 selbst, zu allen Zeiten dieselbe, nämlich immer die Ebene und das Moment des Anfangs-Gegen-Paares.

B. Aus den Formeln (4.) findet man

$$p = k \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda_1; \quad q = k \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu_1; \quad r = k \cdot \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu_1;$$

folglich, weil $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ist,

$$7) \quad \omega = k \cdot \sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda_1^{\,2} + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu_1^{\,2} + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu_1^{\,2}},$$

wo λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel sind, welche die Axe des Anfangs-Gegen-Paares mit den (im Körper festen) Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 bildet.

Ist nun SU die augenblickliche Dreh-Axe zu Ende der Zeit t, so ist (vgl. §. 98. III. 8.)

$$8) \begin{cases} \cos USX_1 = \dfrac{p}{\omega} = \dfrac{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda_1}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda_1^{\,2} + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu_1^{\,2} + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu_1^{\,2}}}, \\ \cos USY_1 = \dfrac{q}{\omega} = \dfrac{\mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu_1}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda_1^{\,2} + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu_1^{\,2} + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu_1^{\,2}}}, \\ \cos USZ_1 = \dfrac{r}{\omega} = \dfrac{\mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu_1}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2} \cdot \cos\lambda_1^{\,2} + \mathfrak{B}^{-2} \cdot \cos\mu_1^{\,2} + \mathfrak{C}^{-2} \cdot \cos\nu_1^{\,2}}}. \end{cases}$$

Dies sind genau die Gleichungen (§. 86. III. 8.—10.) wieder, in so fern man sich in jedem Augenblicke, d. h. zu Ende einer jeden Zeit t, die Drehung als eine eben beginnende denken kann, während wir bereits (in A.) gesehen haben, daß das Gegen-Paar, welches durch seinen Stoß diese augenblickliche Be-

*) Man vergesse nicht, daß ein Anfangs-Gegen-Paar immer vorhanden ist. Denn welche Stöße Anfangs (gleichzeitig) wirken, oder wenn auch nur ein einziger Stoß wirken sollte, so werden solche parallel mit sich nach dem festen Punkte S fortgerückt gedacht und daselbst vernichtet, während dann die Gegen-Paare noch hinzutreten (nach II. Th. §. 23.), welche sich in ein einziges Gegen-Paar vereinigen lassen, und dies letztere ist dann das Anfangs-Gegen-Paar.

wegung hervorbringt, dem Momente und der Lage im absoluten Raume nach, mit dem Anfangs-Gegen-Paare zusammenfällt.

Denkt man nun an die Eigenschaft der Ellipsoide, so findet man aus den drei vorstehenden Gleichungen sogleich wieder: „daß die augenblickliche Dreh-Axe SU (zu Ende einer jeden Zeit t) der Lage nach ein, der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares zugeordneter Durchmesser desjenigen Ellipsoids ist, dessen Haupt-Durchmesser 2a, 2b, 2c der Richtung nach mit den Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zusammenfallen, und in welchem die Längen a, b, c der halben Haupt-Durchmesser gegeben sind durch die Gleichungen

9) $\quad a^2 = \mathfrak{A}^{-1}; \qquad b^2 = \mathfrak{B}^{-1}; \qquad c^2 = \mathfrak{C}^{-1}.$

Dies Ellipsoid kann man nun wieder Central-Ellipsoid nennen.

Und obgleich diese Ebene des Anfangs-Gegen-Paars im absoluten Raume fest liegt, so dreht sich doch der Körper, also auch dieses Central-Ellipsoid, so daß diese Ebene gegen das Ellipsoid doch immer eine andere und andere Lage hat, also daß eben deshalb der zugehörige Durchmesser in jedem andern Augenblicke nicht bloß eine andere Lage im Körper, sondern selbst eine andere Lage gegen die feste und unbewegliche Ebene des Anfangs-Gegen-Paares hat.

Daraus folgt aber wieder, daß wenn man durch die Pole der augenblicklichen Dreh-Axen auf der Oberfläche des Central-Ellipsoids, an letzteres Tangential-Ebenen legt, solche alle mit der im Raume festen Ebene des Anfangs-Gegen-Paares parallel, also auch alle unter sich parallel seyn müssen, wenn sie nicht in eine einzige zusammenfallen. — Um letzteres zu untersuchen, muß man den Abstand f_t irgend einer solchen Tangential-Ebene vom Mittel-Punkte des Ellipsoids bestimmen. Man findet aber diese Entfernung f_t (nach §. 81. Nr. 4.) so:

10) $\quad f_t = \sqrt{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \cos\lambda_1{}^2 + \mathfrak{B}^{-1} \cdot \cos\mu_1{}^2 + \mathfrak{C}^{-1} \cdot \cos\nu_1{}^2}.$

Substituirt man indeß hier herein statt $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$ und $\cos\nu_1$ ihre Werthe (aus 4.), so erhält man

$$f_t = \frac{1}{Q} \cdot \sqrt{\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2},$$

oder (nach §. 100. I.)

$$11) \qquad f_t = \frac{h}{Q}.$$

Diese Gleichung lehrt uns, daß die Entfernung aller dieser Tangential-Ebenen vom Mittel-Punkte des Central-Ellipsoids, die wir im Allgemeinen als eine Funktion der Zeit t ansehen mußten, daher durch f_t bezeichneten, nach t konstant ist, d. h. fortwährend eine und dieselbe bleibt. — Alle, an den verschiedenen Polen der augenblicklichen Dreh-Axen berührenden Tangential-Ebenen des Central-Ellipsoids fallen daher in eine und dieselbe zusammen, welche vom Mittel-Punkte des Ellipsoids, d. h. von dem festen Dreh-Punkte S, um $\frac{h}{Q}$ absteht.

Und so sehen wir aus der gegenwärtigen Rechnung bestätigt, was wir in der vorhergehenden Abtheilung dieses Kapitels (§§. 88. bis 90.) bereits gefunden haben, nämlich „daß das Central-Ellipsoid fortwährend eine und dieselbe im Raume feste Ebene berührt, und daß die Berührungs-Punkte die Pole der augenblicklichen Dreh-Axe sind.“ Letztere bilden dabei auf dem Central-Ellipsoid die Poloide, auf der festen Tangential-Ebene aber die Serpoloide.

§. 102.

Fortgesetzte Betrachtung des Falles, in welchem gar keine beschleunigenden Kräfte wirken.

Gehen wir nun an die Integration der Gleichungen (§. 98. X. ⊙), nämlich der Gleichungen

$$(\odot_1)\cdots \quad \begin{cases} p = \sin\psi\cdot\sin\theta\cdot\partial\varphi - \cos\psi\cdot\partial\theta, \\ q = \cos\psi\cdot\sin\theta\cdot\partial\varphi + \sin\psi\cdot\partial\theta, \\ r = \cos\theta\cdot\partial\varphi - \partial\psi. \end{cases}$$

Um dies am bequemsten zu bewerkstelligen, nehmen wir wiederum (wie im §. 93.) SX und SY in der Ebene des Anfangs-Gegen-Paares und SZ senkrecht darauf. Dann macht SZ mit SX_1, SY_1, SZ_1 die Winkel λ_1, μ_1, ν_1, deren Kosinusse (im §. 101. Nr. 4.) bereits bestimmt worden sind. Weil aber diesel-

den Kosinusse im (§. 98.) durch γ, γ', γ'' bezeichnet worden sind, so hat man nach den jetzigen Voraussetzungen

$$1)\quad \gamma = \frac{\mathfrak{A}p}{Q},\quad \gamma' = \frac{\mathfrak{B}q}{Q},\quad \gamma'' = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}.$$

Weil aber auch nach (§. 98. Nr. 28.)

$$\gamma = \sin\psi\cdot\sin\theta;\quad \gamma' = \cos\psi\cdot\sin\theta \text{ und } \gamma'' = \cos\theta$$

ist, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$2)\quad \sin\psi\cdot\sin\theta = \frac{\mathfrak{A}p}{Q};\quad \cos\psi\cdot\sin\theta = \frac{\mathfrak{B}q}{Q} \text{ und } \cos\theta = \frac{\mathfrak{C}r}{Q}.$$

Diese drei Gleichungen (2.) sind nur zwei von einander unabhängige, weil die Summe der Quadrate der drei Ausdrücke zur Linken eben so gut $= 1$ ist, als dies für die Summe der Quadrate der Ausdrücke zur Rechten (nach §. 100. II.) so gefunden wird. Hat man aber (nach §. 100.) p, q, r in die Zeit t ausgedrückt, so geben diese Gleichungen (2.) augenblicklich $\cos\theta$ also θ, und dann auch ψ dazu, ohne daß eine neue Integration nöthig wäre. Es bleibt also nur noch φ durch Integration zu bestimmen übrig.

Zu dem Ende eliminire man $\partial\theta$ aus den beiden erstern der Gleichungen ($\odot_1$), und man erhält

$$\sin\theta\cdot\partial\varphi = p\cdot\sin\psi + q\cdot\cos\psi,$$

woraus

$$3)\quad \partial\varphi = \frac{p\cdot\sin\psi + q\cdot\cos\psi}{\sin\theta}$$

hervorgeht. Multiplicirt man aber hier Zähler und Nenner mit $\sin\theta$, und setzt man dabei statt $\sin\psi\cdot\sin\theta$ und $\cos\psi\cdot\sin\theta$, so wie statt $\sin\theta^2$ ihre Werthe (aus 2.), so erhält man

$$4)\quad \partial\varphi = k\cdot\frac{\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2}{k^2 - \mathfrak{C}^2r^2};$$

also, wegen (§. 101. I.)

$$\text{VIII.}\quad \varphi = k\cdot\int\frac{h^2 - \mathfrak{C}r^2}{k^2 - \mathfrak{C}^2r^2}\cdot dt,$$

oder noch, weil $\int f_r\cdot dt = \int(f_r\cdot dt_r)\cdot dr$ ist, wegen (§. 101. III.)

$$\text{IX.}\quad \varphi = k\cdot\int\frac{h^2-\mathfrak{C}r^2}{k^2-\mathfrak{C}^2r^2}\cdot\frac{\mathfrak{C}\cdot\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\cdot dr}{\sqrt{-[k^2-\mathfrak{B}h^2+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2][k^2-\mathfrak{A}h^2+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r^2]}}.$$

Dies sind aber wiederum dieselben Resultate, welche wir bereits oben (im §. 93. NNr. 10. u. 11.) gefunden haben, weil immer $k = Q$ ist.

Anmerk. Hat man aber alle Differential-Gleichungen und alle Integrale hier gerade so, wie (für denselben Fall) in der ersten Abtheilung dieses Kapitels gefunden, hat man ferner dieselbe Veranschaulichung der geometrischen wie der dynamischen Bewegung des Körpers mittelst des Central-Ellipsoids hier erzielt, wie dort, so gehen natürlich auch alle weiteren Folgerungen, wie solche in den (§§. 92. 94.—96.) zu finden sind, ohne alle weitere Aenderung der Rechnung hier genau eben so hervor wie dort, weshalb wir hier dieselben nicht wiederholen wollen.

§. 103.

Will man in der allgemeinen Aufgabe, d. h. wenn beliebige oder wenn gar keine beschleunigenden Kräfte wirken, den Druck bestimmen, welchen der absolut feste Punkt S zu Ende einer jeden Zeit t erleidet, so muß man abermals zu Ende der Zeit t die verlorenen Kräfte aufsuchen, wie solches im (§. 99.) geschehen ist, dann aber dem gesuchten Drucke einen eben so großen Gegendruck entgegensetzen, solchen nach den im Körper festen Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 in drei unbekannte Drucke u_1, u_2 und u_3 zerlegen, diese drei Gegendrucke mit zu den verlorenen Kräften zählen, und dann für alle diese verlorenen Kräfte die Bedingungen des Gleichgewichts aufsuchen, unter der Voraussetzung, daß der Körper ganz frei ist. Dies giebt sechs Gleichungen des Gleichgewichts, von denen die drei erstern bereits im (§. 99.) erhalten, und als die Gleichungen der Bewegung weiter behandelt worden sind. Die drei andern dieser Gleichungen, welche man erhält, wenn die Summe aller, nach jeder der drei Axen SX_1, SY_1 und SZ_1 zerlegten verlorenen Kräfte, der Null gleich gesetzt wird, geben dann die Drucke $-u_1$, $-u_2$ und $-u_3$, welche der Punkt S auszuhalten hat (zu Ende einer jeden Zeit t), und welche in einen einzigen, dann der Größe und Richtung nach bekannten Druck vereinigt werden können.

Diese drei Gleichungen sind aber, wenn man die verlorenen Kräfte $(X_1 - p_1) \cdot dM$, $(Y_1 - q_1) \cdot dM$ und $(Z_1 - r_1) \cdot dM$ (aus §. 99.) nimmt, die nachstehenden:

$$u_1 + \Sigma(X_1 - p_1) \cdot dM = 0,$$
$$u_2 + \Sigma(Y_1 - q_1) \cdot dM = 0,$$
$$u_3 + \Sigma(Z_1 - r_1) \cdot dM = 0.$$

Sind nun x_0, y_0, z_0 die, auf dieselben im Körper festen Axen bezogenen Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes, und stellt M die Masse des Körpers vor, so hat man

$$\Sigma(x_1 \cdot dM) = M \cdot x_0, \quad \Sigma(y_1 \cdot dM) = M \cdot y_0 \text{ und } \Sigma(z_1 \cdot dM) = M \cdot z_0;$$

und substituirt man hier herein statt p_1, q_1, r_1 ihre Werthe (aus §. 98. Nr. 20.), so gehen die vorstehenden drei Gleichungen über, in

$$M[-(r^2+q^2)x_0 + (pq+\partial r)y_0 + (pr-\partial q)z_0] - \Sigma(X_1 \cdot dM) - u_1 = 0,$$
$$M[+(pq-\partial r)x_0 - (p^2+r^2)y_0 + (qr+\partial p)z_0] - \Sigma(Y_1 \cdot dM) - u_2 = 0,$$
$$M[+(pr+\partial q)x_0 + (qr-\partial p)y_0 - (p^2+q^2)z_0] - \Sigma(Z_1 \cdot dM) - u_3 = 0.$$

Ist daher der feste Punkt S der Schwer-Punkt des Körpers, so daß man $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ hat, so reduziren sich diese Gleichungen auf

$$\Sigma(X_1 \cdot dM) + u_1 = 0, \quad \Sigma(Y_1 \cdot dM) + u_2 = 0, \quad \Sigma(Z_1 \cdot dM) + u_3 = 0;$$

und diese Gleichungen zeigen, daß, wenn S der Schwer-Punkt des Körpers ist, und gar keine beschleunigenden Kräfte wirken (so daß $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$ ist), dann der Punkt S gar keinen Druck erleidet, so daß die Bewegung um den Schwer-Punkt, wenn sie einmal begonnen hat, ungestört eben so fortdauert, ob derselbe absolut fest oder ganz frei ist. — Die Bewegung wird aber allemal, wenn der Körper ganz frei ist, um den Schwer-Punkt beginnen, so oft die gleichzeitig stoßenden Kräfte, welche den Körper aus der Ruhe in plötzliche Bewegung versetzen, keine Versammlungskraft haben, sondern in ein bloßes Gegen-Paar von Kräften sich vereinigen (nach §. 86.)

So sehen wir also auch den letzten der uns aus der ersten Abtheilung dieses Kapitels schon bekannten Punkte, durch die

bloße und direkte Anwendung des d'Alembert'schen Princips bestätigt.

§. 104.

Drehung eines Körpers um einen festen Punkt, wenn das Gewicht desselben noch beachtet wird, d. h. Theorie des physikalischen Centrifugal-Pendels, ohne Reibung und ohne Widerstand der Luft.

Betrachten wir jetzt unsre Aufgabe der Umdrehung eines Körpers um einen festen Punkt S unter der Voraussetzung, daß die Schwere g, oder das Gewicht $g \cdot dM$ der einzelnen Massen-Elemente dM als beschleunigende Kraft (d. h. stetig) noch hinzutritt.

Bei dieser Aufgabe nehmen wir die im Raume festen Axen so, daß SX, SY horizontal, SZ dagegen vertikal und mit der Richtung der Schwere zusammenfallend zu liegen kommen. Dann hat man, wenn die allgemeinen Formeln des (§. 99.) in Anwendung kommen sollen:

1) $X_1 = g\gamma;\quad Y_1 = g\gamma';\quad Z_1 = g\gamma'';$

ferner aber, wenn M die Masse des Körpers und x_0, y_0, z_0 die auf die im Körper festen Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 bezogenen Koordinaten-Werthe seines Schwer-Punktes darstellen,

2) $\Sigma(x_1 \cdot dM) = M \cdot x_0;\quad \Sigma(y_1 \cdot dM) = M \cdot y_0;$
$\Sigma(z_1 \cdot dM) = M \cdot z_0;$

folglich auch noch

$$3)\quad \begin{cases} R = (\gamma y_0 - \gamma' x_0) \cdot Mg, \\ Q = (\gamma'' x_0 - \gamma z_0) \cdot Mg, \\ P = (\gamma' z_0 - \gamma'' y_0) \cdot Mg, \end{cases}$$

wo Mg das Gewicht des Körpers, R, Q, P dagegen die Summen der statischen Momente der Gewichte aller Elemente dM (also auch des Gewichtes Mg des ganzen Körpers) in Bezug auf die Momenten-Axen SZ_1, SY_1, SX_1 vorstellen, während diese letztern Axen die im Körper festen Haupt-Dreh-Axen seyn sollen. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung (ℭ des §. 99.) gehen aber dadurch über in die nachstehenden:

$$(\mathfrak{C}_2) \ldots \begin{cases} \mathfrak{C}\cdot\partial r + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot pq = (\gamma y_0 - \gamma' x_0)\cdot Mg, \\ \mathfrak{B}\cdot\partial q + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\cdot rp = (\gamma'' x_0 - \gamma z_0)\cdot Mg, \\ \mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\cdot qr = (\gamma' z_0 - \gamma'' y_0)\cdot Mg. \end{cases}$$

Diese, in Verbindung mit den Gleichungen

4) $\gamma = \sin\psi\cdot\sin\theta$; $\gamma' = \cos\psi\cdot\sin\theta$ und $\gamma'' = \cos\theta$

und den Gleichungen (§. 98. X. ⊙) geben nun $\varphi, \psi, \theta, p, q, r$ als Funktionen der Zeit t.

Man hat bis jetzt die Integrationen dieser Gleichungen ($\mathfrak{C}_2$) nur in den besondern Fällen durchgeführt: 1) wenn der feste Punkt S der Schwer-Punkt ist, in welchem Falle man $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ hat, so daß die Gleichungen ($\mathfrak{C}_2$) in die Gleichungen ($\mathfrak{C}_1$ des §. 100.) übergehen, der hiesige Fall also von dem kurz vorher behandelten gar nicht oder doch nur dadurch verschieden ist, daß der feste Punkt S in jedem Augenblicke, außer den Drucken, die er vermöge der Bewegung des Körpers erleidet, noch das Gewicht des Körpers selbst zu tragen hat; 2) wenn der Schwer-Punkt des Körpers in eine der zu dem festen Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen fällt, und zu gleicher Zeit die zu den beiden andern Haupt-Dreh-Axen gehörigen Trägheits-Momente einander gleich sind, d. h. also, wenn der Körper ein Umdrehungs-Körper (durch Umdrehung irgend einer ebenen Figur um irgend eine in ihr liegende Gerade entstanden) ist, und der feste Punkt S in der Axe der Figur liegt, in welcher letzteren dann auch der Schwer-Punkt des Körpers liegen muß.

§. 105.

Bewegung eines schweren Umdrehungs-Körpers um einen festen Punkt in der Axe der Figur; d. h. besonderer physikalischer Centrifugal-Pendel, ohne Reibung und ohne Widerstand der Luft.

Betrachten wir diesen letztern Fall hier näher. Wir legen durch den festen Punkt S einen Querschnitt senkrecht auf die Axe der Figur, und nennen diesen den **Aequator** der Figur. Wir nehmen in diesem Aequator zwei ganz beliebige auf einander senkrechte Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, welche allemal Haupt-Dreh-Axen sind, und die dritte Haupt-Dreh-Axe SZ_1 fällt

dann mit der Axe der Figur zusammen. In dieser letzteren liegt dann auch der Schwer-Punkt des Körpers, in welchem das Gewicht Mg desselben wirksam ist. Man hat daher hier

1) $$x_0 = y_0 = 0;$$

auch nehmen wir die positive Seite der Axe SZ_1 so, daß z_0 positiv wird; außerdem lassen wir XSY horizontal seyn, und SZ in der Richtung der Schwere. Weil man aber bei der jetzigen Voraussetzung

2) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

hat, so gehen die Gleichungen $(\mathfrak{C}_2)$ nun über in

$$(\mathfrak{C}_3)\cdots \begin{cases} \mathfrak{C}\cdot\partial r = 0, \\ \mathfrak{A}\cdot\partial q + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})rp = -\gamma z_0\cdot Mg = -z_0 Mg\cdot \sin\psi\cdot\sin\theta, \\ \mathfrak{A}\cdot\partial p - (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})qr = \gamma' z_0\cdot Mg = z_0 Mg\cdot\cos\psi\cdot\sin\theta. \end{cases}$$

Die erstere dieser Gleichungen integrirt giebt

I. $$r = const = r',$$

wo wir unter r' die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit um SZ_1 verstehen. Dieses Integral läßt sehen, daß die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung parallel mit dem Aequator der Figur, konstant ist.

Um sich ein zweites Integral zu verschaffen, multiplicire man die drei Gleichungen $(\mathfrak{C}_2)$ bezüglich mit γ'', γ' und γ, und addire die Resultate. Da sich bei dem Addiren zur Rechten die mit Mgz_0 behafteten Glieder wegheben, so erhält man offenbar genau dasselbe, wie wenn $g = 0$ wäre, d. h. wie wenn die Schwere nicht wirkte, also das Integral (§. 101. VII.)

$$\mathfrak{A}p\gamma + \mathfrak{A}q\gamma' + \mathfrak{C}r\gamma'' = l'',$$

wo l'' eine noch unbestimmte Konstante ist, welche jedoch (wie in dem angeführten §. 101.) die Summe der statischen Momente aller zu Ende der Zeit t, oder zu Anfang, wo $t = 0$ ist, vorhandenen „Größen der Bewegung" um die (vertikale) Momenten-Axe SZ ausdrückt. —

Diese Gleichung läßt sich nun aber, vermöge der Gleichungen

3) $$\gamma = \sin\psi\cdot\sin\theta; \quad \gamma' = \cos\psi\cdot\sin\theta,$$

und weil $r = r'$ ist, auch so schreiben:

II. $$\mathfrak{A}\sin\theta\cdot(p\cdot\sin\psi + q\cdot\cos\psi) + \mathfrak{C}r'\cdot\cos\theta = l''.$$

Das dritte Integral erhält man, wenn die beiden letztern der Gleichungen ($\mathfrak{C}_2$) bezüglich mit q und p multiplicirt und addirt werden. Dies giebt nämlich zunächst

4) $\mathfrak{A}(p \cdot \partial p + q \cdot \partial q) = z_0 Mg \cdot \sin\theta \cdot (p \cdot \cos\psi - q \cdot \sin\psi)$.

Verbindet man aber damit die Gleichungen (§. 98. X. $\odot$), nämlich

$$(\odot) \cdots \left\{ \begin{array}{l} p = \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \partial\varphi - \cos\psi \cdot \partial\theta, \\ q = \cos\psi \cdot \sin\theta \cdot \partial\varphi + \sin\psi \cdot \partial\theta, \\ r = \cos\theta \cdot \partial\varphi - \partial \end{array} \right. ,$$

von denen die beiden erstern

5) $p \cdot \cos\psi - q \cdot \sin\psi = -\partial\theta$

geben, so erhält man (aus der 4.)

6) $\mathfrak{A}(p \cdot \partial p + q \cdot \partial q) = -z_0 Mg \cdot \sin\theta \cdot \partial\theta$;

und diese letztere giebt nun, wenn man sie integrirt,

III. $\mathfrak{A}(p^2 + q^2) = 2Mgz_0 \cdot \cos\theta + h$,

wo h eine aus den Anfangs-Werthen von p, q und θ noch zu bestimmende Konstante ist.

Die Gleichungen (II. u. III.) geben p und q in θ und ψ ausgedrückt. Man muß daher jetzt noch die Gleichungen ($\odot$) integriren, um ψ, θ und noch φ in t ausgedrückt, zu erhalten. Multiplicirt man aber die erstere der Gleichungen ($\odot$) mit $\sin\psi$, die andere mit $\cos\psi$ und addirt man die Resultate, so findet man:

7) $p \cdot \sin\psi + q \cdot \cos\psi = \sin\theta \cdot \partial\varphi$.

Quadrirt und addirt man aber dieselben Gleichungen, so ergiebt sich noch

8) $p^2 + q^2 = \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2$.

Dadurch verwandeln sich nun die Integrale (II. u. III.) in die folgenden:

9) $\mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta + \mathfrak{A} \cdot \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi = l''$,

10) $\mathfrak{A} \cdot (\sin\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2) = 2Mgz_0 \cdot \cos\theta + h$.

Dazu kommt noch die dritte der Gleichungen ($\odot$) nämlich

11) $\partial\psi = \cos\theta \cdot \partial\varphi - r'$.

Läßt man nun diese drei Gleichungen (9.—11.) an die Stelle der drei Gleichungen ($\odot$) treten, so findet sich bald t, φ und

ψ in θ ausgedrückt, aber mittelst elliptischer Transcendenten. Findet man nämlich aus der (9.) $\partial\varphi$, um den Werth dafür in die (10.) zu substituiren, so findet man zunächst

$$\partial\theta^2 = \frac{2Mgz_0 \cdot \cos\theta + h}{\mathfrak{A}} - \frac{(l'' - \mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta)^2}{\mathfrak{A}^2 \cdot \sin\theta^2},$$

woraus

$$\text{IV. } t = \int \frac{\mathfrak{A} \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\mathfrak{A} \cdot \sin\theta^2 (2Mgz_0 \cdot \cos\theta + h) - (l'' - \mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta)^2}}$$

hervorgeht. — Die Gleichung (9.) giebt $\partial\varphi$ oder $\partial\varphi_t$, folglich auch, weil $\partial\varphi_\theta = \partial\varphi_t \cdot \partial t_\theta$ ist, sogleich

$$\text{V. } \varphi = \int \frac{(l'' - \mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta) \cdot d\theta}{\sin\theta \cdot \sqrt{\mathfrak{A} \cdot \sin\theta^2 (2Mgz_0 \cdot \cos\theta + h) - (l'' - \mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta)^2}}.$$

Die Gleichung (11.) endlich giebt sogleich, wenn sie nach t integrirt wird,

$$\psi = -r't + \int (\cos\theta \cdot \partial\varphi_t) \cdot dt$$

oder, weil $\int u \cdot dt = \int (u \cdot \partial t_\theta) \cdot d\theta$ ist,

$$\text{VI.} \qquad \psi = -r't + \int (\cos\theta \cdot \partial\varphi_\theta) \cdot d\theta,$$

wo man zur Rechten statt $\partial\varphi_\theta$ nur noch seinen Werth (aus V.) substituiren muß, um auch ψ in t und θ zu haben.

Die Anfangs-Lage des Körpers, also der Anfangs-Werth θ' von θ, so wie die Anfangs-Lage der Knoten-Linie werden als gegeben vorausgesetzt. Die Anfangs-Werthe von φ und ψ kann man ganz beliebig, also auch der Null gleich annehmen, in so fern die Axen SX und SX_1 so gelegt werden können, daß sie mit der Anfangs-Lage der Knoten-Linie zusammenfallen. Dadurch bestimmen sich aber die drei Konstanten, welche die Integrale (IV. V. u. VI.) einführen.

Wegen der Bestimmung der übrigen Konstanten r', l'' und h muß man zu den Anfangs-Kräften sich wenden. Zu den Anfangs-Kräften gehört auch das Gewicht des Körpers, welches aber gegen jeden Stoß unendlich klein ist, daher zu Anfange außer Acht gelassen werden muß, so oft zu Anfang noch Stöße wirken. Man darf also nur das zu Anfange wirkende Gegen-Paar von Kräften (welches allemal gefunden wird, wenn

man nach §. 26. d. II. Th. verfährt, die Versammlungs-Kraft aber durch den festen Punkt S gehen läßt, damit sie daselbst vernichtet werde) herstellen. Ist nun sein Moment $= Q$, und macht seine Axe mit der bekannten Anfangs-Lage der drei im Körper festen Axen SX_1, SY_1, SZ_1 die bekannten Winkel λ', μ', ν', so ist es leicht, dieses Anfangs-Gegen-Paar mit den zu Anfange vorhandenen „Größen der Bewegungen", wenn letztere in entgegengesetzter Richtung genommen worden, (dem d'Alembert'schen Principe zufolge) in's Gleichgewicht zu stellen. Dies giebt (nach §. 98. Nr. 24.), wenn p', q', r' die Anfangs-Werthe von p, q, r sind, die drei Gleichungen

12) $Q \cdot \cos\lambda' = \mathfrak{A}p'$; $Q \cdot \cos\mu' = \mathfrak{B}q'$; $Q \cdot \cos\nu' = \mathfrak{C}r'$.

Aus diesen Gleichungen findet man nun p', q', r' ohne weiteres. Dann giebt aber die Gleichung (II.), in so fern wir $\psi' = 0$ angenommen haben, d. h. in so fern wir die Anfangs-Knoten-Linie zur Axe SX_1 genommen haben, für $t = 0$,

13) $\mathfrak{A} \cdot \sin\theta' \cdot q' + \mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta' = l''$, d. h.

14) $l'' = Q \cdot (\cos\mu' \cdot \sin\theta' + \cos\nu' \cdot \cos\theta')$,

so daß außer r' (aus 12.) auch l'' bestimmt ist. Die Gleichung (III.) endlich giebt für $t = 0$

15) $\mathfrak{A}(p'^2 + q'^2) = 2Mgz_0 \cdot \cos\theta' + h$,

woraus

16) $h = \frac{Q^2}{\mathfrak{A}} \cdot (\cos\lambda'^2 + \cos\mu'^2) - 2Mgz_0 \cdot \cos\theta'$

hervorgeht. So sind also alle durch die Integration eingehenden Konstanten völlig bestimmt.

Anmerk. 1. Dieses Problem enthält auch die Theorie des Kreisels in dem besondern Falle in sich, wo Reibung und Widerstand der Luft außer Acht gelassen werden, und wenn man auch noch voraussetzt, daß er sich bloß um seine unterste Spitze S ohne Reibung drehen, aber nicht zu gleicher Zeit mit dieser Spitze S sich fortbewegen kann.

Anmerk. 2. Denkt man sich die ganze Masse des Körpers in dem bloßen Schwer-Punkte G desselben concentrirt, so hat man ein einfaches („Centrifugal") Pendel, und die hiesigen Formeln müssen dann in die des (I. Th. §. 51. V.) über-

gehen, in so fern z_0 nun nichts anders ist, als die Länge des einfachen Pendels. Man findet aber unter dieser Voraussetzung

1) $\mathfrak{C} = 0$ und $\quad$ 2) $\mathfrak{A} = M \cdot z_0^2$,

und dadurch gehen die Gleichungen (9. 10.) über in

$$3) \begin{cases} Mz_0^2 \cdot \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi = l'', \\ Mz_0^2 \cdot (\sin\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2) = 2Mgz_0 \cdot \cos\theta + h; \end{cases}$$

und dieß sind in der That die Gleichungen, in welche die des (I. Th. §. 51. V.) umgeformt werden können. Hinsichtlich der Bestimmung der Konstanten wollen wir annehmen, daß dem Schwer-Punkte G zu Anfange eine zweifache Geschwindigkeit k und k', also eine zweifache „Größe der Bewegung" Mk und Mk' beigebracht worden sey, nämlich Mk in der Ebene ZSZ_1 senkrecht auf SZ_1 oder SG, und Mk' senkrecht auf diese Ebene. Unter dieser Voraussetzung wirken zwei Anfangs-Gegen-Paare gleichzeitig. Das eine hat zum Moment Mkz_0 und liegt in der Ebene ZSZ_1, so daß seine Axe mit SX_1, SY_1, SZ_1 (zu Anfange) die Winkel bezüglich 0 (oder 180°) und 90° und 90° macht. Das andere hat das Moment $Mk'z_0$ und liegt in der Ebene, welche die vorige in SZ_1 senkrecht schneidet; seine Axe macht daher mit SX_1, SY_1, SZ_1 bezüglich die Winkel 90°, 0° (oder 180°) und 90°. Weil sich nun die nach den Axen zerlegten Momente gerade so zusammensetzen, wie die Kräfte, so ist dasmal

$$Q \cdot \cos\lambda' = \pm Mkz_0 \cdot \cos 0 + Mk'z_0 \cdot \cos 90^0 = \pm Mkz_0,$$
$$Q \cdot \cos\mu' = Mkz_0 \cdot \cos 90^0 \pm Mk'z_0 \cdot \cos 0 = \pm Mk'z_0,$$
$$Q \cdot \cos\nu' = Mkz_0 \cdot \cos 90^0 + Mk'z_0 \cdot \cos 90^0 = 0 \text{ *)},$$

wo in $\pm Mkz_0$ das (+) oder (—) Zeichen gilt, je nachdem die Geschwindigkeit k in der Richtung SX_1 oder in der entgegengesetzten gedacht worden ist, während in $\pm Mk'z_0$ das (+)

*) Wir haben hier absichtlich die allgemeine Form der Darstellung gewählt, um das Verfahren im Allgemeinen durchblicken lassen zu können. Sonst war hier das eine Gegen-Paar Mk in der Ebene ZSZ_1, also auch in der Ebene Y_1SZ_1, während das andere Mk' in der Ebene X_1SZ_1 liegt. Folglich mußten Mk und Mk' bereits die Projektionen des aus beiden zusammen zu setzenden Anfangs-Gegen-Paares Q seyn auf die genannten Ebenen, und daher bezüglich mit $Q.\cos\lambda'$ und $Q \cdot \cos\mu'$ zusammenfallen.

oder (—) Zeichen gilt, je nachdem k' mit SY_1 einerlei oder entgegengesetzte Richtung hat. Wirft man diese Zeichen auf die Werthe von k, k' selbst, so daß man unter k, k' positive, auch negative Zahlen versteht, so kann man

4) $Q \cdot \cos\lambda' = Mkz_0$ und 5) $Q \cdot \cos\mu' = Mk'z_0$

nehmen. Die Gleichungen (§. 105. N.N. 14. u. 16.) geben nun

6) $l'' = Mk'z_0 \cdot \sin\theta'$ und 7) $h = M(k^2 + k'^2) - 2Mgz_0 \cdot \cos\theta'$,

so daß die Gleichungen (3.), wenn man die Werthe dieser Konstanten substituirt, übergehen in

$$8) \begin{cases} z_0 \cdot \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi = k' \cdot \sin\theta' \\ z_0^2 \cdot (\sin\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2) = k^2 + k'^2 + 2gz_0 \cdot (\cos\theta - \cos\theta'). \end{cases}$$

Die erstere dieser Gleichungen drückt aus (wenn man sie mit $\frac{1}{2}z_0 \cdot dt$ multiplicirt), daß die horizontale Projektion des Radius-Vektor SG in der Zeit dt einen konstanten Sektor beschreibt, daß daher der in der Zeit t beschriebene Sektor mit t selbst proportional ist. In der andern der Gleichungen (8.) ist der Ausdruck zur Linken das Quadrat der Geschwindigkeit von G zu Ende der Zeit t, während $k^2 + k'^2$ die Anfangs-Geschwindigkeit desselben ist, so daß, wenn man die erstere v, die andere $\mathfrak{v}$ nennt, diese Gleichung die Form annimmt

$$9) \qquad v^2 - \mathfrak{v}^2 = 2gz_0(\cos\theta - \cos\theta'),$$

wo z_0 die Länge des einfachen Pendels ist, während θ und θ' die Winkel vorstellen, welche die Länge z_0 oder SZ_1 mit der Vertikalen SZ macht, zu Ende der Zeit t und zu Anfange, wo $t = 0$ ist.

§. 106.

Betrachtung derselben Aufgabe des §. 105. in einem noch mehr besonderen Falle.

Setzen wir noch voraus, daß in der Aufgabe des (§. 105.) dem Körper zu Anfange bloß eine Winkel-Geschwindigkeit r' um die Axe SZ_1 beigebracht worden sey und daß außer dem Gewichte des Körpers keine weitere Kraft gewirkt habe, so hat man

1) $Q \cdot \cos\lambda' = 0$, $Q \cdot \cos\mu' = 0$ und $Q \cdot \cos\nu' = \mathfrak{C}r'$

und die Gleichungen (14. u. 16. des §. 105.) geben nun

2) $l'' = \mathfrak{C}r' \cdot \cos\theta'$ und 3) $h = -2Mgz_0 \cdot \cos\theta'$.

Die Gleichungen (9. u. 10. des §. 105.) geben nun

$$4) \begin{cases} \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi = -\frac{\mathfrak{C}r'}{\mathfrak{A}} \cdot (\cos\theta - \cos\theta') \\ \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2 = \frac{2Mgz_0}{\mathfrak{A}} \cdot (\cos\theta - \cos\theta'). \end{cases}$$

Eliminirt man aber $\partial\varphi$ aus diesen beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\text{I.}\quad \sin\theta^2 \cdot \partial\theta^2 = \frac{2g}{l} \cdot [\sin\theta^2 - 2\beta^2(\cos\theta - \cos\theta')] \cdot (\cos\theta - \cos\theta'),$$

wenn der Kürze wegen

$$5)\quad \frac{\mathfrak{A}}{Mz_0} = l \quad \text{und} \quad 6)\quad \frac{\mathfrak{C}^2 r'^2 l}{4\mathfrak{A}^2 g} = \beta^2$$

gesetzt wird, wo l und β^2 entschieden positiv sind*).

Die erstere der Gleichungen (4.) nimmt zu gleicher Zeit die Form an:

$$\text{II.}\quad \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi = -2\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} \times (\cos\theta - \cos\theta').$$

Dazu kommt wiederum die Gleichung (§. 105. Nr. 11.)

$$\text{III.}\quad \partial\psi = -r' + \cos\theta \cdot \partial\varphi;$$

und diese Gleichungen müssen nun φ, ψ und θ in t geben. — In den unten stehenden zwei besondern Fällen läßt sich diese Integration näherungsweise so durchführen, daß man endliche Ausdrücke erhält.

Die zweite der Gleichungen (4.) läßt aber sehen, daß $\cos\theta$

---

*) Denkt man sich $r' = 0$, so ist der Pendel ein gewöhnlicher physikalischer Pendel, dessen Schwer-Punkt in einer auf einer unbeweglichen Dreh-Axe senkrechten Ebene bleibt. Die Gleichung (I.) giebt aber für diesen Fall

$$\partial\theta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta')$$

oder

$$\partial t_\theta = \sqrt{\left(\frac{l}{2g}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta'}};$$

und diese Gleichungen lassen sehen, daß der in (5.) bestimmte Werth von l die Länge des einfachen Pendels ist, welches mit dem Massen-Pendel (wenn $r' = 0$ vorausgesetzt wird) gleichzeitige Schwingungen macht.

fortwährend grösser ist als $\cos\theta'$, daß daher θ selbst fortwährend kleiner ist als θ', es mag θ spitz oder stumpf seyn, d. h. der Schwer-Punkt mag sich zu Anfange unterhalb der durch S gehenden Horizontal-Ebene XSY befinden oder oberhalb.

A. Denken wir uns nun den Schwer-Punkt im Anfange nicht bloß unterhalb der Horizontal-Ebene XSY, sondern θ' so klein, daß man die vierten Potenzen von θ' und θ außer Acht lassen kann, so werden die Gleichungen (I. u. II.) jetzt so:

$$\text{I}_1. \quad \theta^2 \cdot \partial\theta^2 = \frac{g}{l} \cdot [(1+\beta^2)\theta^2 - \beta^2\theta'^2] \cdot (\theta'^2 - \theta^2)$$

und

$$\text{II}_1 \quad \theta^2 \cdot \partial\varphi = -\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} \times (\theta'^2 - \theta^2).$$

Da der Ausdruck zur Rechten in (I_1.) immer positiv werden muß, so ist allemal

$$(1+\beta^2)\theta^2 > \beta^2\theta'^2,$$

also

$$\theta > \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \theta',$$

so daß also θ immer zwischen θ' und $\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \theta'$ liegt.

Die Gleichung (I_1.) giebt aber nun sogleich

$$1) \quad \pm\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} \times \partial t_\theta = \frac{\theta}{\sqrt{[(1+\beta^2)\theta^2 - \beta^2\theta'^2] \cdot (\theta'^2 - \theta^2)}},$$

wo das (+) oder (—) Zeichen so genommen werden muß, daß ∂t_θ positiv oder negativ wird, je nachdem θ mit t zugleich wächst, oder θ abnimmt, während t wächst.

Führt man, um diese Funktion zu integriren, einen neuen Veränderlichen u dergestalt ein, daß

$$2) \quad \theta'^2 - \theta^2 = \theta'^2 u^2, \quad \text{also} \quad -\theta \cdot \partial\theta_u = \theta'^2 u$$

wird, so erhält man aus der (1.) sogleich, weil

$$\partial t_u = \partial t_\theta \cdot \partial\theta_u$$

ist,

$$3) \quad \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} \times t = \int \frac{du}{\sqrt{1-(1+\beta^2)u^2}},$$

und diese Gleichung integrirt, giebt

$$4)\quad \sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)}\times t = \pm\frac{1}{\sin}\, u\sqrt{1+\beta^2} + const.$$

Weil aber für $t = 0$, bereits $\theta = \theta'$ und $u = 0$ bekannt sind, und $\frac{1}{\sin}0 = a\pi$ ist, wo a irgend eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt, so geht dies Integral über in

$$5)\quad \sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)}\times t = a\pi \pm \frac{1}{\sin}\sqrt{\left(\frac{1+\beta^2}{\theta'^2}\cdot(\theta'^2-\theta^2)\right)}.$$

Der Werth von a ist nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 rc. (und nie negativ) für die Dauer der Oscillationen, in denen θ 1) von seinem größten Werthe θ' an bis zu seinem kleinsten Werthe $\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\theta'$ hin abnimmt, 2) dann wieder bis zu θ' hin wächst; 3) hernach wieder abnimmt, 4) dann wieder wächst; 5) hierauf wieder abnimmt, u. s. w. f.

Kehrt man dies Integral (5.) um, so erhält man

$$(\odot_1)\ldots\quad \theta^2 = \theta'^2 - \frac{\theta'^2}{1+\beta^2}\cdot\left(\sin t\sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)}\right)^2.$$

Sucht man die Zeit T welche nöthig ist, damit θ von seinem größten Werthe an bis zu seinem kleinsten hin alle Werthe durchlaufen habe, so findet sich

$$\sin\left(T\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)}\right) = \pm 1,\ \text{also}\ T\sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)} = a\pi + \tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich

$$6)\qquad T = (a\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\cdot\sqrt{\left(\frac{l}{g(1+\beta^2)}\right)},$$

wo $a = 0, 1, 2, 3, 4,$ rc. rc. ist, je nachdem θ zum ersten Male, oder zum zweiten Male, oder 3ten, 4ten, 5ten rc. Male seinen kleinsten Werth erreicht.

Sucht man die Zeit T', welche verfließt, bis θ von seinem größten Werth θ' an wiederum denselben größten Werth erreicht, so giebt die Gleichung $(\odot_1)$

$$\sin T'\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)} = 0,\ \text{also}\ T'\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{l}(1+\beta^2)\right)} = a\pi,$$

folglich

$$7) \qquad T' = a\pi\sqrt{\left(\frac{1}{g(1+\beta^2)}\right)},$$

wo statt a nach und nach 1, 2, 3, 2c. gesetzt werden muß, je nachdem das gedachte Ereigniß zum 1ten, 2ten, 3ten 2c. Male eintritt.

Vergleicht man beide Resultate (6. und 7.) für das erste Mal, so hat man

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{1}{g(1+\beta^2)}\right)} \text{ und } T' = \pi\sqrt{\left(\frac{1}{g(1+\beta^2)}\right)};$$

also ist T' gerade das Doppelte von T; folglich braucht der Pendel gerade so lang, um θ von seinem kleinsten Werthe wiederum zu seinem größten anwachsen zu lassen, als er gebraucht hat, um denselben Winkel θ von seinem größten Werthe an bis zu seinem kleinsten Werthe hin abnehmen zu sehen.

Hat man aber θ in t gefunden, so giebt die Gleichung (II_1) sogleich φ dazu; nämlich zunächst

$$\partial\varphi = \beta\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\cdot\left(1-\frac{1+\beta^2}{\beta^2+\left(\cos t\sqrt{\frac{g(1+\beta^2)}{l}}\right)^2}\right),$$

dann durch Integration

$$(\odot_2)\cdots \quad \varphi = \beta t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} - \frac{1}{tg}\,\frac{\beta\cdot tg\, t\sqrt{\left(\frac{g(1+\beta^2)}{l}\right)}}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich für die verschiedenen Werthe $T\left[=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{1}{g(1+\beta^2)}\right)}\right]$, 2T, 3T 2c. von t, die zugehörigen Werthe von φ bezüglich

$$-\tfrac{1}{2}\pi+\frac{\tfrac{1}{2}\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad -\pi+\frac{\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad -\tfrac{3}{2}\pi+\frac{\tfrac{3}{2}\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \text{ 2c.}$$

In den gleichen Zeit-Abständen T wächst also der Winkel φ (in entgegengesetztem Sinne, also rückläufig), immer um gleichviel, nämlich um

$$-\frac{\tfrac{1}{2}\pi}{(\beta+\sqrt{1+\beta^2})\cdot\sqrt{1+\beta^2}},$$

während jedoch die Bewegung der Knoten-Linie in der Horizontal-

Ebene XSY, wie die Formel ($\odot_2$) zur Genüge sehen läßt, nicht konstant ist, d. h. nicht in andern gleichen Zeittheilen gleiche Wege (im Bogen für den Radius 1 gezählt) durchläuft.

Die Gleichung (III.) endlich giebt, wenn man θ^2 vernachläßigt, augenblicklich

$$(\odot_3)\cdots \qquad \psi = \varphi - r't,$$

immer unter der Voraussetzung, daß SX und SX_1 mit der Anfangs-Knoten-Linie zusammenfallen, so daß für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ wird.

B. Betrachten wir jetzt einen andern Fall, nämlich den Fall, wo zwar θ' beliebig groß ist, aber θ immerfort von θ' sehr wenig verschieden bleibt, so daß wenn man

$$\theta' - \theta = u, \quad \text{also} \quad \partial\theta_u = -1$$

setzt, u zwar eine Funktion von t ist, deren 3te und höhere Potenzen aber außer Acht gelassen werden sollen. Dann hat man

$$\sin\theta^2 = \sin\theta'^2 - u\cdot\sin\theta' 2 + u^2\cdot\cos 2\theta',$$
$$\cos\theta - \cos\theta' = \qquad u\cdot\sin\theta' - \tfrac{1}{2}u^2\cdot\cos\theta',$$

und die Gleichung (I.) geht dadurch über in

$$\frac{1}{g}\cdot\partial u^2 = 2u\cdot\sin\theta' - u^2\cdot(\cos\theta' + 4\beta^2);$$

so daß sie giebt

$$t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} = \int\frac{du}{\sqrt{2u\cdot\sin\theta' - u^2\cdot(\cos\theta' + 4\beta^2)}}.$$

Integrirt man aber wirklich, so erhält man

$$t\sqrt{\left(\frac{g}{l}(\cos\theta' + 4\beta^2)\right)} = \frac{1}{\cos}\left(1 - \frac{u\cdot(\cos\theta' + 4\beta^2)}{\sin\theta'}\right);$$

folglich, wenn man diese Gleichung umkehrt,

$$(☾)\cdots \quad u = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + 4\beta^2}\cdot\left[1 - \cos t\sqrt{\left(\frac{g}{l}(\cos\theta' + 4\beta^2)\right)}\right].$$

Weil aber u immerfort sehr klein bleiben muß, so kann dieses Integral nur benutzt werden, wenn β sehr groß ist, d. h. wenn man dem Körper eine sehr große Winkel-Geschwindigkeit r' um die Axe SZ_1 seiner Figur beigebracht hat. Ist aber β so sehr groß, so kann man diese Formel für u noch einfacher

machen, dadurch daß man statt $\cos\theta' + 4\beta^2$ bloß $4\beta^2$ schreibt. Dieselbe wird dann

$$u = \frac{\sin\theta'}{4\beta^2}\left[1 - \cos 2\beta t \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right],$$

d. h.

$$(\mathfrak{C}_1)\cdots \quad u = \frac{1}{2\beta^2}\cdot\sin\theta\cdot\left[\sin\beta t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right]^2.$$

Die Gleichung (II.) giebt ferner zu diesem Werthe von u, wenn man $\theta' - u$ statt θ schreibt, vorausgesetzt, daß θ' nicht Null ist, und daß man die Quadrate von u außer Acht läßt

$$\partial\varphi = \frac{1}{\beta}\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\times\left[\sin\beta t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right]^2;$$

und diese Gleichung läßt, wenn man integrirt, finden:

$$(\mathfrak{C}_2)\cdots \quad \varphi = -\frac{1}{2\beta}t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} + \frac{1}{4\beta^2}\cdot\sin 2\beta t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}.$$

Zuletzt folgt aber noch aus der (III.)

$$(\mathfrak{C}_3) \qquad \psi = \varphi\cdot\cos\theta' - r't.$$

Die drei Integrale ($\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ u. $\mathfrak{C}_3$) lassen erkennen:

1) Hat der Körper eine sehr große Winkel-Geschwindigkeit um die Axe SZ_1 seiner Figur bekommen, so macht diese Axe mit der Vertikalen SZ nahehin immer einen und denselben Winkel.

2) Zu gleicher Zeit nimmt die Knoten-Linie nahehin eine gleichförmige Bewegung an. Wenn der Winkel θ' nicht Null ist, so ist φ, also die Bewegung der Knoten-Linie, von der Größe von θ' ganz unabhängig.

3) Die Ungleichheit u der Neigung θ des Aequators gegen den Horizont, und auch die Ungleichheit $\frac{1}{4\beta^2}\cdot\sin 2\beta t\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}$ in der Bewegung der Knoten-Linie, sind desto weniger merklich, je schneller die Umdrehung um die Axe der Figur, d. h. je größer r', also auch je größer *) β ist.

---

*) Bohnenberger hat eine Maschine angegeben, welche diese Er-

4) Ist $\theta' = 0$, so ist auch $\theta = 0$ und der Körper dreht sich fortwährend um seine vertikal stehende Axe der Figur mit konstanter Winkel-Geschwindigkeit.

---

scheinungen getreu darstellt. Die Winkel-Geschwindigkeit r' wird durch einen Faden hervorgebracht, welcher an einem Punkte des Aequators fest gegemacht und mehrere Male um den Aequator herum gewickelt ist, so daß sein plötzliches und schnelles Aufziehen (wie bei einem Tafel-Kreisel) die schnelle Drehung um die Axe der Figur hervorbringt.

Die Dynamik fester Körper.

Achtes Kapitel.

Beliebige freie Bewegung eines beliebigen freien Körpers. Von der Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Fläche oder Linie.

§. 107.

Betrachten wir jetzt eine ganz willkührliche Bewegung irgend eines Körpers. — Im Allgemeinen wird dieselbe in jedem andern Augenblicke eine andere seyn; aber wenn wir sie in irgend einem Augenblicke auffassen (zu Ende irgend einer Zeit t), so hat in diesem Augenblicke jedes Massen-Elementchen dM des Körpers eine bestimmte Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung, folglich eine bestimmte „Größe der Bewegung", die, wenn sie als Kraft auf dasselbe, ruhend gedachte Element wirkte, dem Elemente dieselbe Geschwindigkeit in derselben Richtung geben würde. — Alle diese „Größen der Bewegungen" als Kräfte angesehen, die auf die Elemente des, ruhend gedachten Körpers wirken, würden daher eine Bewegung hervorbringen, welche in ihrem Beginn genau mit der zu Ende der Zeit t in der Erscheinung aufgefaßten Bewegung eine und dieselbe ist, und dies sogar auch dann, wenn der Körper kein fester Körper wäre. Ist aber der Körper ein fester, so lassen sich alle diese unendlich vielen Kräfte (nach II. Th. §. 26.) allemal in eine einzige Kraft P verwandeln, — die durch einen beliebig gewählten (Versamm-

lungs=) Punkt geht, — und noch in ein zugehöriges Gegen=Paar von Kräften, welches seiner Lage, seiner Richtung und seinem Momente Q nach (dem II. Th. §. 26. oder §. 29. zufolge) bestimmt wird.

Wirkt daher diese Kraft (P) und dieses Gegen=Paar von Kräften (Q) auf den ruhend gedachten und festen Körper, so kommt er augenblicklich in dieselbe Bewegung, wie man sie so eben, zu Ende der Zeit t, an ihm wahrgenommen hat.

Jede mögliche Bewegung eines festen Körpers, kann man sich daher in jedem Augenblicke als eine eben beginnende Bewegung denken, welche einer stoßenden Kraft P und einem gleichzeitig stoßenden Gegen=Paare von Kräften Q ihre Entstehung verdankt.

§. 108.

Wirken, umgekehrt, auf einen ruhenden festen Körper beliebig viele Kräfte (Stöße) P_1, P_2, P_3,... P_n, so kann man dieselben (nach dem II. Th. §. 26. oder §. 29.) allemal in eine einzige Kraft P verwandeln, die man durch einen beliebig gewählten (Versammlungs=) Punkt gehen läßt, und in ein zugehöriges gleichzeitig stoßendes Gegen=Paar von Kräften, dessen Moment Q seyn mag, und dessen Lage und Richtung sich genau bestimmt. — In besonderen Fällen kann P fehlen, — in anderen Q. — Auch können sich die Stöße alle im Gleichgewichte halten, so daß sie gar keine Bewegung hervorbringen.

§. 109.

Untersuchen wir jetzt die Wirkung, welche eine Kraft P und ein zugehöriges Gegen=Paar Q' von Kräften, wenn sie auf einen (nach §. 107.) zu Ende irgend einer Zeit t als ruhend gedachten festen und freien Körper wirken, im ersten Augenblicke betrachtet, hervorbringen.

I. Geht die Kraft P nicht durch den Schwer=Punkt S des Körpers, so rücke man sie (nach Anleitung des II. Th. §. 23.) parallel mit sich fort, bis sie durch den Schwer=Punkt geht,

füge

füge aber noch das nöthige Gegen-Paar von Kräften hinzu, damit die Gesammt-Wirkung unverändert dieselbe bleibe. Dieses letztere Gegen-Paar und das Gegen-Paar Q' vereinigen sich dann (nach II. Th. §. 18.) in ein einziges Gegen-Paar, welches seinem Momente Q, und seiner Lage und Richtung nach genau bestimmt ist.

II. Wir können es also immer so einrichten, daß die Kraft P durch den Schwer-Punkt des Körpers hindurchgeht, und daß gleichzeitig mit ihr ein Gegen-Paar von Kräften wirkt, dessen Moment Q und dessen Ebene und Richtung bekannt oder gegeben sind. Ist dies namentlich hier vorausgesetzt, so wird sich Folgendes ereignen:

III. Die Kraft P, welche den Schwer-Punkt erfaßt, wird jedem Atom des Körpers in der Richtung der Kraft, oder parallel mit dieser Richtung, eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit v mittheilen, $= \frac{P}{M}$, wenn M die Masse des Körpers ist; und dieser Theil der Wirkung, wird die fortschreitende Bewegung des Körpers in diesem Augenblicke, genannt.

IV. Hernach denkt man sich durch den Schwer-Punkt S die zugehörigen drei Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 des Körpers gelegt (die nach §. 51. III. immer existiren und immer auf einander senkrecht stehen); und dann zerlegt man das Gegen-Paar Q in drei Gegen-Paare, deren Ebenen mit den Ebenen X_1SY_1, X_1SZ_1, Y_1SZ_1 bezüglich zusammenfallen, und welche bezüglich die positiven oder negativen Momente

$$Q \cdot \cos\nu, \quad Q \cdot \cos\mu \quad \text{und } Q \cdot \cos\lambda$$

haben werden, wenn λ, μ, ν die Winkel sind, welche die positive Axen-Seite des Gegen-Paares Q mit den Axen SX_1, SY_1, SZ_1 macht (nach II. Th. §. 18.).

Jedes dieser drei Gegen-Paare von Kräften bringt nun (nach §. 60. C.) eine freiwillige Drehung um die auf seiner Ebene senkrechte Haupt-Dreh-Axe SZ_1, SY_1, SX_1 hervor, und zwar mit den verschiedenen Winkel-Geschwindigkeiten

$$r = \frac{Q \cdot \cos\nu}{\mathfrak{C}}, \quad q = \frac{Q \cdot \cos\mu}{\mathfrak{B}} \quad \text{und } p = \frac{Q \cdot \cos\lambda}{\mathfrak{A}},$$

wenn 𝔈, 𝔅, 𝔄 die drei Haupt-Trägheits-Momente des Körpers in Bezug auf diese Haupt-Dreh-Axen vorstellen.

Diese drei Drehungen um die drei Haupt-Dreh-Axen vereinigen sich dann (nach §. 66.) in eine einzige Drehung um eine Dreh-Axe UU′, deren Winkel-Geschwindigkeit durch ω bezeichnet seyn soll, während die Winkel, welche die Dreh-Axe UU′ mit den Haupt-Dreh-Axen macht, durch α, β, γ bezeichnet seyn mögen.

Es findet sich aber (nach §. 66.)

$$1)\quad \omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2} = Q\cdot\sqrt{\mathfrak{A}^{-2}\cdot\cos\lambda^2+\mathfrak{B}^{-2}\cdot\cos\mu^2+\mathfrak{C}^{-2}\cdot\cos\nu^2},$$

$$2)\quad \cos\alpha = \frac{p}{\omega} = \frac{\mathfrak{A}^{-1}\cdot\cos\lambda}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2}\cdot\cos\lambda^2+\mathfrak{B}^{-2}\cdot\cos\mu^2+\mathfrak{C}^{-2}\cdot\cos\nu^2}},$$

$$3)\quad \cos\beta = \frac{q}{\omega} = \frac{\mathfrak{B}^{-1}\cdot\cos\mu}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2}\cdot\cos\lambda^2+\mathfrak{B}^{-2}\cdot\cos\mu^2+\mathfrak{C}^{-2}\cdot\cos\nu^2}},$$

$$4)\quad \cos\gamma = \frac{r}{\omega} = \frac{\mathfrak{C}^{-1}\cdot\cos\nu}{\sqrt{\mathfrak{A}^{-2}\cdot\cos\lambda^2+\mathfrak{B}^{-2}\cdot\cos\mu^2+\mathfrak{C}^{-2}\cdot\cos\nu^2}},$$

so daß die Lage der Dreh-Axe von der Größe Q des stoßenden Gegen-Paares ganz unabhängig ist.

V. Das Gegen-Paar von Kräften, dessen Moment Q ist, also jedes beliebige Gegen-Paar von Kräften, bringt demnach bloß eine Drehung um eine, durch den Schwer-Punkt gehende Dreh-Axe UU′ hervor, welche (in IV.) vollständig bestimmt ist. — Bei jeder Drehung um irgend eine Dreh-Axe UU′, welche durch ein solches Gegen-Paar hervorgebracht wird ist zu gleicher Zeit allemal

$$5)\qquad \omega = \frac{Q\cdot\cos\delta}{\Sigma(r^2\cdot dM)}$$

(nach §. 53. Anmerk.) wenn δ den Winkel bedeutet, welchen die Axe des stoßenden Gegen-Paares mit der Dreh-Axe macht, so daß $Q\cdot\cos\delta$ die Projektion des Momentes Q auf eine, auf die Dreh-Axe UU′ senkrechte Ebene vorstellt, — und wenn $\Sigma(r^2\cdot dM)$ das Trägheits-Moment des Körpers ist in Bezug auf diese Dreh-Axe UU′.

VI. Alle Kräfte, nämlich der Stoß P durch den Schwer-Punkt, und das zugehörige Gegen-Paar von Stößen, dessen

Moment Q ist, bringen daher die (in III.) berechnete fortschreitende und noch die gleichzeitige (in IV.) berechnete drehende Bewegung hervor. — Im ersten Augenblicke der Wirkung, also (nach dem §. 107.) zu Ende einer jeden Zeit 1 (bei jeder Bewegung), hat demnach jeder Atom zwei Geschwindigkeiten gleichzeitig, nämlich die fortschreitende v parallel mit der Richtung der Kraft P (oder mit letzterer Richtung zusammenfallend) und dann noch die Geschwindigkeit, welche ihm die drehende Bewegung (wie solche in IV. gefunden worden ist) beibringt, und welche = $r\omega$ seyn wird, wenn r seine Entfernung von der (durch den Schwer-Punkt gehenden) Dreh-Axe vorstellt. — Vereinigt man diese beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ in eine einzige (nach dem Kräften-Parallelogramm), so hat man die wahre Geschwindigkeit des Atoms in demselben Augenblicke, ihrer Größe und ihrer Richtung nach.

Anmerk. Aus dem vorstehenden (§. 109.) geht zugleich hervor, wie der Anfangs-Zustand eines Körpers bestimmt wird. Alle zu Anfange gleichzeitig stoßenden Kräfte denkt man sich parallel mit sich nach dem Schwer-Punkte S fortgerückt, und daselbst in eine einzige P vereinigt. Diese bestimmt Richtung und Größe der fortschreitenden Bewegung zu Anfange. — Die in Bezug auf den Schwer-Punkt genommenen statischen Momente derselben (zu Anfange gleichzeitig stoßenden) Kräfte sind dann die Momente der Gegen-Paare, welche in das eine Gegen-Paar Q vereinigt werden können, welche man aber einzeln sogleich nach den Ebenen X_1SY_1, X_1SZ_1, Y_1SZ_1 zerlegen kann, um durch Addition der Projektionen in jeder dieser Koordinaten-Ebenen sogleich die Momente $Q \cdot cos\,\nu$, $Q \cdot cos\,\mu$ und $Q \cdot cos\,\lambda$ zu erhalten (nach II. Th. §§. 18.—21.), von denen die Anfangs-Drehung abhängt.

§. 110.

Daraus ergeben sich aber sogleich noch folgende Wahrheiten: 1) Wirkt auf einen ruhenden festen Körper bloß ein Gegen-Paar von Stößen und keine weitere Kraft, so ist die Bewegung (in

ihrem Beginne) eine bloß drehende, um eine durch den Schwer-Punkt gehende (nach §. 109. IV.) zu berechnende Dreh-Axe, mit bestimmter und berechneter Winkel-Geschwindigkeit.

Diese Bewegung wird aber, auch wenn keine neuen Kräfte hinzutreten, nicht so bleiben, weil im Momente der Drehung Centrifugal-Kräfte entstehen, welche sich nur zuweilen ganz vernichten (S. §. 61.). Auch können im nächsten Augenblicke beschleunigende Kräfte hinzutreten. Vereinigt man aber im nächsten Augenblicke alle Centrifugal-Kräfte und alle neu hinzutretenden beschleunigenden Kräfte wiederum in eine durch den Schwer-Punkt gehende Versammlungs-Kraft $P' \cdot dt$, und in ein zugehöriges Gegen-Paar $Q' \cdot dt$, so wird die erstere die fortschreitende Bewegung des Schwer-Punktes und somit aller übrigen Atome des Körpers, wenn auch nur unendlich wenig ändern (im Allgemeinen der Richtung und Größe nach), während die andere die Drehung um den Schwer-Punkt (unendlich wenig) abändern wird, so daß im Allgemeinen eine neue augenblickliche Dreh-Axe und eine neue augenblickliche Winkel-Geschwindigkeit der Drehung entsteht.

So ändert sich also von Augenblick zu Augenblick die fortschreitende Bewegung des Schwer-Punkts und somit aller übrigen Atome des Körpers, — zugleich aber auch die drehende Bewegung um den Schwer-Punkt; — dergestalt daß die fortschreitende Bewegung des Schwer-Punktes seine einzige ist, die wahren Bewegungen aller übrigen Atome aber in jedem Augenblicke, wo man sie wissen will, zusammengesetzt werden müssen, aus der Geschwindigkeit, welche sie jedesmal gleich und parallel mit der Geschwindigkeit des Schwer-Punkts haben, und der andern Geschwindigkeit, mit welcher sie sich um die augenblickliche Dreh-Axe drehen.

2) Wirkt dagegen auf einen ruhenden festen und freien Körper bloß eine einzige Kraft P und sonst nichts, so muß man zwei Fälle unterscheiden:

a) Geht die Kraft P durch den Schwer-Punkt, so entsteht eine bloß fortschreitende Bewegung in der Richtung der Kraft P (und mit ihr parallel), welche die Geschwindigkeit $v = \frac{P}{M}$ hat, wenn M die Masse des Körpers vorstellt. — Diese Bewegung bleibt zu gleicher Zeit unverändert dieselbe, so lange keine neuen Kräfte hinzutreten, weil keine drehende Bewegung statt hat, daher Centrifugal-Kräfte nirgends entstehen können.

b) Geht aber die einzige wirkende Kraft P nicht durch den Schwer-Punkt des Körpers, so muß man sie (nach II.

Th. §. 23.) in eine andere P_0 (= P) verwandeln, welche durch den Schwer-Punkt geht; dann tritt aber auch allemal noch ein Gegen-Paar von Kräften hinzu, und es entsteht daher nun wieder die vorige fortschreitende Bewegung, aber eine drehende Bewegung zugleich. — Und wenn auch keine neuen Kräfte von außen hinzutreten, so sind doch jetzt wieder in jedem Augenblicke Centrifugal-Kräfte vorhanden, welche allein schon die drehende und die fortschreitende Bewegung von Augenblick zu Augenblick ändern werden.

3) Nach dem (§. 107.) in Verbindung mit dem (§. 109.) ist jede mögliche Bewegung eines festen Körpers, zu Ende einer jeden Zeit t, in diesem Augenblicke doch allemal eine fortschreitende in bestimmter Richtung und mit bestimmter Geschwindigkeit v und gleichzeitig eine drehende, um eine durch den Schwer-Punkt gehende bestimmte Dreh-Axe, und mit bestimmter Winkel-Geschwindigkeit ω; nur daß alle diese Dinge Funktionen der Zeit t seyn, d. h. in jedem andern Augenblicke anders seyn werden.

Da man aber jede Geschwindigkeit v der Größe und Richtung nach kennt, wenn man ihre drei Seiten-Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 bestimmt hat, parallel mit den Koordinaten-Axen, und da man jede Drehung um eine durch den Schwer-Punkt gehende Axe kennt, sobald man die drei Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r kennt, in welche sich jene (um die Koordinaten-Axen herum) zerlegt, so kommt alles darauf an, diese sechs Stücke v_1, v_2, v_3, p, q, r zu bestimmen.

Weil jedoch das d'Alembertsche Princip bei einem freien Körper sechs Gleichungen des Gleichgewichts zwischen den verlorenen Kräften, also sechs Gleichungen der Bewegung liefert, so werden diese im Allgemeinen die sechs Stücke v_1, v_2, v_3, p, q und r als Funktionen von t liefern und somit die Bewegung selbst zu Ende einer jeden Zeit t bestimmen können.

§. 111.

Das für jede Bewegung eines freien Körpers zu Ende einer jeden Zeit t aufgestellte Bild, wonach die Bewegung allemal als

eine mit gleicher Geschwindigkeit in parallelen Richtungen fortschreitende Bewegung aller Atome des Körpers, zu gleicher Zeit aber eine drehende Bewegung um den Schwer-Punkt ist, — ist aber nicht das einzige, durch welches man sich die verschiedenen Zustände der beliebigen Bewegung eines Körpers versinnlichen kann. Von nachstehenden zwei Vorstellungs-Arten leistet jede dasselbe.

1. Da nämlich jede Bewegung in jedem Augenblicke eine fortschreitende und eine drehende zugleich ist, und da man statt der fortschreitenden Bewegung ein Gegen-Paar von Drehungen setzen kann (nach §§. 68. 69.), so kann man jede mögliche Bewegung in jedem Augenblicke als eine aus drei drehenden Bewegungen zusammengesetzte sich denken, von denen zwei ein Gegen-Paar von Drehungen bilden*). Statt dieser Drehung und dem zugehörigen Gegen-Paare von Drehungen kann man aber wiederum eine andere Drehung setzen, um eine mit der erstern parallele Dreh-Axe mit derselben Winkel-Geschwindigkeit, — und einem zugehörigen Gegen-Paar von Drehungen, dessen Ebene auf der Dreh-Axe der erstern Drehung senkrecht steht (nach §. 75.), so daß (nach §. 69.) eine Fortbewegung der Dreh-Axe in ihrer Richtung statt findet. — Also kann man jede mögliche Bewegung eines Körpers in jedem Augenblicke sich auch so denken, als wenn die zu diesen Drehungen gehörige Central-Dreh-Axe (die nicht nothwendig durch den Schwer-Punkt geht) in ihrer eigenen Richtung sich fortbewegte, zu gleicher Zeit aber der Körper um diese Central-Dreh-Axe sich drehte; so daß jeder Punkt des Körpers um diese Central-Axe ein unendlich-kleines Stück eines Schrauben-Ganges beschreibt, von welchem die unendlich und unbeweglich gedachte Central-Axe die Spindel-Axe ist. — In jedem andern Augenblicke wird die Lage dieser

*) Jede Drehung nebst Gegen-Paar von Drehungen kann man (nach §. 70.) in zwei Drehungen, um Axen die nicht in einer und derselben Ebene liegen, verwandeln. Also kann man auch jede mögliche Bewegung in jedem Augenblicke als eine, aus zwei drehenden Bewegungen zusammengesetzte, ansehen.

Central=Axe eine andere seyn, so wie auch die Geschwindigkeit ihrer Fortbewegung in ihrer eigenen Richtung und die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung um selbige.

Zeigt sich in irgend einem Augenblicke die Geschwindigkeit der Central=Axe in ihrer eigenen Richtung der Null gleich, so beschreiben alle Punkte des Körpers unendlich=kleine Kreisbogen, statt der Schrauben=Linien, und diese Axe ist dann wieder eine freiwillige Dreh=Axe (axe spontané de rotation).

Im allgemeinen Fall ist dagegen diese Central=Dreh=Axe die gleitende freiwillige Dreh=Axe (axe spontané glissant), welche sich uns bereits (im §. 59. E.) gezeigt hat.

II. Ein anderes Bild für die Bewegung eines Körpers ist folgendes: Ist D irgend ein mit dem Körper fest verbundener Punkt, und denkt man sich durch D, mit der durch den Schwer=Punkt gehenden Dreh=Axe USU', von welcher er um q entfernt seyn mag, eine Parallele VDV' gelegt, so kann man statt der Drehung um USU' eine Drehung mit derselben Winkel=Geschwindigkeit ω um VDV' substituiren, sobald man nur noch ein Gegen=Paar von Drehungen hinzufügt, dessen Moment $q\omega$ ist (nach §. 70.). Weil aber dieses letztere Gegen=Paar von Drehungen einer Kraft gleich kommt, welche auf den Schwer=Punkt wirkt, — der Größe nach $= q\omega$ ist, der Richtung nach aber senkrecht auf der Ebene DUU', — so lassen sich diese beiden auf den Schwer=Punkt wirkenden Kräfte P und $q\omega$ in eine einzige P' vereinigen, welche der Größe und Richtung nach von P verschieden seyn wird.

Statt der in jedem Augenblicke vorhandenen fortschreitenden und gleichzeitig drehenden Bewegung um eine Axe, die durch den Schwer=Punkt geht, kann man daher allemal eine andere fortschreitende Bewegung des Schwer=Punktes und des ganzen Körpers finden (der Richtung und der Geschwindigkeit nach von der vorigen verschieden) in Verbindung mit einer drehenden Bewegung um eine Dreh=Axe, die durch einen beliebigen Punkt D hindurchgeht, aber mit der vorigen, durch den Schwer=Punkt des Körpers gehenden Dreh=Axe parallel läuft; während die

Drehung selbst auch jedesmal dieselbe Winkel-Geschwindigkeit ω behält, wie sie für denselben Augenblick bei der andern, durch den Schwer-Punkt gehenden Dreh-Axe gefunden worden ist.

Jede mögliche Bewegung kann man sich daher in jedem Augenblicke auch als eine fortschreitende denken (aller Atome des Körpers parallel mit sich) in Verbindung mit einer gleichzeitig drehenden Bewegung um einen beliebigen mit dem Körper fest gedachten Punkt D. Fällt aber der beliebig gewählte Punkt D, um welchen man sich die Drehung denkt, nicht mit dem Schwer-Punkte S zusammen, so hat der Schwer-Punkt in jedem Augenblicke eine doppelte Bewegung, einmal die fortschreitende und dann noch die drehende um die, nicht durch ihn hindurchgehende Axe. Setzt man diese beiden, der Richtung und der Größe nach (im Allgemeinen) verschiedenen Geschwindigkeiten des Schwer-Punkts in eine einzige Geschwindigkeit (mittelst des Kräften-Parallelogramms) zusammen, so hat man die wahre Bewegung des Schwer-Punktes. — Läßt man aber D mit S zusammenfallen, d. h. denkt man sich die Dreh-Axe fortwährend durch den Schwer-Punkt gehend, so ist die unter dieser Voraussetzung erhaltene fortschreitende Bewegung des Schwer-Punktes zu gleicher Zeit seine wahre Bewegung, weil er nun keine drehende Bewegung mehr hat.

Ist in irgend einem Augenblicke die fortschreitende Bewegung des Körpers senkrecht auf der, durch den Schwer-Punkt gehenden Dreh-Axe der gleichzeitigen drehenden Bewegung, und setzt man dann statt der fortschreitenden Bewegung (nach §. 69.) das ihr gleichgeltende Gegen-Paar von Drehungen, so kann man (nach §§. 66. 73.) diese drei Drehungen in eine einzige verwandeln. — In diesem Falle kann man also die fortschreitende Bewegung nebst der gleichzeitig drehenden um eine durch den Schwer-Punkt gehende Axe, als eine bloß drehende Bewegung, aber um eine mit der erstern parallele Dreh-Axe (die nicht durch den Schwer-Punkt geht) ansehen, welche Drehung dieselbe Winkel-Geschwindigkeit hat. — Und so sieht man auch auf diesem Wege die freiwillige Dreh-Axe (axe spontané

de rotation) wieder gefunden, wenn in einem Augenblicke der Bewegung eine solche existirt.

Anmerk. Der Anfänger wird nicht übersehen, daß die Bewegung des Körpers immer eine und dieselbe ist, und daß die verschiedenen Bilder, die wir bis jetzt von derselben, wie sie in irgend einem Augenblicke gefunden wird, gegeben haben, nur dazu dienen, solche auf mannigfache Weise zu versinnlichen. In den nun folgenden Rechnungen ist es bequem, die wahre Bewegung des Schwer-Punktes als die fortschreitende anzusehen und die Drehung sich so zu denken, als wenn sie um den als fest und unbeweglich gedachten Schwer-Punkt statt fände.

§. 112.

A. Um nun nach dem d'Alembertschen Principe die Gleichungen der Bewegung eines beliebigen freien Körpers hinzustellen, denke man sich durch einen beliebigen Punkt O im absoluten Raume, drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX', OY', OZ', welche im absoluten Raume fest gedacht werden. Auf diese Koordinaten-Axen bezogen, seyen x_0, y_0, z_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes S des Körpers zu irgend einer Zeit t, also Funktionen von t; während x', y', z' die auf dieselben Axen bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Massen-Elementes dM des Körpers vorstellen, und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten-Werthe desselben Elementes sind, aber auf die zu dem Schwer-Punkte S gehörigen drei Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 des Körpers bezogen. Legt man nun durch S noch die Koordinaten-Axen SX, SY, SZ parallel mit OX', OY', OZ', und nennt man x, y, z die auf die Axen SX, SY, SZ bezogenen Koordinaten-Werthe desselben Elementes, so finden zwischen den Koordinaten-Axen SX, SY, SZ und SX_1, SY_1, SZ_1 alle Beziehungen gerade eben so statt, wie wenn S unbeweglich und SX, SY, SZ die im Raume festen Axen wären. Außerdem hat man aber

1) $x' = x_0 + x$, $y' = y_0 + y$ und $z' = z_0 + z$,

also auch, wenn man nach t differenziirt

$\partial x' = \partial x_0 + \partial x$; $\partial y' = \partial y_0 + \partial y$ und $\partial z' = \partial z_0 + \partial z$, während zwischen x, y, z und x_1, y_1, z_1 alle Beziehungen und Formeln statt finden, welche im (§. 98.) zu finden sind, wenn nur wieder die Kosinus der Winkel, welche die im Raume festen Axen mit den Haupt-Dreh-Axen machen durch dieselben Buchstaben bezeichnet werden. Sind nun X·dM, Y·dM, Z·dM die, parallel mit den Axen SX, SY, SZ (zu Ende jeder Zeit t) neu hinzutretenden beschleunigenden Kräfte, so sind

$$(X - \partial^2 x')\cdot dM, \quad (Y - \partial^2 y')\cdot dM, \quad (Z - \partial^2 z')\cdot dM,$$

die bezüglich mit den Axen OX', OY', OZ' oder SX, SY, SZ parallel gedachten verlorenen Kräfte, welche sich nach dem d'Alembertschen Princip am festen und freien Körper im Gleichgewicht halten müssen. Dies giebt sechs Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich: die Summe der nach den drei Axen zerlegten Kräfte einzeln = 0, d. h.

$$\text{I.} \quad \Sigma(X - \partial^2 x')\cdot dM = 0; \quad \Sigma(Y - \partial^2 y')\cdot dM = 0;$$

und

$$\Sigma(Z - \partial^2 z')\cdot dM = 0;$$

und dann noch die Summe der auf drei Koordinaten-Ebenen projicirten statischen Momente derselben verlorenen Kräfte der Null gleich, welche letztere Gleichungen wir nachher (in B.) hinstellen wollen.

Betrachten wir einstweilen die drei Gleichungen (I.) und leiten wir aus ihnen die Bewegung des Schwer-Punktes ab. Es ist nämlich nach der Theorie vom Schwer-Punkte

$$1) \quad \Sigma(x'\cdot dM) = M\cdot x_0; \quad \Sigma(y'\cdot dM) = M\cdot y_0$$

und

$$\Sigma(z'\cdot dM) = M\cdot z_0.$$

Differenzirt man nun diese Gleichungen (nach t), so ergiebt sich

$$2) \quad \Sigma(\partial x'\cdot dM) = M\cdot\partial x_0; \quad \Sigma(\partial y'\cdot dM) = M\cdot\partial y_0;$$

$$\Sigma(\partial z'\cdot dM) = M\cdot\partial z_0,$$

wo ∂x_0, ∂y_0, ∂z_0 die mit OX', OY', OZ' parallelen Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punkts vorstellen, aus denen, wenn man sie kennt, seine wahre Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\partial x_0^2 + \partial y_0^2 + \partial z_0^2}$$

sogleich gefolgert werden kann, ihrer Größe und Richtung nach.

— Differenziirt man aber die Gleichungen (2.) noch einmal, so erhält man noch

3) $\Sigma(\partial^2 x' \cdot dM) = M \cdot \partial^2 x_0$; $\Sigma(\partial^2 y' \cdot dM) = M \partial^2 y_0$;

und $\Sigma(\partial^2 z' \cdot dM) = M \cdot \partial^2 z_0$.

Substituirt man aber diese Werthe in die Gleichungen (I.), so gehen solche über in

4) $M \cdot \partial^2 x_0 = \Sigma(X \cdot dM)$; $M \cdot \partial^2 y_0 = \Sigma(Y \cdot dM)$;

und $M \cdot \partial^2 z_0 = \Sigma(Z \cdot dM)$.

Diese Gleichungen (4.), welche die Bewegung des Schwer-Punktes ausdrücken, lassen sehen,

„daß sich der Schwer-Punkt genau eben so bewegt, wie wenn „die ganze Masse M des Körpers in ihm concentrirt wäre, „und alle stetig wirkenden (d. h. beschleunigenden) Kräfte „parallel mit sich nach demselben fortgerückt wären und ihn „allein angriffen."

B. Ist aber die Bewegung des Schwer-Punkts erkannt, so gehen wir zu den andern drei Gleichungen, welche das d'Alembertsche Princip zu liefern hat. Weil jedoch bei diesen letztern, wo die Summe der Projektionen der statischen Momente aller verlorenen Kräfte auf jede von drei Koordinaten-Ebenen der Null gleich gesetzt werden muß, — es ganz gleichgültig ist, welche Koordinaten-Ebenen man zu Grunde legt, so nehmen wir hier wieder (wie im §. 99.) die drei von den Haupt-Dreh-Axen im Körper gebildeten Koordinaten-Ebenen, und bekommen daher wiederum die Gleichungen der (§§. 98. 99.), welche hier ganz unverändert statt finden (namentlich die Gleichungen ☾ §. 99. und §. 98. X. ⊙, woraus p, q, r, φ, ψ, θ in t bestimmt werden müssen, und wodurch die Lage der augenblicklichen Dreh-Axe, die augenblickliche Winkel-Geschwindigkeit, und die Lage der drei zu dem Schwer-Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen des Körpers gegen die im Raume festen Koordinaten-Axen zu jeder Zeit t, gegeben ist.)

Daraus folgt aber:

„daß die Drehung um den Schwer-Punkt, während der letztere sich bewegt, genau mittelst derselben Gleichungen berech-

„net und bestimmt wird, wie wenn derselbe unbeweglich ge„dacht würde*).

Die sechs Gleichungen, welche für diese letztere Bewegung statt finden, sind namentlich (nach §§. 98. 99.)

$$(\odot)\cdots\begin{cases} p = \sin\psi\cdot\sin\theta\cdot\partial\varphi - \cos\psi\cdot\partial\theta, \\ q = \cos\psi\cdot\sin\theta\cdot\partial\varphi + \sin\psi\cdot\partial\theta, \\ r = \cos\theta\cdot\partial\varphi - \partial\psi. \end{cases}$$

und

$$(☾)\cdots\begin{cases} \mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\cdot qr = \Sigma(z_1 Y_1 - y_1 Z_1)\cdot dM, \\ \mathfrak{B}\cdot\partial q + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\cdot rp = \Sigma(x_1 Z_1 - z_1 X_1)\cdot dM, \\ \mathfrak{C}\cdot\partial r + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot pq = \Sigma(y_1 X_1 - x_1 Y_1)\cdot dM; \end{cases}$$

während X_1, Y_1 und Z_1 mittelst der Gleichungen

$$\text{II.}\quad\begin{cases} X_1 = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ Y_1 = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ Z_1 = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{cases}$$

zusammenhängen, und die neun Kosinusse α, β, γ, α', β', γ' und α'', β'', γ'' in φ, ψ, θ mittelst der neun Gleichungen (§. 98. Nr. 28.) ausgedrückt sind. — Die letztern neun Gleichungen und die 12 Gleichungen (I. II $\odot$ u. ☾) lösen also das Problem der freien Bewegung eines festen Körpers ganz und vollständig, wenn es nur gelingt, die Integrationen und somit die

---

*) Man konnte diese Resultate a priori wissen. Zu Ende einer jeden Zeit t befindet sich der Schwer-Punkt irgend wo und dabei dreht sich der Körper um den Schwer-Punkt irgend wie. Die an die einzelnen Elemente dM hinzutretenden beschleunigenden Kräfte lassen sich nun in eine Versammlungs-Kraft vereinigen, welche durch den Schwer-Punkt geht, und in ein zugehöriges Gegen-Paar, dessen Momente durch die statischen Momente der Kräfte in Bezug auf den Schwer-Punkt repräsentirt werden. Die Bewegung des Schwer-Punktes hängt also bloß von den parallel mit sich selbst nach ihm hin fortgerückten beschleunigenden Kräften ab, was in (A.) behauptet worden ist. — Ist nun v die Geschwindigkeit des Schwer-Punktes, so denke man sich die Kraft Mv dieser Geschwindigkeit genau entgegen im Schwer-Punkte angebracht, und die fortschreitende Bewegung aller Atome ist vernichtet, und es bleibt bloß noch die drehende Bewegung um den nun ruhenden Schwer-Punkt. Weil aber die durch den Schwer-Punkt gehende Kraft Mv das statische Moment Null hat, in Bezug auf den Schwer-Punkt als Centrum der Momente, so hängt die drehende Bewegung nur ab von den statischen Momenten der beschleunigenden Kräfte, wie im (§. 99.), und von dem Anfangs-Zustande.

Auflösungen der Gleichungen nach allen Unbekannten, durchzusetzen. Im Allgemeinen kann dies letztere immer nur näherungsweise geschehen, einige wenige Fälle ausgenommen.

Anmerk. Es ist dabei klar, daß nur in seltenern Fällen die Gleichungen (I.) für sich und unabhängig von den Gleichungen der Drehung, und auch letztere wieder unabhängig von den erstern, integrirt werden können, weil einerseits die beschleunigenden Kräfte X, Y, Z von der Lage des Körpers gegen die festen Axen abhängen, weil also X, Y, Z Funktionen von φ, ψ, θ, ja, selbst Funktionen von p, q, r seyn können, während auf der andern Seite dieselben X, Y, Z, also auch X_1, Y_1 und Z_1 oftmals auch Funktionen von x_0, y_0 und z_0 seyn, d. h. von der Lage des Schwer-Punktes im absoluten Raume abhängen werden.

§. 113.

In nachstehenden zwei Fällen bleiben die Gleichungen der fortschreitenden Bewegung und die der drehenden um den Schwer-Punkt, von einander ganz unabhängig.

I. Der erstere dieser beiden Fälle ist der, wo bloß das Gewicht des Körpers allein wirkt. Der Schwer-Punkt des Körpers bewegt sich dann so, wie wenn er ein ganz isolirter schwerer Punkt wäre und völlig unabhängig von den Drehungen; und die Drehungen finden eben so statt, wie sie in den (§§. 100. bis 102.) für den Fall, daß gar keine Kräfte wirken, entwikkelt stehen, weil die Kraft, nämlich das Gewicht des Körpers, welches jetzt wirklich wirkt, durch den als fest gedachten Schwer-Punkt geht; — oder, mit andern Worten, weil die statischen Momente der jetzt wirkenden Kräfte, welche in die Gleichungen der Drehung eingehen, jetzt der Null gleich sind, in so fern die beschleunigende Kraft durch das Centrum der Momente hindurchgeht.

Als Beispiel betrachten wir ein Ellipsoid, welches, wenn SX_1, SY_1, SZ_1 seine drei Haupt-Durchmesser (der Richtung nach) anzeigen, in der Ebene X_1SY_1 einen Stoß erhält, dessen Größe durch MV ausgedrückt ist, wo M die Masse des homogenen, oder doch aus homogenen concentrischen

Schichten bestehenden Ellipsoids vorstellt. Außerdem wirkt das Gewicht des Ellipsoids. Denkt man sich den Stoß MV parallel mit sich nach dem Schwer-Punkte S hin fortgerückt, so hat man die Anfangs-Geschwindigkeit $\frac{MV}{M}$ d. h. V des Schwer-Punktes ihrer Größe und Richtung nach, und somit die ganze Bewegung des Schwer-Punktes, dessen Bahn im Allgemeinen eine Parabel seyn wird. Das Moment MVf des noch hinzutretenden Gegen-Paares (wenn f die Entfernung des Schwer-Punkts von der Richtung des Stoßes MV ist) bringt dann eine Anfangs-Drehung um SZ_1 mit der Winkel-Geschwindigkeit ω hervor, welche gegeben ist durch die Gleichung

$$\omega = \frac{MVf}{\mathfrak{C}},$$

wenn $\mathfrak{C}$ das Trägheits-Moment des Ellipsoids vorstellt, welches zu der Dreh-Axe SZ_1 gehört, und welches im (§. 42.) berechnet steht. Während also der Schwer-Punkt d. h. der Mittel-Punkt des Ellipsoids seine Parabel durchläuft, dreht sich solches fortwährend um die, parallel mit sich bleibende Axe SZ_1 mit der konstanten Winkel-Geschwindigkeit ω.

II. Ist der Körper eine homogene oder aus homogenen concentrischen Schichten bestehende Kugel (so daß ihr Mittel-Punkt zu gleicher Zeit auch ihr Schwer-Punkt ist), deren Atome alle von den Atomen anderer ruhender oder sich bewegender Körper im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung angezogen oder abgestoßen werden, so ist (nach II. Th. §. 66.) die Gesammtwirkung aller dieser Kräfte gerade so, wie wenn die Gesammtmasse der Kugel in ihrem Mittel-Punkte concentrirt wäre, — weil die Anziehung oder Abstoßung eines der Kugel fremden Atoms auf die Kugel, genau gleich und entgegen ist der Anziehung oder Abstoßung der Kugel auf den Atom. Also wird auch in diesem Falle der Schwer-Punkt genau sich so bewegen, wie wenn er ganz isolirt wäre und dabei die anziehenden oder abstoßenden Kräfte auf ihn allein (der die Masse M hat) wirkten, und die Drehung ist genau so, wie solche in den (§§. 100. — 102.) für den Fall entwickelt steht, wo gar keine Kräfte auf den Körper wirken*).

---

*) Wäre daher die Erde eine vollkommene Kugel, deren Schwer-Punkt in ihrem Mittel-Punkte ist, so würde sie sich fortwährend um einen genau parallel mit sich selbst bleibenden Durchmesser (als Axe) drehen, mit konstanter Winkel-Geschwindigkeit, während ihr Schwer-Punkt seine Ellipse

Anmerk. Wollte man die Bewegung eines frei geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel betrachten, so würde

---

um die Sonne beschriebe, und von den übrigen Planeten gerade so gestört würde, wie wenn er isolirt wäre, aber die Masse der Kugel zur Masse hätte.

Weil aber die Erde in ihren Polen eingedrückt ist, so ändert sich diese Bewegung der Erde in etwas ab. Erstens könnte man annehmen, daß die Drehung nicht um eine Haupt-Dreh-Axe, also nicht um die Axe der Figur begönne; dann würde aber diese Erd-Axe in der Erde selbst einen Kegel beschreiben und es würden sich dadurch die geographischen Breiten der Orte abändern; und weil bis jetzt keine solche Aenderungen beobachtet worden sind, so muß man annehmen, daß die Erde (jetzt wenigstens) genau um die Axe ihrer Figur sich dreht. — Für's zweite kann man sich eine mit der Erde concentrische Kugel denken, welche durch die Pole der Erde genau hindurchgeht. Diese Kugel wird eine Schicht von der Erde übrig lassen, welche rings um den Aequator herum eine durch die Größe der Abplattung bestimmte Dicke hat, nach den Polen zu aber immer dünner wird. Die Anziehungen der Sonne, des Mondes und der Planeten werden nun nur in so weit durch den Mittel-Punkt der Erde gehen, als sie den kugelförmigen Kern betreffen. Bei den Anziehungen, welche diese ungleich dicke äußere Schicht betreffen, wird es aber von der Stellung der Erd-Axe gegen die anziehenden Körper abhängen, ob die aus diesen Anziehungen hervorgehende mittlere Kraft durch den Mittel-Punkt der Erde gehe oder nicht, und dieser Theil der Anziehung wird also in der Regel nicht durch den Mittel-Punkt gehen. Dann kann man ihn aber parallel mit sich nach dem Mittel-Punkte der Erde fortrücken und noch ein Gegen-Paar von Kräften hinzutreten lassen, so daß die Wirkung nicht geändert wird. Dieses Gegen-Paar von Kräften tritt nun (als beschleunigende Kräfte) stetig hinzu, und deshalb finden nun die Resultate der (§§. 100.—102.) für die Drehung der Erde nicht mehr so genau statt, in so fern jene Resultate voraussetzen, daß gar keine beschleunigenden Kräfte hinzutreten. Die von dieser äußern Schicht der Erde (die im Verhältniß zu dem kugelförmigen Kern nur immer sehr klein ist) herrührenden kleinen Störungen in der Dreh-Bewegung der Erde sind aber diejenigen, welche man die Praecession der Aequinoxien und die Nutation der Erd-Axe nennt.

Vermöge der Praecession gehen die Nachtgleichen auf der Ekliptik von 1800 jährlich um 50″,36482 rückwärts. Auf der beweglichen Ekliptik (d. h. auf der wahren Ekliptik) wie sie wegen der Einwirkung der übrigen Planeten entsteht, beträgt diese rückwärtsgehende Bewegung etwas weniger, nämlich nur 50″,23427.

Die Nutation ist eine Oscillation der Erd-Axe. Letztere entfernt sich nämlich abwechselnd von der Axe der Ekliptik und kommt ihr wieder näher. Sie entsteht von der Anziehung des Mondes, hat eine periodische Dauer

man den Widerstand gegen die Oberfläche, und etwa auch die Reibung an der Oberfläche, parallel mit sich nach dem Schwer-Punkte fortrücken, um die Bewegung des Schwer-Punkts bestimmen zu können. Weil aber diese Kräfte von der Lage des Körpers gegen das widerstehende Mittel und von der Geschwindigkeit der Drehung abhängen können, weil endlich der Widerstand des Mittels von der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung abhängt, während derselbe, wenn er nicht in dem Schwer-Punkte des Körpers sich vereinigt, die Drehung ändert, so gehen in die Gleichungen, welche die Bewegung des Schwer-Punktes bestimmen, bereits Unbekannte ein, welche von den Gleichungen der Drehung abhängen, und umgekehrt. Daher können in diesem Falle die Gleichungen der einen oder der andern Art nicht unabhängig von einander integrirt werden.

§. 114.

---

von ungefähr 18 bis 19 Jahren, und beträgt 9″,40, indem die Masse des Mondes als der 75te Theil der Masse der Erde vorausgesetzt wird.

Sonne und Mond haben einen nur erst nach Jahrhunderten bemerkbaren Einfluß auf die Aenderung der Schiefe der Ekliptik. Die jährliche Verminderung dieser Schiefe, welche zu Anfange dieses Jahrhunderts 0″,45714 betrug, rührt von der Einwirkung der Planeten her, welche die Lage der Ebene der Erdbahn ändern.

Die Ursachen, welche alle diese Aenderungen hervorbringen, vermögen jedoch nicht die Lage der Erd-Axe in der Erde selbst und die Winkel-Geschwindigkeit der Umdrehung um ihre Axe zu ändern, wie eine dahin zielende Untersuchung lehrt. Daher ist, nicht bloß der Erfahrung, sondern auch der Attraktions-Theorie zu Folge, die Erd-Axe in der Erde fest, und die Winkel-Geschwindigkeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe konstant, d. h. der Stern-Tag immer ein und derselbe. Und deshalb ist auch der mittlere Sonnentag (gänzlich unmerkliche sekuläre Aenderungen nicht gerechnet) konstant, und beide sind als Zeit-Einheit zu gebrauchen.

Man vergleiche das Memoire von Poisson: Sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité in dem VII. Bd. der Mémoires de l'Académie des Sciences.

Außerdem empfehlen wir bei dieser Gelegenheit angelegentlich das Studium der Mécanique céleste des Laplace, und zum Anfange das, denselben Gegenstand behandelnde Lehrbuch des Pontécoulant. Endlich wird auch das Werk der M. Sommerville dem Anfänger als Einleitung in das Studium der Mechanik des Himmels nützlich werden können.

§. 114.

Sollte ein Körper gezwungen seyn auf einer gegebenen Fläche sich zu bewegen, so würden dieselben 21 Gleichungen, wie sie für die freie Bewegung (im §. 112.) festgestellt worden sind, auch zur Bestimmung dieser Bewegung dienen, sobald man am Ende einer jeden Zeit t zu den beschleunigenden Kräften noch den unbekannten Druck R·dt oder R hinzufügt, welchen der bewegte Körper in diesem Augenblicke, normal auf die gegebene Fläche in welcher er zu bleiben gezwungen ist, ausübt, — aber in entgegengesetzter Richtung genommen. Dieser senkrechte Gegendruck leistet nämlich dasselbe, was die Fläche; und man kann sich daher nun den Körper als ganz frei denken. — Dafür daß der Unbekannte R noch eingeht, bekommt man auch noch die Gleichung der gegebenen Fläche, also auch eine Gleichung mehr, so daß man immer so viel Gleichungen hat, als zur Bestimmung der Unbekannten nöthig sind.

Später mag als hieher gehöriges Beispiel, die Bewegung eines schweren Körpers auf einer gegebenen Ebene näher betrachtet werden.

Anmerk. Ganz ähnlich kann man selbst die Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Linie behandeln, indem man zwei normale und unbekannte Gegendrucke noch zu den beschleunigenden Kräften hinzufügt, den Körper als einen freien behandelt, zuletzt aber noch die beiden Gleichungen der gegebenen Linie hinzunimmt, um wieder eben so viele Gleichungen als Unbekannte zu haben.

Die Dynamik fester Körper.

Neuntes Kapitel.

Vom Stoße der festen Körper von beliebiger Gestalt.

§. 115.

Wir haben zwar bereits (in der 1sten Abtheil. des III. Kap.) von dem Stoße fester, sowohl unelastischer als elastischer Körper gesprochen, allein nur in einem sehr speciellen Falle, nämlich in dem Falle, wo die Schwer-Punkte der Körper hinter einander oder gegen einander in derselben geraden Linie sich bewegen und die sich stoßenden Körper Kugeln sind, deren Schwer-Punkte mit ihren Mittel-Punkten zusammenfallen. Das allgemeinere Problem übersieht man dagegen in nachstehenden Betrachtungen:

Die Lage und die übrigen Zustände eines bewegten festen Körpers sind zu jeder Zeit völlig bestimmt, wenn man zu dieser Zeit die Lage des Schwer-Punktes, seine mit den festen Axen im Raume parallelen drei Seiten-Geschwindigkeiten, die Winkel-Geschwindigkeiten der Drehungen um die drei zu dem Schwer-Punkte gehörigen Haupt-Dreh-Axen, endlich die Lage dieser letztern selbst gegen die im Raume festen Axen kennt. Stoßen sich nun zwei Körper an irgend Stellen ihrer Oberflächen, während die Schwer-Punkte derselben beliebige Richtungen und Geschwindigkeiten haben, so werden sich die genannten Stücke in beiden Körpern abändern, mit Ausnahme der Lage der Schwer-Punkte und der zugehörigen Haupt-Dreh-

Axen, weil, um letztere zu ändern, mehr Zeit erforderlich wäre, als zwischen Anfang und Ende des Stoßes verfließt; — oder mit andern Worten, weil in der unendlich-kleinen Zeit der Dauer des Stoßes, die Aenderungen in der Lage der Schwer-Punkte und ihrer Haupt-Dreh-Axen nur unendlich-klein seyn können.

Das Problem des Stoßes besteht also in Folgendem: Aus den bekannten Zuständen des Körpers **unmittelbar vor** dem Stoße, die geänderten Seiten-Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte und die geänderten Winkel-Geschwindigkeiten der Drehungen um die zu den Schwer-Punkten gehörigen Haupt-Dreh-Axen **unmittelbar nach** dem Stoße zu bestimmen*).

§. 116.

Man habe zwei Körper, deren Massen M und M′, deren Schwer-Punkte (Fig. 18.) durch S und S′ vorgestellt sind, und welche sich in einem Punkte K stoßen, während HKH′ die gemeinschaftliche Normale an beide Oberflächen in diesem Punkte vorstellt. Unmittelbar vor und nach dem Stoße sollen SX, SY, SZ, desgleichen S′X′, S′Y′, S′Z′ die Haupt-Dreh-Axen beider Körper vorstellen.

Sind nun im ersten Körper, dessen Masse M ist, auf diese Axen SX, SY, SZ bezogen, u, v, w die Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punkts S, und p, q, r die Winkel-Geschwindigkeiten der Umdrehung um diese Haupt-Dreh-Axen unmittelbar vor dem Stoße. Sind ferner x, y, z die auf dieselben Axen bezogenen Koordinaten-Werthe irgend eines Elementes dM des Körpers, so sind, weil jedes solche Elementchen außer der drehenden Bewegung auch die fortschreitende des Schwer-Punktes hat, **unmittelbar vor** dem Stoße die wahren Seiten-

*) Stellt man das Problem allgemeiner, so giebt die Rechnung, was wir so eben als sich von selbst verstehend vorausgesetzt haben, nämlich, daß sich während der unendlich kleinen Dauer des Stoßes die Lage der Schwer-Punkte und die Lage der dazu gehörigen Haupt-Dreh-Axen nur unendlich wenig, also in so fern diese Wirkung nur einmal statt hat, **nicht** sich ändern.

Geschwindigkeiten des Elementchens parallel mit SX, SY, SZ (nach §. 98. VI. 17.) bezüglich

1) $u + ry - qz$, $v + pz - rx$ und $w + qx - py$.

Bedeuten nun u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1 dasselbe unmittelbar nach dem Stoße, was u, v, w, p, q, r vor dem Stoße bedeuten sollen, so sind, weil die Koordinaten-Werthe des Elementchens dM unmittelbar nach dem Stoße nur um unendlich wenig von denen verschieden sind, wie solche unmittelbar vor dem Stoße waren,

2) $u_1 + r_1 y - q_1 z$, $v_1 + p_1 z - r_1 x$ und $w_1 + q_1 x - p_1 y$

die wahren Seiten-Geschwindigkeiten desselben Elementchens dM mit denselben Axen parallel, unmittelbar nach dem Stoße. Subtrahirt man nun letztere von ersteren, nachdem sie mit dM multiplicirt sind, so hat man die verlorenen Kräfte des Elementes dM, nämlich

3) $\begin{cases} [(u-u_1)+(r-r_1)y-(q-q_1)z]\cdot dM \text{ parallel mit SX,} \\ [(v-v_1)+(p-p_1)z-(r-r_1)x]\cdot dM \text{ parallel mit SY,} \\ [(w-w_1)+(q-q_1)x-(p-p_1)y]\cdot dM \text{ parallel mit SZ.} \end{cases}$

Sucht man ganz auf dieselbe Weise die während des Stoßes verlorenen Kräfte eines beliebigen Elementchens dM′ des andern Körpers auf, so kann man nun zwischen den verlorenen Kräften aller Elementchen in beiden Körpern zwölf Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts herstellen (nach dem d'Alembertschen Principe), wenn man nur nicht vergißt, den unbekannten Stoß N in K, den beide Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale HKH′ gegen einander ausüben, d. h. für jeden Körper die eben so große Gegenwirkung des andern in Rechnung zu bringen und jeden Körper für sich in's Gleichgewicht zu stellen, d. h. genau so zu verfahren, wie solches die (§§. 78. 79. des II. Th.) verlangen.

§. 117.

Sind nun a, b, c die Koordinaten-Werthe des Punktes K, an welchem der Stoß statt findet, und α, β, γ die Winkel, welche die Normale KH mit den Koordinaten-Axen SX, SY, SZ macht,

so sind $N \cdot \cos\alpha$, $N \cdot \cos\beta$, $N \cdot \cos\gamma$ die drei mit den Axen parallelen Kräfte, welche bei der Aufstellung des Gleichgewichts von M noch hinzutreten müssen. Die sechs Gleichungen des Gleichgewichts aller verlorenen Kräfte der Masse M, sind daher nun folgende:

$$1)\quad N \cdot \cos\alpha + \Sigma[u - u_1 + (r - r_1)y - (q - q_1)z] \cdot dM = 0;$$
$$2)\quad N \cdot \cos\beta + \Sigma[v - v_1 + (p - p_1)z - (r - r_1)x] \cdot dM = 0;$$
$$3)\quad N \cdot \cos\gamma + \Sigma[w - w_1 + (q - q_1)x - (p - p_1)y] \cdot dM = 0;$$
$$4)\quad N(b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta) + \Sigma[u - u_1 + (r - r_1)y - (q - q_1)z]y \cdot dM - \Sigma[v - v_1 + (p - p_1)z - (r - r_1)x]x \cdot dM = 0;$$
$$5)\quad N(a \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\alpha) + \Sigma[w - w_1 + (q - q_1)x - (p - p_1)y]x \cdot dM - \Sigma[u - u_1 + (r - r_1)y - (q - q_1)z]z \cdot dM = 0;$$
$$6)\quad N(c \cdot \cos\beta - b \cdot \cos\gamma) + \Sigma[v - v_1 + (p - p_1)z - (r - r_1)x]z \cdot dM - \Sigma[w - w_1 + (q - q_1)x - (p - p_1)y]y \cdot dM = 0;$$

wo sich die Σ auf alle Elemente der ganzen Masse dM beziehen, daher im Allgemeinen durch dreifache Integration gefunden werden müssen.

Diese Gleichungen vereinfachen sich dadurch bedeutend, daß S der Schwer-Punkt und SX, SY, SZ Haupt-Dreh-Axen sind; denn man hat deshalb

$$\Sigma(x \cdot dM) = 0, \quad \Sigma(y \cdot dM) = 0, \quad \Sigma(z \cdot dM) = 0$$

und $\Sigma(yz \cdot dM) = 0, \quad \Sigma(xz \cdot dM) = 0, \quad \Sigma(xy \cdot dM) = 0.$

Außerdem ist noch

$$\Sigma(dM) = M$$

und

$$\Sigma(y^2 + z^2) \cdot dM = \mathfrak{A}, \quad \Sigma(x^2 + z^2) \cdot dM = \mathfrak{B}, \quad \Sigma(x^2 + y^2) \cdot dM = \mathfrak{C};$$

wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei Haupt-Trägheits-Momente in Bezug auf die Axen SX, SY und SZ vorstellen. Die vorstehenden sechs Gleichungen des Gleichgewichts gehen dadurch über in die folgenden:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} N \cdot \cos\alpha + M(u - u_1) = 0, \\ N \cdot \cos\beta + M(v - v_1) = 0, \\ N \cdot \cos\gamma + M(w - w_1) = 0, \\ N(b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta) + \mathfrak{C}(r - r_1) = 0, \\ N(a \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\alpha) + \mathfrak{B}(q - q_1) = 0, \\ N(c \cdot \cos\beta - b \cdot \cos\gamma) + \mathfrak{A}(p - p_1) = 0. \end{cases}$$

Werden nun alle hier vorkommenden Größen in Bezug auf den zweiten Körper, dessen Masse M' ist, und in Bezug auf dessen Schwer-Punkt S' und den dazu gehörigen Haupt-Dreh-Axen, durch dieselben Buchstaben bezeichnet, aber mit oben zur Rechten angehängten Strichen, während jedoch N dasselbe bleibt, so hat man für das Gleichgewicht der verlorenen Kräfte an diesem andern Körper noch die nachstehenden sechs Gleichungen, nämlich:

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{l} N\cdot\cos\alpha' + M'(u' - u'_1) = 0, \\ N\cdot\cos\beta' + M'(v' - v'_1) = 0, \\ N\cdot\cos\gamma' + M'(w' - w'_1) = 0, \\ N(b'\cdot\cos\alpha' - a'\cdot\cos\beta') + \mathfrak{C}'(r' - r'_1) = 0, \\ N(a'\cdot\cos\gamma' - c'\cdot\cos\alpha') + \mathfrak{B}'(q' - q'_1) = 0, \\ N(c'\cdot\cos\beta' - b'\cdot\cos\gamma') + \mathfrak{A}'(p' - p'_1) = 0; \end{array}\right.$$

wo N denselben Werth hat, wie in den Gleichungen (I.). — In diesen zwölf Gleichungen kommen die dreizehn Unbekannten u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1, u'_1, v'_1, w'_1, p'_1, q'_1, r'_1 und N vor; und man muß sich daher noch nach einer Gleichung mehr umsehen, damit man eben so viele Gleichungen als Unbekannte habe.

§. 118.

Diese 13te Gleichung ist aber eine physikalische, d. h. sie hängt von der physischen Eigenschaft der Körper ab, welche sich stoßen, und namentlich davon, ob letztere ganz unelastisch, oder vollkommen elastisch, oder nur unvollkommen elastisch sind.

A. Sind nämlich die Körper ganz unelastisch, so werden sie sich an dem Punkte K so lange zusammendrücken, bis der Punkt K in dem einen, und derselbe in dem andern Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale gleiche Geschwindigkeiten haben; und dann ist der Stoß völlig beendigt.

Nun sind aber (nach §. 116. Nr. 2.) die Seiten-Geschwindigkeiten des im erstern Körper befindlichen Punktes K parallel mit SX, SY, SZ, unmittelbar nach dem Stoße, bezüglich

$$u_1 + r_1 b - q_1 c, \quad v_1 + p_1 c - r_1 a \quad \text{und} \quad w_1 + q_1 a - p_1 b;$$

und diese nach der Richtung der Normale zerlegt geben die Geschwindigkeit in dieser letztern Richtung,

$$= (u_1 + r_1 b - q_1 c)\cdot \cos\alpha + (v_1 + p_1 c - r_1 a)\cdot \cos\beta + (w_1 + q_1 a - p_1 b)\cdot \cos\gamma.$$

Die nach der Richtung der Normale zerlegte Geschwindigkeit des Punktes K im anderen Körper M', unmittelbar nach dem Stoße, ist aber gerade so ausgedrückt, nur daß die Buchstaben alle oben zur Rechten noch Striche bekommen. Die Gleichheit dieser beiden Geschwindigkeiten giebt dann, da sie beide nach derselben Richtung gedacht werden müssen, die folgende 13te Gleichung, nämlich:

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l}(u_1+r_1 b-q_1 c)\cdot\cos\alpha+(u'_1+r'_1 b'-q'_1 c')\cdot\cos\alpha' \\ +(v_1+p_1 c-r_1 a)\cdot\cos\beta+(v'_1+p'_1 c'-r'_1 a')\cdot\cos\beta' \\ +(w_1+q_1 a-p_1 b)\cdot\cos\gamma+(w'_1+q'_1 a'-p'_1 b')\cdot\cos\gamma'\end{array}\right\}=0.$$

Da nun diese dreizehn Gleichungen (I. II. III.) in Bezug auf die dreizehn Unbekannten, die sie enthalten, vom ersten Grade oder einfache Gleichungen sind, so geben sie in jedem Einzelfalle die Unbekannten selbst ohne Weiteres, und allemal auf eine einzige, immer mögliche und völlig bestimmte Weise.

Dies gilt also, wenn die Körper beide ganz unelastisch sind.

B. Sind aber die Körper elastisch, so besteht, wie wir bereits (in der 1sten Abtheilung des III. Kap.) gezeigt haben, der Stoß aus zwei Momenten, nämlich aus dem Moment wo beide Geschwindigkeiten des Punktes K in jedem der beiden Körper einander gleich werden, und dann aus dem Momente, in welchem die zusammengedrückten Körper vermöge ihrer Elasticität soweit auf einander zurückwirken, bis die Körper aus einander gehen.

In dem erstern dieser beiden Momente des Stoßes ist alles genau so wie vorher (in A.), wo wir unelastische Körper vorausgesetzt haben. Man bestimmt also die dreizehn Unbekannten N, u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1, u'_1, v'_1, w'_1, p'_1, q'_1, r'_1, wie solche unmittelbar nach beendigtem ersten Moment des Stoßes seyn werden.

In dem andern Momente des Stoßes, wo die Elasticität

zurückwirkt, erhalten diese Körper, einer durch den andern, einen zweiten Stoß, dem ersteren völlig gleich, wenn die Körper vollkommen elastische genannt werden; oder das εfache (wo $\varepsilon < 1$ ist) des erstern (so daß εN statt N zu stehen kommt), wenn die Elasticität nicht vollkommen ist. Nimmt man unvollkommene Elasticität an, und setzt man dann $\varepsilon = 1$, so hat man zu gleicher Zeit den Fall der vollkommenen Elasticität, während für $\varepsilon = 0$ der Fall (A.), in welchem die Körper gar nicht elastisch sind, wiederum hervorgehen muß.

Bezeichnet man nun dieselben Größen, welche unmittelbar vor dem zweiten Momente des Stoßes u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1 sind, so wie sie unmittelbar nach diesem zweiten Momente (also nach gänzlich beendigtem Stoße) seyn werden, bezüglich durch U, V, W, P, Q, R, so finden für den erstern Körper (nach §. 117.) die sechs Gleichungen statt, nämlich:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon N\cdot\cos\alpha + M(u_1 - U) = 0;\\
&\varepsilon N\cdot\cos\beta + M(v_1 - V) = 0;\\
&\varepsilon N\cdot\cos\gamma + M(w_1 - W) = 0;\\
&\varepsilon N\cdot(b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta) + \mathfrak{C}(r_1 - R) = 0;\\
&\varepsilon N\cdot(a\cdot\cos\gamma - c\cdot\cos\alpha) + \mathfrak{B}(q_1 - Q) = 0;\\
&\varepsilon N\cdot(c\cdot\cos\beta - b\cdot\cos\gamma) + \mathfrak{A}(p_1 - P) = 0.
\end{aligned}$$

Eliminirt man aber aus diesen sechs Gleichungen und den sechs Gleichungen (I. des §. 117.) die sechs Unbekannten u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1 (dadurch, daß man diese Gleichungen der Ordnung nach bezüglich zu einander addirt), so erhält man sogleich:

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{aligned}
&(1+\varepsilon)N\cdot\cos\alpha + M(u - U) = 0;\\
&(1+\varepsilon)N\cdot\cos\beta + M(v - V) = 0;\\
&(1+\varepsilon)N\cdot\cos\gamma + M(w - W) = 0;\\
&(1+\varepsilon)N\cdot(b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta) + \mathfrak{C}(r - R) = 0;\\
&(1+\varepsilon)N\cdot(a\cdot\cos\gamma - c\cdot\cos\alpha) + \mathfrak{B}(q - Q) = 0;\\
&(1+\varepsilon)N\cdot(c\cdot\cos\beta - b\cdot\cos\gamma) + \mathfrak{A}(p - P) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man nun in diese Gleichungen statt N den Werth, wie er aus den dreizehn Gleichungen des ersten Momentes des Stoßes hervorgegangen ist, so hat man sechs Gleichungen, aus

denen die sechs Unbekannten U, V, W, P, Q, R ohne Weiteres gefunden werden.

Für den andern Körper M' bekommt man nun ganz ähnliche Gleichungen (wie die IV.) in denen N denselben Werth hat. Diese neuen sechs Gleichungen sind nämlich:

$$\text{V.}\quad\left\{\begin{array}{l}(1+\varepsilon)N\cdot\cos\alpha'+M'(u'-U')=0;\\(1+\varepsilon)N\cdot\cos\beta'+M'(v'-V')=0;\\(1+\varepsilon)N\cdot\cos\gamma'+M'(w'-W')=0;\\(1+\varepsilon)N(b'\cdot\cos\alpha'-a'\cdot\cos\beta')+\mathfrak{C}'(r'-R')=0;\\(1+\varepsilon)N(a'\cdot\cos\gamma'-c'\cdot\cos\alpha')+\mathfrak{B}'(q'-Q')=0;\\(1+\varepsilon)N(c'\cdot\cos\beta'-b'\cdot\cos\gamma')+\mathfrak{A}'(p'-P')=0.\end{array}\right.$$

Aus diesen Gleichungen (V.) müssen nun U', V', W', P', Q', R' gefunden werden, wie solche unmittelbar nach gänzlich beendigtem Stoße seyn müssen.

Bei vollkommen elastischen Körpern ist übrigens $\varepsilon = 1$ zu nehmen, also 2 statt $1+\varepsilon$. Bei unvollkommen elastischen Körpern wird ε aus Versuchen und zwar in den einfachsten Fällen des Stoßes, wie solche in der ersten Abtheilung des dritten Kapitels betrachtet worden sind, ausgemittelt.

§. 119.

Der Werth von N kann die „Größe des Stoßes" genannt werden, während die Normale an die Oberfläche seine „Richtung" ist. Diese „Größe des Stoßes" ist als eine „Größe der Bewegung" anzusehen, welche eine Masse μ hat, wenn alle ihre Atome mit gleichen und parallelen Geschwindigkeiten v begabt sind, dergestalt aber daß

$$\mu v = N$$

ist. Man kann sich daher als Wirkung des Stoßes N auf die Masse M vorstellen, daß ein beliebiger Theil μ der Masse M, dessen Schwer-Punkt in der Normale KH liegt, mit der Geschwindigkeit v versehen worden sey, wenn nur μ und v so gedacht werden, daß man $\mu v = N$ hat.

§. 120.

I. Denkt man sich (Fig. 18.) durch den Punkt K eine ge-

meinschaftliche Tangential-Ebene, dann mit letzterer parallel durch den Schwer-Punkt S eine beliebige Gerade, welche mit den Axen SX, SY, SZ die Winkel λ, μ, ν machen mag, so hat man, weil letztere Gerade auf der Normale HKH' senkrecht steht

$$\cos\lambda \cdot \cos\alpha + \cos\mu \cdot \cos\beta + \cos\nu \cdot \cos\gamma = 0.$$

Multiplicirt man daher die erstern drei der Gleichungen (IV. des §. 118.) bezüglich mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ und addirt man die Resultate, so erhält man

$$(u - U) \cdot \cos\lambda + (v - V) \cdot \cos\mu + (w - W) \cdot \cos\nu = 0,$$

während in dieser Gleichung der Ausdruck zur Linken die, nach irgend einer Richtung parallel mit der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene an K, zerlegte Aenderung der Geschwindigkeit des Schwer-Punkts S ist.

Parallel mit der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene ist daher die Geschwindigkeit der Schwer-Punkte unmittelbar vor und nach dem Stoße allemal eine und dieselbe, die Körper mögen unelastisch oder beliebig elastisch seyn *). — Wenn man daher unmittelbar nach dem Stoße die mit der Normale HKH' parallelen Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte kennt, so kann man solche bezüglich mit der auf HKH' senkrechten verbinden (wie letztere unmittelbar vor dem Stoße gewesen ist) und man hat die wahren Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte unmittelbar nach dem Stoße.

II. Multiplicirt man dagegen die drei letztern der Gleichungen (IV. des §. 118.) bezüglich mit $\cos\gamma$, $\cos\beta$ und $\cos\alpha$, so giebt die Summe der Resultate die Gleichung

$$\mathfrak{C}(r - R) \cdot \cos\gamma + \mathfrak{B}(q - Q) \cdot \cos\beta + \mathfrak{A}(p - P) \cdot \cos\alpha = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{C}r \cdot \cos\gamma + \mathfrak{B}q \cdot \cos\beta + \mathfrak{A}p \cdot \cos\alpha = \mathfrak{C}R \cdot \cos\gamma + \mathfrak{B}Q \cdot \cos\beta + \mathfrak{A}P \cdot \cos\alpha.$$

Diese beiden gleichen Ausdrücke sind aber (nach §. 98. Nr.

*) Dies Resultat gehört zu denjenigen, die sich a priori einsehen lassen, so daß die Rechnung nur bestätigt, was ohne Rechnung längst erkannt worden war.

27.) die Summe der statischen Momente aller in dem Augenblicke vor und nach dem Stoße in M vorhandenen „Größen der Bewegung" in Bezug auf die Normale HKH' als Momenten-Axe genommen. — Also sind diese Summen der statischen Momente unmittelbar vor und nach dem Stoße, bei unelastischen oder beliebig elastischen Körpern, allemal einander gleich.

Dabei mag man nicht übersehen, daß bei elastischen Körpern, im Momente der größten Zusammendrückung, also unmittelbar ehe die Elasticität zu wirken beginnt, die Körper sich verhalten, wie wenn sie unelastisch wären, so daß also z. B. diese Summe der statischen Momente, auch im Moment der größten Zusammendrückung noch immer eine und dieselbe ist.

§. 121.

Betrachtung dieser Resultate in einigen besondern Fällen.

I. Setzen wir nun zunächst voraus, daß die Normale KH durch den Mittel-Punkt S der Masse M hindurchgehe. In diesem Falle hat man offenbar

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma},$$

und deshalb gehen jetzt die drei letztern der Gleichungen (IV. des §. 118.) über in

$$p = P, \qquad q = Q, \qquad r = R;$$

d. h. der Körper M hat dann unmittelbar nach wie unmittelbar vor dem Stoße dieselben Winkel-Geschwindigkeiten der Drehung um die drei Haupt-Dreh-Axen, also dieselbe augenblickliche Dreh-Axe und dieselbe Winkel-Geschwindigkeit der Drehung um selbige. Der Stoß hat also dasmal bloß Einfluß auf die fortschreitende Bewegung des Schwer-Punktes S, und keinen auf die drehende Bewegung des Körpers. — Dies gilt, die Körper mögen beliebig elastisch oder ganz unelastisch seyn.

II. Geht die Normale HKH' durch beide Schwer-Punkte S und S' (Fig. 25.) zugleich, so daß nicht bloß

$$1) \quad \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma},$$

sondern auch

$$2) \quad \frac{a'}{\cos\alpha'} = \frac{b'}{\cos\beta'} = \frac{c'}{\cos\gamma'}$$

ist, so geht die Gleichung (§. 118. III.) über in

$$3) \quad u_1 \cdot \cos\alpha + v_1 \cdot \cos\beta + w_1 \cdot \cos\gamma$$
$$+ u'_1 \cdot \cos\alpha' + v'_1 \cdot \cos\beta' + w'_1 \cdot \cos\gamma' = 0.$$

Nun geben aber die drei erstern der Gleichungen (§. 117. I.), indem man sie bezüglich mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt und addirt:

$$4) \quad \frac{N}{M} + (u - u_1) \cdot \cos\alpha + (v - v_1) \cdot \cos\beta + (w - w_1) \cdot \cos\gamma = 0.$$

Ebenso erhält man dann aus den drei erstern der Gleichungen (§. 117. II.)

$$5) \quad \frac{N}{M'} + (u' - u'_1) \cdot \cos\alpha' + (v' - v'_1) \cdot \cos\beta' + (w' - w'_1) \cdot \cos\gamma' = 0.$$

Addirt man aber diese letztern drei Gleichungen, so ergiebt sich

$$6) \quad \frac{N}{M} + \frac{N}{M'} + u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\beta + w \cdot \cos\gamma$$
$$+ u' \cdot \cos\alpha' + v' \cdot \cos\beta' + w' \cdot \cos\gamma' = 0.$$

Sind nun θ und θ' die wahren Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte S und S' unmittelbar vor dem Stoße und SL, S'L' die Richtungen derselben (Fig. 25.), so hat man

$$7) \quad \begin{cases} -\theta \cdot \cos KSL = u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\beta + w \cdot \cos\gamma; \\ -\theta' \cdot \cos KS'L' = u' \cdot \cos\alpha' + v' \cdot \cos\beta' + w' \cdot \cos\gamma'. \end{cases}$$

Dadurch geht aber die vorstehende Gleichung über in

$$8) \quad N = \frac{MM'}{M+M'}(\theta \cdot \cos KSL + \theta' \cdot \cos KS'L').$$

Dieser Ausdruck zur Rechten muß nothwendig positiv werden, und wäre dies nicht der Fall, so wäre solches ein Beweis, daß dasmal gar kein Stoß statt findet.

Sind ferner Sl und S'l' die Richtungen der Bewegung der Schwer-Punkte in dem Augenblicke der größten Zusammendrük-

kung und θ_1, θ'_1 die Geschwindigkeiten selbst, in demselben Augenblicke, so hat man noch

$$9)\quad \begin{cases} -\theta_1 \cdot \cos KSl = u_1 \cdot \cos\alpha + v_1 \cdot \cos\beta + w_1 \cdot \cos\gamma, \\ -\theta'_1 \cdot \cos KS'l' = u'_1 \cdot \cos\alpha' + v'_1 \cdot \cos\beta' + w'_1 \cdot \cos\gamma'. \end{cases}$$

Substituirt man daher diese Werthe aus (7. 8. und 9.) in die Gleichungen (4. und 5.) so ergiebt sich noch

$$10)\quad \begin{cases} \theta_1 \cdot \cos KSl = \dfrac{M\theta \cdot \cos KSL - M'\theta' \cdot \cos KS'L'}{M+M'}, \\ \theta'_1 \cdot \cos KS'l' = \dfrac{M'\theta' \cdot \cos KS'L' - M\theta \cdot \cos KSL}{M+M'}. \end{cases}$$

Diese nach der Normale HKH' zerlegten Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte im Augenblicke der größten Zusammendrükkung bei elastischen Körpern, oder unmittelbar nach beendigtem Stoße bei unelastischen Körpern, sind also (wie man aus den Formeln 10. sieht) allemal einander gleich und einander entgegen; (in unserm besondern Falle).

Unmittelbar nach völlig beendigtem Stoße elastischer Körper hat man auch, wenn jetzt θ_1, θ'_1 die dann vorhandenen Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte, und Sl, S'l' ihre Richtungen vorstellen,

$$11)\quad \begin{cases} \theta_1 \cdot \cos KSl = U \cdot \cos\alpha + V \cdot \cos\beta + W \cdot \cos\gamma, \\ \theta'_1 \cdot \cos KS'l' = U' \cdot \cos\alpha' + V' \cdot \cos\beta' + W' \cdot \cos\gamma'. \end{cases}$$

Multiplicirt man daher die drei erstern der Gleichungen (IV. des §. 118.) bezüglich mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, addirt man die Resultate und setzt man statt N seinen Werth (aus 8.), so wie statt $u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\beta + w \cdot \cos\gamma$ und statt $U \cdot \cos\alpha + V \cdot \cos\beta + W \cdot \cos\gamma$ ihre Werthe (aus 7. und 11.), so erhält man

$$12)\quad \theta_1 \cdot \cos KSl = \frac{(M - \varepsilon M')\theta \cdot \cos KSL - (1+\varepsilon)M' \cdot \theta' \cdot \cos KS'L'}{M+M'};$$

und für den andern Körper eben so (aus §. 118. V.)

$$13)\quad \theta'_1 \cdot \cos KS'l' = \frac{(M' - \varepsilon M)\theta' \cdot \cos KS'L' - (1+\varepsilon)M \cdot \theta \cdot \cos KSL}{M+M'},$$

welche Gleichungen für $\varepsilon = 0$ wiederum in die Formeln (10.) übergehen, wie dies seyn muß.

III. Denkt man sich den Fall (II.) noch einmal, aber unter der Voraussetzung, daß die Schwer-Punkte S und S' sich vor dem Stoße in der Normale HKH' bewegen, so hat man, indem θ, θ', θ_1, θ'_1 allemal positiv genommen worden,

$$\cos KSL = \pm 1; \qquad \cos KS'L' = \pm 1.$$

Die auf HKH' senkrechten Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte sind dasmal der Null gleich vor dem Stoße, also (nach §. 120. I.) auch noch nach dem Stoße. Aber eben deshalb ist nach dem Stoße auch noch

$$\cos KSl = \pm 1 \quad \text{und} \quad \cos KS'l' = \pm 1.$$

1) Gehen z. B. S und S' vor dem Stoße beide von H' nach H, so ist

$$\cos KSL = -1, \qquad \cos KS'L' = +1,$$

also (nach 12. und 13.)

$$\theta_1 = \pm \frac{M\theta + M'\theta' - \varepsilon M'(\theta - \theta')}{M + M'},$$

$$\theta'_1 = \pm \frac{M\theta + M'\theta' - \varepsilon M(\theta' - \theta)}{M + M'},$$

und $\cos KSl = \mp 1$, so wie $\cos KS'l' = \pm 1$,

wo alle die obern (+ oder —) Zeichen gleichzeitig gelten, oder die untern alle, nach der Bedingung, daß θ_1 und θ'_1 positiv werden müssen.

2) Gehen aber die Schwer-Punkte S und S' auf der Normale gegen einander, so hat man

$$\cos KSL = \cos KS'L' = +1,$$

und die Gleichungen (12. u. 13.) geben

$$\cos KSl = \pm 1, \qquad \cos KS'l' = \mp 1,$$

und

$$\theta_1 = \pm \frac{M\theta - M'\theta' - \varepsilon M'(\theta + \theta')}{M + M'},$$

$$\theta'_1 = \pm \frac{M\theta - M'\theta' + \varepsilon M(\theta + \theta')}{M + M'},$$

wo die obern oder die untern (+ oder —) Zeichen genommen werden müssen, so nämlich, daß θ_1 und θ'_1 immer positiv werden.

Dieselben Resultate haben wir bereits in den (§§. 20. und 21.) für den Fall erhalten, daß homogene Kugeln unter den hiesigen Voraussetzungen sich stoßen. Hier sieht man, daß dieselben auch für nicht kugelförmige Körper gelten, sobald sich nur die Schwer-Punkte vor dem Stoße in der gemeinschaftlichen Normale bewegen.

Setzt man hier $\varepsilon = 0$, so hat man den Fall der nicht elastischen Körper, und auch den Fall der elastischen im Augenblicke ihrer größten Zusammendrückung, noch ehe die Elasticität hat anfangen können zu wirken.

IV. Setzt man wieder den Fall II., aber überdieß $M' = M$ voraus, so geben die Gleichungen (12. und 13.) das Resultat:

$$\theta_1 \cdot \cos KSl = \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\theta \cdot \cos KSL - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)\theta' \cdot \cos KS'L',$$

$$\theta'_1 \cdot \cos KS'l' = \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\theta' \cdot \cos KS'L' - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)\theta \cdot \cos KSL;$$

und diese Resultate lassen sehen, daß bei vollkommen elastischen Körpern und unter den übrigen (in II.) gemachten Voraussetzungen, die, parallel mit der Normale HKH′ genommenen Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte unmittelbar vor und nach dem Stoße sich austauschen. (Vgl. §. 20. Anmerk. 2.)

V. Ist alles wie in (II.) vorausgesetzt, ist aber S′ vor dem Stoße in Ruhe und zu gleicher Zeit die zugehörige Masse M′ gegen die andere M sehr groß, die letztere also gegen die erstere außer Acht zu lassen (d. h. der Bruch $\frac{M}{M'}$ der Null gleich zu setzen), so zeigen die Formeln (12. und 13.):

1) daß bei unelastischen Körpern die Schwer-Punkte S′ und S nach dem Stoße gar keine mit der Normale HKH′ parallele Geschwindigkeit haben;

2) daß bei vollkommen elastischen Körpern der Schwer-Punkt S nach dem Stoße dieselbe mit der Normale parallele Geschwindigkeit hat, wie vor dem Stoße, aber in der genau entgegengesetzten Richtung. — Daraus folgt noch

3) daß bei vollkommen elastischen Körpern der Abgangs-Winkel ASN des Schwer-Punktes S mit der Normale, dem Eingangs-Winkel ESN desselben (mit der Normale) genau gleich

ist, in so fern vor und nach dem Stoße die auf der Normale SKS' senkrechte Geschwindigkeit dieselbe bleibt. Die (Fig. 25.) läßt dies augenfällig erkennen, auch daß beide Winkel in einerlei Ebene sich befinden, und daß die Abgangs-Geschwindigkeit (in der Richtung SA) der Eingangs- (oder Einfalls-) Geschwindigkeit (in der Richtung ES) genau gleich ist*).

Anmerk. Wenn die Körper, die sich stoßen, homogene Kugeln sind, so ist die Bedingung (II.), daß ihre gemeinschaftliche Normale an K, durch die Schwer-Punkte derselben hindurchgehe, allemal erfüllt. Daher gelten die Folgerungen (II. bis V.) wenn die übrigen Bedingungen erfüllt sind, für Kugeln allemal, und namentlich also ändern sich bei dem Stoße der Kugeln, so lange die Reibung unberücksichtigt bleibt, nie die Rotations-Bewegungen derselben.

§. 122.

Besonderer Fall einer Rotations-Aenderung.

Betrachten wir jetzt den Einfluß des Stoßes zweier Körper auf die Rotations-Bewegung derselben, in einem einfachen Beispiele, in welchem aber die gemeinschaftliche Normale HKH' durch den Schwer-Punkt S der Masse M nicht hindurchgeht.

Setzen wir nämlich voraus, daß die augenblickliche Dreh-Axe von M im Augenblicke des Stoßes, mit der Haupt-Dreh-Axe SZ zusammenfalle, so ist $p = q = 0$. Setzen wir ferner voraus, daß der Punkt K und die gemeinschaftliche Normale HKH' sich in der Ebene XSY der beiden andern Haupt-Dreh-Axen SX und SY befinden, so ist $c = \cos\gamma = 0$. Setzt man nun

P

*) Dieß ist also z. B. im Billard-Spiel der Fall, wenn die Banden und Bälle vollkommen elastisch sind, auch bei dem Zurückprallen der Kanonenkugeln von festen Gegenständen, wenn Kugel und Gegenstand als vollkommen elastisch vorausgesetzt werden, und wenn jedesmal die Reibung unberücksichtigt bleibt. Die Reibung eines sich drehenden Körpers an einem Andern bringt aber eine Aenderung in der auf die Normale senkrechten Geschwindigkeit und daher auch einen andern Abgangs-Winkel, als der Einfalls-Winkel ist, hervor.

$$p = 0, \quad q = 0, \quad c = 0 \quad \text{und} \quad \cos\gamma = 0$$

in die zwei letztern der Gleichungen (§. 117. I. oder §. 118. IV.), so erhält man noch

$$p_1 = 0 \text{ und } q_1 = 0, \quad \text{oder} \quad P = 0 \text{ und } Q = 0;$$

d. h. die Körper mögen unelastisch oder beliebig elastisch seyn, so dreht sich doch die Masse M unmittelbar nach dem Stoße noch immer um dieselbe Haupt-Dreh-Axe SZ, wie unmittelbar vor dem Stoße, jedoch mit veränderter Winkel-Geschwindigkeit, während ohnedieß, bei jedem Stoße, die Lage der Schwer-Punkte und der zugehörigen Haupt-Dreh-Axen unverändert dieselbe bleibt (§. 115.).

Nehmen wir ferner noch an, daß M' eine homogene Kugel ist, daß man also

$$\frac{a'}{\cos\alpha'} = \frac{b'}{\cos\beta'} = \frac{c'}{\cos\gamma'}$$

hat, so wird die 13te Gleichung des Stoßes (§. 118. III.) für unelastische Körper jetzt so:

$$(b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta)\cdot r_1 + u_1\cdot\cos\alpha + v_1\cdot\cos\beta$$
$$+ u'_1\cdot\cos\alpha' + v'_1\cdot\cos\beta' + w'_1\cdot\cos\gamma' = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen (§. 121. II. NNr. 4. 5.), so erhält man

$$\frac{N}{M} + \frac{N}{M'} + (b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta)r_1 + u\cdot\cos\alpha + v\cdot\cos\beta$$
$$+ u'\cdot\cos\alpha' + v'\cdot\cos\beta' + w'\cdot\cos\gamma' = 0.$$

Sind ferner δ und δ' die Winkel, welche die Richtungen der Geschwindigkeiten θ und θ' der Schwer-Punkte S und S' mit der Normale KH machen, so hat man noch

$$u\cdot\cos\alpha + v\cdot\cos\beta = \theta\cdot\cos\delta$$
$$u'\cdot\cos\alpha' + v'\cdot\cos\beta' + w'\cdot\cos\gamma' = -\theta'\cdot\cos\delta'$$

für die nach der Normale zerlegten Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte. Daher wird die vorstehende Gleichung, wenn man r_1 mittelst der vierten der Gleichungen (§. 117. I.) eliminirt, jetzt so:

$$\frac{N}{M} + \frac{N}{M'} + \frac{(b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta)^2\cdot N}{\mathfrak{C}} + (b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta)r$$
$$+ \theta\cdot\cos\delta - \theta'\cdot\cos\delta' = 0;$$

woraus

$$N = \frac{MM'\mathfrak{C}\cdot[(a\cdot cos\beta - b\cdot cos\alpha)r + \theta'\cdot cos\delta' - \theta\cdot cos\delta]}{(M+M')\mathfrak{C} + MM'(b cos\alpha - a\cdot cos\beta)^2}$$

hervorgeht. Mittelst dieses Werthes von N erhält man zuletzt aus den drei erstern der Gleichungen (I. §. 117.) oder (IV. §. 118.) die Werthe u_1, v_1, w_1 bei unelastischen Körpern, oder U, V, W bei elastischen, aus welchen die Geschwindigkeit des Schwer-Punktes S unmittelbar nach dem Stoße zusammengesetzt werden kann. Eben so erhält man dieselben analogen Resultate auch für S' und zwar aus (§. 117. II. und §. 118. V.).

Der Stoß N muß immer positiv sich ausrechnen. Fände das Gegentheil statt, so wäre dieß ein Beweis, daß dasmal ein Stoß gar nicht statt hat. Der Werth von r muß positiv oder negativ in Rechnung gebracht werden, je nachdem die Anfangs-Rotations-Bewegung um SZ, von SY nach SX, oder im entgegengesetzten Sinne stattgefunden hat.

§. 123.

Stoß zweier nicht freien Körper.

Sind die Körper, die sich stoßen, nicht frei, so finden ganz dieselben Principien für die Bestimmung der Wirkung des Stoßes statt, nur daß zu den verlorenen Kräften, welche die Gleichgewichts-Gleichungen liefern, noch die Erschütterungen hinzugerechnet werden müssen, welche die Stellen, wo die Körper nicht frei sind, als Gegen-Wirkung erfahren. — Man kann aber in besonderen Fällen blos die besonderen Bedingungen des Gleichgewichts nehmen, und diese Erschütterungen der festen Punkte ganz außer Acht lassen.

I. Ist z. B. ein Punkt S des Körpers M, absolut fest, so daß sich der Körper um selbigen noch beliebig drehen kann, so lege man durch ihn die ihm zugehörigen drei Haupt-Dreh-Axen SX, SY, SZ. Da nun vor und nach dem Stoße die Seiten-Geschwindigkeiten des Punktes S, also in den (§§. 116. 117.) die Werthe von u, v, w, u_1, v_1, w_1 der Null gleich sind, desgleichen auch U, V, W (im §. 118. B.); da ferner,

weil der Punkt S absolut fest ist, statt der sechs Gleichungen (NNr. 1.—6. des §. 117.) nur die drei letztern (4.—6.) statt finden, so erhält man dasmal genau wieder die drei letztern der Gleichungen (§. 117. I.). Fügt man zu diesen drei Gleichungen noch die sechs Gleichungen (§. 117. II.) für den andern Körper M′ und noch die Gleichung (§. 118. III.) hinzu, so hat man zehn Gleichungen, aus denen die zehn Unbekannten p_1, q_1, r_1, u'_1, v'_1, w'_1, p'_1 q'_1, r'_1 und N ihre Bestimmung finden müssen. Alles für den Fall, daß die Körper nicht elastisch sind. Sind sie aber elastisch, so kommen statt der drei Gleichungen (§. 117. I.) die drei letztern der Gleichungen (§. 118. IV.) und die sechs Gleichungen (§. 118. V.). Ist dann N aus den vorher genannten zehn Gleichungen, wie sie für den Augenblick der größten Zusammendrückung statt finden, bestimmt, so geben die letztern neun Gleichungen P′, Q′, R′, U′, V′, W′ und P, Q, R noch dazu.

II. Ist aber der Körper M an eine feste Axe SU geknüpft, um die er sich nach Belieben drehen kann, ohne sich auf ihr schieben zu können, so ist in den (§§. 116. 117.) $u = v = w = u_1 = v_1 = w_1 = 0$; ferner auch, wenn man die Koordinaten-Axe SZ mit SU zusammenfallen läßt, noch $p = q = 0$ und auch $p_1 = q_1 = 0$. — Es findet endlich dasmal nur eine Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts statt, nämlich die Gleichung (§. 117. Nr. 4.) und diese wird unter den jetzigen Voraussetzungen, wenn C das Trägheits-Moment des Körpers um SU oder SZ vorstellt; die nachstehende, nämlich:

$$N\cdot(b\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\beta) + C\cdot(r - r_1) = 0,$$

welche genau wieder mit der 4ten der sechs Gleichungen (§. 117. I.) zusammenfällt, obgleich SZ dasmal nicht gerade eine Haupt-Dreh-Axe ist.

Diese Gleichung in Verbindung mit den sechs Gleichungen (§. 117. II.) für den zweiten Körper und der Gleichung (§. 118. III.), geben nun die acht Unbekannten N, r_1, u'_1, v'_1, w'_1, p'_1 q'_1, r'_1.

Sind die Körper elastisch, so bestimmt man auf die eben

beschriebene Weise den Druck N aus denselben acht Gleichungen für den Moment der größten Zusammendrückung der Körper. Dann aber erhält man noch für den Körper M die Gleichung

$$(1+\varepsilon)N(b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta) + C(r-R) = 0,$$

und noch die sechs Gleichungen (§. 118. V.), für den zweiten Körper M'; und bestimmt aus den letztern sieben Gleichungen, da N schon bekannt ist, die sieben Unbekannten R, U', V', W', P', Q', R' noch dazu.

§. 124.

Gleichzeitiger Stoß dreier oder mehrerer Körper.

Stoßen sich mehrere Körper gleichzeitig, so bringt man die verlorenen Kräfte eines jeden einzeln in's Gleichgewicht, dadurch daß man zu diesen verlorenen Kräften so viele unbekannte „Größen des Stoßes" N, N', N'', hinzufügt, als dieser Körper (bei dem Stoße) von den übrigen Körpern gleichzeitig trifft, jede in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale und von außen nach innen genommen, damit sie immer einen positiven Werth habe. Man erhält dann Gleichungen genug um die Unbekannten alle bestimmen zu können, wenn man nur nicht unterläßt, Stoß und Gegen-Stoß in je zwei sich stoßenden Körpern von einerlei „Größe" sich zu denken, und die Gleichung (§. 118. III.) für je zwei derselben, die sich stoßen, gehörig in Ansatz zu bringen.

Als Beispiel betrachte man drei homogene Kugeln, deren Massen bezüglich M, M' und μ, und deren Schwer-Punkte bezüglich S, S' und σ sind. Wir wollen voraussetzen, daß μ unmittelbar vor dem Stoße in Ruhe gewesen sey und gleichzeitig von den beiden andern Körpern M und M' in K und K' (Fig. 26.) getroffen werde. Wegen der Voraussetzung, daß die Körper homogene Kugeln sind, bleiben die Rotations-Bewegungen vor und nach dem Stoße bei einer jeden, dieselben; es wird also nur darauf ankommen, die fortschreitenden Bewegungen der Schwer-Punkte nach dem Stoße zu bestimmen. — Es seyen zu dem

Ende a, b, c die, nach den drei im Raume festen Koordinaten-Axen OX, OY, OZ zerlegten Seiten-Geschwindigkeiten des Punktes S, und a′, b′, c′ dieselben in Bezug auf S′, beide vor dem Stoße. Nach dem Stoße, wenn die Körper unelastisch sind, oder im Augenblicke der größten Zusammendrückung, wenn sie elastisch sind, mögen dieselben Seiten-Geschwindigkeiten bezüglich in u, v, w und u′, v′, w′ übergehen, während u_1, v_1, w_1 die auf dieselben Koordinaten-Axen bezogenen gleichzeitigen Seiten-Geschwindigkeiten von σ vorstellen sollen, welche vor dem Stoße der Null gleich vorausgesetzt worden sind. Es seyen ferner α, β, γ und α', β', γ' die Winkel, welche bezüglich $K\sigma$ und $K'\sigma$ mit den drei Axen OX, OY, OZ machen, und N und N′ seyen die Größen der Stöße, welche M und μ, desgleichen M′ und μ einander mittheilen. Man hat dann zwischen den verlorenen Kräften und diesen Größen der Stöße N und N′ dreimal drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

$$1)\left\{\begin{array}{l} M(a-u)-N\cdot\cos\alpha=0,\quad M\cdot(b-v)-N\cdot\cos\beta=0, \\ \qquad\qquad M\cdot(c-w)-N\cdot\cos\gamma=0; \\ M'(a'-u')-N'\cdot\cos\alpha'=0,\quad M'\cdot(b'-v')-N'\cdot\cos\beta'=0, \\ \qquad\qquad M'\cdot(c'-w')-N'\cdot\cos\gamma'=0; \\ N\cdot\cos\alpha+N'\cdot\cos\alpha'-\mu u_1=0,\quad N\cdot\cos\beta+N'\cdot\cos\beta'-\mu v_1=0, \\ \qquad\qquad N\cdot\cos\gamma+N'\cdot\cos\gamma'-\mu w_1=0. \end{array}\right.$$

Außerdem erhält man aus (§. 118. III.) noch die beiden Gleichungen

$$2)\left\{\begin{array}{l} u_1\cdot\cos\alpha+v_1\cdot\cos\beta+w_1\cdot\cos\gamma=u\cdot\cos\alpha+v\cdot\cos\beta+w\cdot\cos\gamma, \\ u_1\cdot\cos\alpha'+v_1\cdot\cos\beta'+w_1\cdot\cos\gamma'=u'\cdot\cos\alpha'+v'\cdot\cos\beta'+w'\cdot\cos\gamma'; \end{array}\right.$$

und diese 11 Gleichungen reichen hin, um die 11 Unbekannten N, N′, u, v, w, u′, v′, w′ und u_1, v_1, w_1 zu bestimmen.

Wird der Winkel

$$3)\qquad S\sigma S'=\delta$$

gesetzt und bedeuten k und k′ die nach SK und S′K′ zerlegten Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte S und S′ vor dem Stoße, so hat man

$$4)\qquad \cos\delta=\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma'$$

und

$$5)\quad \begin{cases} k = a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma, \\ k' = a' \cdot \cos\alpha' + b' \cdot \cos\beta' + c' \cdot \cos\gamma'. \end{cases}$$

Nimmt man diese Gleichungen und verbindet man sie noch mit den Gleichungen

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1, \quad \cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1,$$

so erhält man bald aus den Gleichungen (1.)

$$6)\quad \begin{cases} u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\beta + w \cdot \cos\gamma = k - \frac{N}{M}, \\ u' \cdot \cos\alpha' + v' \cdot \cos\beta' + w' \cdot \cos\gamma' = k' - \frac{N'}{M'}, \\ u_1 \cdot \cos\alpha + v_1 \cdot \cos\beta + w_1 \cdot \cos\gamma = \frac{N + N' \cdot \cos\delta}{\mu}, \\ u_1 \cdot \cos\alpha' + v_1 \cdot \cos\beta' + w_1 \cdot \cos\gamma' = \frac{N' + N \cdot \cos\delta}{\mu}. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen gehen aber die Gleichungen (2.) über in

$$M\mu k = N \cdot (M + \mu) + N'M \cdot \cos\delta,$$
$$M'\mu k' = N' \cdot (M' + \mu) + NM' \cdot \cos\delta;$$

woraus hervorgeht

$$7)\quad N = \frac{k(M' + \mu)M\mu - k'MM'\mu \cdot \cos\delta}{(M + \mu)(M' + \mu) - MM' \cdot \cos\delta^2},$$

und

$$8)\quad N' = \frac{k'(M + \mu)M'\mu - kMM'\mu \cdot \cos\delta}{(M + \mu)(M' + \mu) - MM' \cdot \cos\delta^2}.$$

Setzt man diese, immer positiven Werthe in die Gleichungen (1.) statt N und N', so erhält man ohne weitläufige Rechnung sogleich die neun Seiten-Geschwindigkeiten der drei Schwer-Punkte S, S' und σ unmittelbar nach dem Stoße; wenn nur alle drei Körper unelastisch sind.

Sind dieselben Körper aber elastisch, so gilt die vorstehende Rechnung nur für den Augenblick der größten Zusammendrückung (den wir zwischen M und μ, und zwischen M' und μ als einen und denselben annehmen wollen). Bezeichnen nun nach gänzlich beendigtem Stoße, U, V, W, U', V', W'

und U_1, V_1, W_1 dieselben Seiten-Geschwindigkeiten, welche im Momente des größten Zusammendrückens u, v, w, u′, v′, w′ und u_1, v_1, w_1 genannt worden sind, so hat man vermöge der Betrachtungen (§. 118. B.) noch die neun Gleichungen

$$M(u-U)-\varepsilon N\cdot\cos\alpha=0,\quad M(v-V)-\varepsilon N\cdot\cos\beta=0,$$
$$M(w-W)-\varepsilon N\cdot\cos\gamma=0;$$
$$M'(u'-U')-\varepsilon N'\cdot\cos\alpha'=0,\quad M'(v'-V')-\varepsilon N'\cdot\cos\beta'=0,$$
$$M'(w'-W')-\varepsilon N'\cdot\cos\gamma'=0;$$
$$\varepsilon N\cdot\cos\alpha+\varepsilon N'\cdot\cos\alpha'+\mu(u_1-U_1)=0,$$
$$\varepsilon N\cdot\cos\beta+\varepsilon N'\cdot\cos\beta'+\mu(v_1-V_1)=0,$$
$$\varepsilon N\cdot\cos\gamma+\varepsilon N'\cdot\cos\gamma'+\mu(w_1-W_1)=0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen (1.) die neun Unbekannten u, v, w, u′, v′, w′, u_1, v_1 und w_1 (dadurch, daß man die Gleichungen des einen und des andern Systems, der Ordnung nach, paarweise addirt), so geht noch hervor:

$$M(a-U)-(1+\varepsilon)N\cdot\cos\alpha=0,$$
$$M(b-V)-(1+\varepsilon)N\cdot\cos\beta=0,$$
$$M(c-W)-(1+\varepsilon)N\cdot\cos\gamma=0;$$
$$M'(a'-U')-(1+\varepsilon)N'\cdot\cos\alpha'=0,$$
$$M'(b'-V')-(1+\varepsilon)N'\cdot\cos\beta'=0,$$
$$M'(c'-W')-(1+\varepsilon)N'\cdot\cos\gamma'=0.$$

$$(1+\varepsilon)N\cdot\cos\alpha+(1+\varepsilon)N'\cdot\cos\alpha'-\mu U_1=0,$$
$$(1+\varepsilon)N\cdot\cos\beta+(1+\varepsilon)N'\cdot\cos\beta'-\mu V_1=0,$$
$$(1+\varepsilon)N\cdot\cos\gamma+(1+\varepsilon)N'\cdot\cos\gamma'-\mu W_1=0.$$

Substituirt man nun in diese letztern neun Gleichungen statt N und N′ die vorher gefundenen Werthe (für den Augenblick des größten Zusammendrückens), so erhält man sogleich U, V, W, U′, V′, W′, U_1, V_1 und W_1.

Setzt man $\varepsilon=1$, so hat man den Fall der vollkommenen Elasticität, und für $\varepsilon=0$ muß der Fall der unelastischen Körper daraus hervorgehen.

Die Geschwindigkeiten der Schwer-Punkte S, S′ und σ nach dem Stoße würden noch dieselben bleiben, wenn die

Stöße von M und M′ gegen μ, nicht gleichzeitig, aber doch in einem so kleinen Zeit-Unterschiede auf einander folgten, daß in dieser sehr kleinen Zeit die Punkte S, S′ und σ noch nicht merklich aus ihrer Stelle gerückt sind. Auch braucht der Augenblick des größten Zusammendrückens an K und K′ nicht nothwendig derselbe zu seyn, wenn sie nur ebenfalls nicht mehr als nur sehr wenig von einander verschieden sind.

Die Dynamik fester Körper.

Zehntes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen und allgemeine Gesetze der Bewegung eines beliebig festen oder losen Systems von Körpern. Von den kleinen Schwingungen eines solchen Systems.

Vorerinnerung.

Wie auch ein festes oder loses System von Körpern in Bewegung gesetzt seyn und in der Bewegung erhalten werden mag, so wird man doch immer die Gleichungen der Bewegung sich dadurch verschaffen, daß man nach dem „d'Alembertschen Principe" die verlorenen Kräfte alle in dem vorliegenden Systeme in's Gleichgewicht setzt, d. h. die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts zwischen diesen verlorenen Kräften in diesem Systeme aufsucht und hinschreibt.

Diese Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts erhält man aber alle aus dem „Principe der virtuellen Geschwindigkeiten" (II. Th. Kap. X.). Wir wollen daher in diesem Kapitel den Versuch machen, aus diesen beiden ganz allgemeinen Gesetzen (nämlich dem d'Alembertschen und dem der virtuellen Geschwindigkeiten) für irgend ein in Bewegung sich befindendes festes oder loses System von Körpern, welches wir von beliebigen Kräften ergriffen uns denken, allgemeine Eigenschaften der Bewegung abzuleiten. Nächst diesen allgemeinen Eigenschaften kann man dann, wenn das System und die darauf einwirkenden Kräfte näher bestimmt sind, auch die Einzelheiten einer jeden besondern Bewegung auf demselben Wege noch dazu erhalten*).

---

*) Lagrange war der erste, welcher (in seinem früher schon empfohlenen Werke: Mécanique analytique) auf eine eben so großartige als einfache Weise nicht bloß die ganze Statik, sondern auch die gesammte Dynamik von dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten abhängig machte. Wenn

Erste Abtheilung.

Allgemeinste Gleichungen der Bewegung.

§. 125.

Allgemeinste Gleichungen der stetig geänderten Bewegung.

I. Es seyen m, m', m'', ꝛc. eine beliebige Anzahl von Massen-Elementchen, welche beliebig unter sich fest oder lose zusammenhängen; es seyen x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; ꝛc. die auf drei im Raume feste und rechtwinkliche Koordinaten-Axen OX, OY, OZ bezogenen Koordinaten-Werthe derselben zu irgend einer Zeit t, und

1) $L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0,$ ꝛc.

die Gleichungen, welche zwischen diesen Koordinaten-Werthen x, y, z; x', y', z'; x'', ꝛc. zu jeder Zeit t statt finden sollen, und welche den festen oder losen Zusammenhang dieser Massen-Elemente m, m', ꝛc. unter sich, zu jeder Zeit t, ausdrücken *).

Sind dann X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', ꝛc. die an die Atome der Elementchen parallel mit OX, OY, OZ zu Ende einer jeden Zeit t noch hinzutretenden beschleunigenden Kräfte (so daß $mX \cdot dt$, $mY \cdot dt$, $mZ \cdot dt$; $m'X' \cdot dt$, ꝛc. die an die Elementchen hinzutretenden bewegenden Kräfte vorstellen), so sind (nach §. 18.) die verlorenen Kräfte ausgedrückt durch

$$m(X - \partial^2 x), \quad m(Y - \partial^2 y), \quad m(Z - \partial^2 z) \text{ an } m,$$
$$m'(X' - \partial^2 x'), \quad m'(Y' - \partial^2 y'), \quad m'(Z' - \partial^2 z') \text{ an } m',$$

u. s. w. f.; wo alle ∂ sich auf die Zeit t beziehen. Diese verlorenen Kräfte müssen also im Gleichgewichte stehen.

---

wir hier bis jetzt in der Dynamik nicht diesem Beispiele gefolgt sind, so konnten uns nur pädagogische Rücksichten davon abhalten, in so fern es für den ersten Unterricht immer vorzuziehen ist, das Einzelne, Besondere zuerst kennen zu lehren, und zuletzt erst das Allgemeine folgen zu lassen. Man muß nur dabei mit der größten Sorgfalt die nahe liegende Klippe der gänzlichen Vereinzelung, d. h. der gänzlichen Zerstreuung und Auflösung, wodurch jeder Ueberblick unmöglich wird, zu vermeiden trachten.

*) Sollten z. B. die Massen-Punkte m und m' unter sich fest seyn, d. h. unter sich stets dieselbe Entfernung a behalten, so hätte man

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - a^2 = 0,$$

statt einer dieser Gleichungen $L = 0$, $L' = 0$, ꝛc. zu nehmen.

II. Man denkt sich nun, nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten, ganz unabhängig von der wirklichen Bewegung des Systems, das von diesen verlorenen Kräften angegriffene, übrigens ruhend gedachte System durch eine von außen eingreifende Hand in eine andere Lage gebracht, so daß die Koordinaten-Werthe der Punkte m, m', m'', ꝛc. alle sich geändert haben, jedoch den Bedingungen angemessen, welchen die einzelnen Elementchen unterworfen sind, so nämlich, daß unter andern auch die Gleichungen $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$, ꝛc. zwischen diesen neuen Koordinaten-Werthen gerade so noch statt finden, wie zwischen den alten; man nimmt namentlich an, daß durch diese Verrückung des Systems

$$x \text{ in } x_\varkappa \text{ oder } x + \varkappa\cdot\delta x + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 x + \cdots,$$

$$y \text{ in } y_\varkappa \text{ oder } y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 y + \cdots,$$

$$z \text{ in } z_\varkappa \text{ oder } z + \varkappa\cdot\delta z + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 z + \cdots,$$

$$x' \text{ in } x'_\varkappa \text{ oder } x' + \varkappa\cdot\delta x' + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 x' + \cdots,$$

$$y' \text{ in } y'_\varkappa \text{ oder } y' + \varkappa\cdot\delta y' + \frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 y' + \cdots,$$

u. s. w. f. übergehen, wo δx, $\delta^2 x$, ꝛc., δy, $\delta^2 y$, ꝛc., δz, $\delta^2 z$, ꝛc., $\delta x'$, $\delta^2 x'$, ꝛc., ziemlich beliebige Ausdrücke sind, also z. B. auch beliebige Funktionen von beliebigen Ausdrücken, und keiner andern Beschränkung unterworfen, als der, daß diese neuen Koordinaten-Werthe $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$, $x'_\varkappa$ ꝛc. statt der alten x, y, z, x', ꝛc. gesetzt, noch den Gleichungen $L = 0$, $L' = 0$, ꝛc. zu genügen haben, welche Gleichungen alle Bedingungen ausdrücken, denen die Elementchen unterworfen sind; — wo ferner auch $\varkappa$ völlig beliebig gedacht ist, aber unendlich klein genommen werden muß, wenn die Punkte m, m', ꝛc. in ihrer neuen Lage unendlich nahe an ihrer alten Lage gedacht werden sollen, welches letztere wir hier jedoch im Allgemeinen durchaus nicht voraussetzen, aber nach Belieben voraussetzen können.

III. Dann sind

$$m(X-\partial^2x)\cdot\delta x,\quad m(Y-\partial^2y)\cdot\delta y,\quad m(Z-\partial^2z)\cdot\delta z,$$
$$m'(X'-\partial^2x')\cdot\delta x',\ m'(Y'-\partial^2y')\cdot\delta y',\ m'(Z'-\partial^2z')\cdot\delta z',$$

u. s. w. f. die „Momente der virtuellen Geschwindigkeiten" dieser verlorenen Kräfte, und die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts der letztern ist daher nach dem gedachten Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (II. Th. §§. 90.—92.) diese:

$$2)\qquad \Sigma m(X-\partial^2x)\cdot\delta x+\Sigma m(Y-\partial^2y)\cdot\delta y$$
$$+\Sigma m(Z-\partial^2z)\cdot\delta z = 0,$$

wo die Σ sich über alle Massen-Elemente m, m', m'', ꝛc. zugleich erstrecken.

IV. Dadurch aber, daß die Gleichungen $L=0$, $L'=0$, ꝛc. auch dann noch stattfinden sollen, wenn $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$, ꝛc. statt x, y, z ꝛc. gesetzt werden, während durch diese Substitutionen auch

$$L \text{ in } L_\varkappa \text{ d. h. in } L+\varkappa\cdot\delta L+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2L+\cdots,$$

$$L' \text{ in } L'_\varkappa \text{ d. h. in } L'+\varkappa\cdot\delta L'+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2L'+\cdots,$$

u. s. w. f. übergehen*); — sind

$$3)\qquad L_\varkappa=0,\qquad L'_\varkappa=0,\qquad L''_\varkappa=0,\ \text{ꝛc.}$$

die neuen Gleichungen, in welche die alten $L=0$, $L'=0$, ꝛc. vermöge dieser Substitutionen übergehen; und daraus folgt noch, daß z. B. mit $L_\varkappa=0$ auch jeder der einzelnen Koefficienten δL, δ^2L, ꝛc. von $L_\varkappa$, der Null gleich seyn muß. Dies giebt namentlich noch die Gleichungen

$$4)\qquad \delta L=0,\qquad \delta L'=0,\qquad \delta L''=0,\ \text{ꝛc.}$$

d. h. nach dem Maclaurinschen Lehrsatze oder nach der so-

*) Man vergesse nicht, daß dies nichts weiter sagen will, als daß wir das, was aus L wird, durch $L_\varkappa$ bezeichnen, nach dem Maclaurinschen Lehrsatze allemal in eine, nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe entwikkeln, und die Koefficienten dieser Reihe durch δL, δ^2L, ꝛc. bezeichnen wollen, während diese letzteren allemal (nach I. Th. Analys. §§. 54. 55.) bequem auch wirklich hergestellt werden können, wie letzteres (in 5.) geschehen ist.

genannten Variations-Rechnung (Vgl. I. Th. Analys. Kap. VI.) noch

$$5)\begin{cases} \delta L = \partial L_x \cdot \delta x + \partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z + \partial L'_{x'} \cdot \delta x' + \text{ic.} = 0, \\ \delta L' = \partial L'_x \cdot \delta x + \partial L'_y \cdot \delta y + \partial L'_z \, \delta z + \partial L'_{x'} \cdot \delta x' + \text{ic.} = 0, \\ \text{u. s. w. f.,} \end{cases}$$

so daß letztere Gleichungen (5.) die Abhängigkeit der δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, ꝛc. von einander, ausdrücken.

V. Eliminirt man nun aus der Gleichung (2.) mittelst der Gleichungen (5.) so viele der Faktoren δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, ꝛc., als man solche Gleichungen (5.) hat, so zerfällt die übrig bleibende Gleichung in so viele einzelne Gleichungen, als sie noch von diesen Faktoren δx, δy, δz, ꝛc. behalten hat, weil letztere dann von einander ganz unabhängig sind, daher jedesmal alle bis auf einen einzigen der Null gleich gedacht werden können, während dieser einzige nach und nach jeder andere derselben seyn kann.

Diese Elimination bewirkt sich aber immer am besten mittelst der „Methode der Multiplikatoren" oder der sogenannten französischen (Bezoutschen) Eliminations-Methode, welche darin besteht, daß man jede der Gleichungen (5.) mit ganz unbestimmten Faktoren oder „Multiplikatoren" λ, λ', λ'', ꝛc. multiplicirt und zu der Gleichung (2.) addirt, dann aber alle Koefficienten von δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, ꝛc. einzeln der Null gleich setzt *). Die dadurch entstehenden Gleichungen, nämlich:

$$(\odot)\cdots\begin{cases} m \cdot \partial^2 x = mX + \lambda \cdot \partial L_x + \lambda' \cdot \partial L'_x + \lambda'' \cdot \partial L''_x + \cdots, \\ m \cdot \partial^2 y = mY + \lambda \cdot \partial L_y + \lambda' \cdot \partial L'_y + \lambda'' \cdot \partial L''_y + \cdots, \\ m \cdot \partial^2 z = mZ + \lambda \cdot \partial L_z + \lambda' \cdot \partial L'_z + \lambda'' \cdot \partial L''_z + \cdots, \\ m' \cdot \partial^2 x' = m'X' + \lambda \cdot \partial L_{x'} + \lambda' \cdot \partial L'_{x'} + \lambda'' \cdot \partial L''_{x'} + \cdots, \\ m' \cdot \partial^2 y' = m'Y' + \lambda \cdot \partial L_{y'} + \lambda' \cdot \partial L'_{y'} + \lambda'' \cdot \partial L''_{y'} + \cdots, \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

*) Man denkt sich nämlich so viele der Koefficienten von δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. der Null gleich gesetzt, als von den letztern eliminirt werden sollen. Diese Gleichungen sagen dann, wie man die beliebigen λ, λ', ꝛc. bestimmen könne, damit der Zweck des Eliminirens erreicht werde. — Die übrigen Koefficienten (der noch übrigen und nun ganz von einander unabhän-

dienen dann zur Bestimmung der Faktoren oder „Multiplikatoren" λ, λ', λ'', 2c. und der übrigen gesuchten Unbekannten.

VI. Diese Gleichungen (⊙) sind also nun die allgemeinen Gleichungen der Bewegung unseres Systems; sie müssen jedoch mit den Gleichungen (1.), nämlich mit

$$L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \text{ 2c.},$$

deren Anzahl der Anzahl der Multiplikatoren λ, λ', λ'', 2c. gleichkommt, in Verbindung gebracht werden, und man behält zuletzt, wenn λ, λ', λ'', 2c. noch eliminirt sind, genau dreimal so viel Gleichungen als Massen-Elemente, oder genau eben so viele Gleichungen als Koordinaten-Werthe x, y, z, x', y', z', x'', 2c., so daß diese letztern (als Funktionen der Zeit t) aus diesen Gleichungen ihre genaue Bestimmung erhalten.

Hat man aber x, y, z für m gefunden, so hat man auch die Seitengeschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z dieses Elementes m zu Ende jeder Zeit t, und daraus die wahre Geschwindigkeit v desselben, ihrer Richtung und Größe nach (zu Ende dieser Zeit t) ohne weiteres. Dasselbe läßt sich von m' und von jedem der folgenden Massen-Elemente sagen.

VII. Drückt die Gleichung $L = 0$, eine Fläche, oder drükken die zwei Gleichungen $L = 0$ und $L' = 0$ eine Linie aus, auf welcher z. B. das Massen-Elementchen m zu bleiben gezwungen ist, so dienen, wie man solches aus (I. Th. Mech. §§. 22.—24.) sehr einfach erkennen kann, der Faktor λ, oder die Faktoren λ und λ' zugleich zur Bestimmung der Drucke, welche im Augenblicke (d. h. zu Ende der Zeit t) diese Fläche, oder die, die Linie bildenden beiden Flächen, in der Richtung ihrer Normalen erleiden *).

---

gigen Faktoren δx, δy, δz, $\delta x'$, 2c.) müssen dann deshalb einzeln ebenfalls der Null gleich seyn, eben weil diese übrig gebliebenen Faktoren alle möglichen Werthe annehmen können, und die Gleichung für alle diese Werthe doch immer bestehen soll und muß.

*) Dies und das wie? geht nämlich aus folgender Betrachtung hervor Ist $L = 0$ die Gleichung einer Fläche, auf welcher m zu bleiben gezwun-

§. 126.

Integration dieser Gleichungen in einer besondern Aufgabe.

In vielen Anwendungen trifft es sich, daß man die Integrale der Gleichungen (⊙. §. 125.) für den Fall schon kennt, in welchem

$$X, Y, Z; \quad X', Y', Z'; \text{ ꝛc.}$$

bezüglich die bestimmten Werthe

$$P, Q, R; \quad P', Q', R'; \text{ ꝛc.}$$

haben, und nun die Integration derselben Gleichungen (⊙) durchzusetzen hat, für den Fall, daß diese Kräfte bezüglich um

$$U, V, W; \quad U', V', W'; \text{ ꝛc.}$$

vermehrt gedacht werden, d. h. daß

$$1) \quad \begin{cases} X = P+U, & Y = Q+V, & Z = R+W, \\ X' = P'+U', & Y' = Q'+V', & Z' = B'+W', \end{cases}$$

u. s. w. f. ist*).

Zu diesem Behufe hat Lagrange eine Methode angegeben, welche unter dem sehr uneigentlichen Namen der „Methode der

---

gen ist, so erleidet diese Fläche in dem Momente des Gleichgewichts der verlorenen Kräfte, also zu Ende der Zeit t, einen Druck R in der Richtung der Normale. Bringt man einen eben so großen Gegendruck an, und nimmt diesen zu den Kräften X, Y, Z noch hinzu, so kann man diese Oberfläche ganz weglassen, also auch die sie bestimmende Gleichung. Nun macht aber die Normale mit den Koordinaten-Axen drei Winkel, deren Kosinusse bezüglich

$$\frac{\partial L_x}{\sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}}, \quad \frac{\partial L_y}{\sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}}, \quad \frac{\partial L_z}{\sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}}$$

sind. Daher kommt zu X die Kraft $\frac{R}{\sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}}\cdot\partial L_x$ (in den Gleichungen der Bewegung) noch hinzu, und zwar an die Stelle des $\lambda\cdot\partial L_x$, welches wegbleibt; u. s. w. f. — Es ist daher offenbar

$$R = \lambda\cdot\sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}$$

zu nehmen, wenn man den Druck R gegen die Fläche L = 0 haben will.

*) Dies ist z. B. namentlich in der „Mechanik des Himmels" der Fall, wo man zunächst die Bewegung der Planeten bestimmt, wenn sie bloß von der Sonne allein angezogen werden, dann aber dieser Integrale sich bedient, um den allgemeinen Fall zu erledigen, in welchem auch noch die Wirkungen der Planeten auf einander berücksichtigt werden.

Veränderlichkeit der Konstanten" bekannt ist, welche wir bei Gelegenheit der Integration der lineären Gleichungen (im I. Th. Analys. §. 50.) bereits mitgetheilt haben, und welche wir hier für unser jetziges Problem noch einmal auseinander setzen wollen.

Hat man nämlich für $X = P$, $Y = Q$, $Z = R$, $X' = P'$, ꝛc. die Integration der n Gleichungen (⊙. des §. 125.) durchgesetzt, so ist dabei die gehörige Anzahl, nämlich 2n, sogenannter willkührlicher Konstanten in die Ausdrücke eingegangen. Man nimmt nun die Integrale derselben Gleichungen (⊙) für den andern Fall, wo $X = P + U$, $Y = Q + V$, ꝛc. geworden ist, der Form nach gerade so an, wie sie so eben für $X = P$, $Y = Q$, ꝛc. gefunden worden sind, betrachtet aber die darin vorkommenden Konstanten a, b, c, ꝛc. als solche Funktionen (von t), daß nun den neuen Gleichungen (⊙) für $X = P + U$, $Y = Q + V$, ꝛc. durch dieselben (Form-) Werthe von x, y, z, x', ꝛc. genügt wird.

Sind nämlich

2) $x_{t,a,b,c,\text{ꝛc.}}$, $y_{t,a,b,c,\text{ꝛc.}}$, $z_{t,a,b,c,\text{ꝛc.}}$; $x'_{t,a,b,c,\text{ꝛc.}}$

die Werthe, welche für x, y, z; x', ꝛc. aus den Gleichungen (⊙) hervorgehen, wenn $X = P$, $Y = Q$, ꝛc. ist; und sind a, b, c, ꝛc. die bei dieser Integration eingegangenen Konstanten, so folgt, daß wenn a, b, c, ꝛc. als Funktionen von t noch angesehen werden,

$$3)\quad \begin{cases} \text{statt } \partial x \text{ jetzt } \partial x + (\partial x_a \cdot \partial a + \partial x_b \cdot \partial b + \partial x_c \cdot \partial c + \cdots), \\ \quad \text{»} \quad \partial y \quad \text{»} \quad \partial y + (\partial y_a \cdot \partial a + \partial y_b \cdot \partial b + \partial y_c \cdot \partial c + \cdots) \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

zu stehen kommt. Damit nun diese neuen ∂x, ∂y, ꝛc. (für $X = P + U$, $Y = Q + V$, ꝛc.), von den alten ∂x, ∂y, ꝛc. (für $X = P$, $Y = Q$, ꝛc.), auch jetzt, wo a, b, c, ꝛc. als Funktionen von t gedacht werden, der Form nach durchaus nicht verschieden sind, muß man a, b, c, ꝛc. gerade als solche Funktionen von t sich denken, daß die vorstehenden eingeklammerten Theile von ∂x, ∂y, ꝛc. (in 3.) der Null gleich werden, d. h. daß man hat

4)

$$4)\quad \begin{cases} \partial x_a \cdot \partial a + \partial x_b \cdot \partial b + \partial x_c \cdot \partial c + \cdots = 0, \\ \partial y_a \cdot \partial a + \partial y_b \cdot \partial b + \partial y_c \cdot \partial c + \cdots = 0, \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

Sind aber nun die, aus (2.) hervorgehenden ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. von den unter der erstern Voraussetzung (daß $X = P$, $Y = Q$, ꝛc. ist) erhaltenen ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. der Form nach durchaus nicht verschieden, so bekommt man doch wieder, weil in diesen ∂x, ∂y, ∂z, ꝛc. doch noch a, b, c, ꝛc. vorkommen, welche jetzt als Funktionen von t angesehen werden,

$$5)\quad \begin{cases} \text{statt } \partial^2 x \text{ jetzt } \partial^2 x + [\partial(\partial x)_a \cdot \partial a + \partial(\partial x)_b \cdot \partial b + \cdots], \\ \quad » \quad \partial^2 y \quad » \quad \partial^2 y + [\partial(\partial y)_a \cdot \partial a + \partial(\partial y)_b \cdot \partial b + \cdots], \\ \text{u. s. w. f.,} \end{cases}$$

so daß die neuen $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, ꝛc. (wo $X = P + U$, $Y = Q + V$, ꝛc. gedacht worden ist) von den alten $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, ꝛc. (wo $X = P$, $Y = Q$, ꝛc. gewesen ist) wiederum um die mit den eckigen Klammern umschlossenen Theile verschieden sind, während, wie immer, alle bloßen ∂ auf t sich beziehen. Substituirt man daher diese veränderten Werthe von $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, ꝛc. in die Gleichungen (⊙) und bemerkt man, daß die Theile der Gleichungen, welche die $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, ꝛc. die λ, λ', λ'', ꝛc. und die P, Q, R, ꝛc. enthalten, (weil sie der Form nach genau dieselben sind, wie in dem Falle wo $X = P$, $Y = Q$ ꝛc. gewesen ist, während die Gleichungen (⊙) unter dieser Voraussetzung identische waren, —) sich wegheben, — so geben diese Gleichungen (⊙) jetzt bloß noch

$$6)\quad \begin{cases} \partial(\partial x)_a \cdot \partial a + \partial(\partial x)_b \cdot \partial b + \partial(\partial x)_c \cdot \partial c + \cdots = U, \\ \partial(\partial y)_a \cdot \partial a + \partial(\partial y)_b \cdot \partial b + \partial(\partial y)_c \cdot \partial c + \cdots = V, \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

Da nun die Gleichungen (4. u. 6.) in Bezug auf ∂a, ∂b ∂c, ꝛc. sogenannte einfache Gleichungen sind, so liefern sie nach, den ersten Elementen der Algebra

$$7)\quad \begin{cases} \partial a = U \cdot A + V \cdot B + W \cdot C + U' \cdot D + \cdots, \\ \partial b = U \cdot A_1 + V \cdot B_1 + W \cdot C_1 + U' \cdot D_1 + \cdots, \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

wo A, B, C, D, ꝛc., A_1, B_1, C_1, D_1, ꝛc., die a, b, c, ꝛc.

in sich aufgenommen haben, d. h. Funktionen von a, b, c, ꝛc. seyn werden *).

Diese letztern Gleichungen (7.) müssen nun allein noch integrirt werden, und gewähren den Vortheil, daß sie nur von der ersten, und nicht mehr, wie die Gleichungen (⊙), von der zweiten Ordnung (in Bezug auf die Differenzial-Koefficienten) sind, während freilich dagegen die Anzahl derselben doppelt so groß ist, als die der ursprünglichen Differenzial-Gleichungen.

Diese Methode wird besonders dann sehr wichtig, wenn U, V, W, U′, ꝛc. gegen P, Q, R, P′, ꝛc. sehr klein sind, so daß man, um eine erste Annäherung zu erhalten, in den Ausdrücken A, B, C, D, ꝛc. A_1, B_1, ꝛc. die darin vorkommenden Buchstaben a, b, c, ꝛc. als konstant ansehen kann, also daß man sogleich erhält (aus 7.)

$$8)\quad \begin{cases} a = \int(U \cdot A + V \cdot B + W \cdot C + U' \cdot D + \text{ꝛc.}) \cdot dt, \\ b = \int(U \cdot A_1 + V \cdot B_1 + W \cdot C_1 + U' \cdot D_1 + \text{ꝛc.}) \cdot dt, \\ \text{u. s. w. f.,} \end{cases}$$

in welchen Gleichungen zur Rechten zwar ebenfalls a, b, c, ꝛc. vorkommen werden, so daß ihre algebraische Auflösung nach a, b, c, ꝛc. noch nöthig ist, um a, b, c, ꝛc. als Funktionen von t zu erhalten, wo aber bei dem Integriren (nach t) zur Rechten, dieselben a, b, c, ꝛc. als konstant angesehen worden sind **).

---

*) Ueber die Auflösung der Gleichungen (4. u. 6.) im Allgemeinen, also über die Herstellung der Gleichungen (7.) lese man Poisson's Memoiren in dem Journal de l'École Polytechnique, cahier 15. und in dem I. Bde der Pariser Mémoires de l'Académie des Sciences.

**) In der „Mechanik des Himmels" tritt dieser Fall ein, in so fern die Anziehungen der Planeten auf einander sehr klein sind gegen die Anziehung der Sonne auf den Planeten. Man berücksichtigt daher anfänglich nur die letztere; wenn man aber die Integrale unter dieser Voraussetzung gefunden hat, läßt man selbige der Form nach noch gelten, auch für den Fall, daß die Anziehungen der übrigen Planeten noch in Rechnung gebracht werden sollen, und bestimmt nach den Formeln (8.) die Funktionen (von t) welche statt der Konstanten a, b, c, ꝛc., wie sie unter der erstern Voraussetzung eingegangen sind, gesetzt werden müssen, damit dieselben Formen der Integrale, in ihrer dadurch entstehenden neuen Bedeutung, den Differenzial-Gleichungen der Bewegung unter der letztern Voraussetzung eben-

Die Integration der Gleichungen (7.) oder (8.) führt dann auf's neue 2n Konstanten ein, welche aus den n Anfangs-Werthen von x, y, z, x', ꝛc. und den n Anfangs-Werthen der Seiten-Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. ihre nähere Bestimmung erhalten müssen.

§. 127.

Allgemeinste Gleichungen der Bewegung bei plötzlichen Aenderungen.

Betrachten wir jetzt das andere Problem, wo keine beschleunigenden Kräfte wirken, sondern wo Stoß-Kräfte, welche, parallel mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ zerlegt, durch mA, mB, mC für m; durch m'A', m'B', m'C' für m'; ꝛc. vorgestellt seyn mögen, — gleichzeitig und augenblicklich wirken, und dem (ruhenden oder bereits in Bewegung befindlichen) System eine plötzliche Aenderung der Bewegung beibringen.

Sind nämlich a, b, c; a', b', c'; ꝛc. die Zuwachse an Seiten-Geschwindigkeiten, welche die Massen-Elemente m, m', ꝛc. durch diese Stoß-Kräfte erleiden, so sind

$$m(A-a), \quad m(B-b), \quad m(C-c) \quad \text{für } m,$$
$$m'(A'-a'), \quad m'(B'-b'), \quad m'(C'-c') \quad \text{für } m',$$
u. s. w. f.

die verlorenen Kräfte; und die Gleichung des Gleichgewichts derselben nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher jetzt

$$(♂)\cdots \quad \Sigma m(A-a)\cdot\delta x+\Sigma m(B-b)\cdot\delta y+\Sigma m(C-c)\cdot\delta z=0.$$

Diese Gleichung wird dann mit den Gleichungen (§. 125. Nr. 1.), nämlich

$$L=0, \quad L'=0, \quad L''=0, \quad ꝛc.$$

---

falls noch genügen. Man hat dann eine erste Näherung und geht von dieser aus, um noch mehr genäherte Resultate zu erhalten. — Es ist dabei noch merkwürdig, daß wenn man dieselbe Methode auf die bei der Umdrehung der Körper um einen festen Punkt (oder um den Schwer-Punkt) vorkommenden Gleichungen anwendet, man genau zu denselben Formen der Differenzial-Gleichungen gelangt, wie in dem kurz vorher erwähnten Problem, so daß eine und dieselbe Rechnung die beiden wichtigsten Probleme der Astronomie zu gleicher Zeit löst.

und mit den daraus hervorgehenden Gleichungen (§. 125. Nr. 5.) nämlich

$$\delta L = 0, \quad \delta L' = 0, \quad \delta L'' = 0, \text{ 2c.}$$

verbunden, ebenfalls mittelst der Methode der Multiplikatoren; und diese Multiplikatoren λ, λ', λ'', 2c. lassen dann wieder die Erschütterungen R, R', 2c. finden, welche etwaige Flächen, auf welchen einzelne der Massen-Elemente m, m', 2c. zu bleiben gezwungen seyn könnten, im Augenblicke der plötzlichen Aenderung erleiden. — Außerdem findet man aber aus diesen Gleichungen die Zuwachse a, b, c, a', b', c', 2c. der Seiten-Geschwindigkeiten, also die neue Bewegung eines jeden der Massen-Punkte m, m', 2c. wenn die alte bekannt gewesen, oder wenn das System in Ruhe gewesen ist.

Anmerk. Da es ganz einerlei ist, ob ein Elementchen m eine Geschwindigkeit v hat, oder ob man sich dasselbe Elementchen als ruhend, dagegen von der Kraft mv in derselben Richtung ergriffen denkt, so bleibt die Gleichung (♂) allemal auch noch richtig, wenn man sich unter A, B, C, A', 2c. die Geschwindigkeiten der Elementchen m, m', 2c. unmittelbar vor, unter a, b, c, a', 2c. die Geschwindigkeiten derselben Elementchen unmittelbar nach der plötzlichen Aenderung denkt, sobald man nur, im Falle letztere nicht etwa gegenseitige Stöße der bewegten Körper unter sich oder gegen unbewegliche, und auch nicht von innen heraus erfolgende Explosionen sind, sondern wenn wirkliche Stoß-Kräfte von außen noch hinzutreten, — die durch letztere in dem Augenblicke des Ereignisses hervorgebrachten Geschwindigkeiten noch unter der Voraussetzung besonders berechnet, und unter die A, B, C, A', 2c. mit aufnimmt, daß die Elementchen, auf welche diese von außen kommenden Stoß-Kräfte wirken, isolirt gedacht werden.

Diese letztere Ansicht ist für die meisten Untersuchungen besonders bequem und wird daher gewöhnlich geltend gemacht.

Zweite Abtheilung.

Allgemeine Gesetze der Bewegung eines Systems von Massen-Elementen, welches im Raume ganz frei ist.

§. 128.

Hat man ein loses System von Massen-Elementchen (oder, wie man auch sagen kann, von Massen-Punkten) m, m', m'', ꝛc., welche unter sich irgend wie zusammenhängen, während das System von jeder äußern Einwirkung ganz frei gedacht wird, so daß die Gleichungen

$$L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \quad \text{ꝛc.}$$

welche den Zusammenhang der Massen-Punkte unter einander ausdrücken, bloß die gegenseitigen Entfernungen dieser letztern in sich aufnehmen, so kann man die Bewegung des ganzen Systems, wie in dem Falle, wo solches einen einzigen festen Körper bildet, in eine fortschreitende und eine drehende Bewegung zerlegen.

Zu jeder Zeit t haben nämlich die Massen-Punkte m, m', m'', ꝛc. eine bestimmte Lage, und in dieser, einen Schwer-Punkt, dessen Koordinaten-Werthe durch x_0, y_0 z_0 bezeichnet seyn mögen und Funktionen der Zeit t sind. Letztere sind von den übrigen Koordinaten-Werthen abhängig mittelst der aus der Theorie der parallelen Kräfte bekannten Gleichungen

$$1) \quad x_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(mx); \quad y_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(my);$$
und
$$z_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(mz).$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber sogleich noch, wenn man sie nach allem t zweimal hintereinander differenziirt

$$2) \begin{cases} \partial x_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial x); \\ \partial y_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial y); \\ \partial z_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial z); \end{cases} \text{und } 3) \begin{cases} \partial^2 x_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial^2 x); \\ \partial^2 y_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial^2 y); \\ \partial^2 z_0 \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial^2 z). \end{cases}$$

Man sucht nun die fortschreitende Bewegung dieses Schwer-Punktes auf, indem man seine Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 zu bestimmen trachtet, und die drehende Bewegung des ganzen

(losen) Systems um diesen Schwer-Punkt, oder um einen andern als fest gedachten Punkt.

Gehen wir zu dem Ende von der allgemeinsten Gleichung der Bewegung aus, nämlich von (§. 125. Nr. 2.)

4) $\Sigma m(X-\partial^2 x)\cdot\delta x+\Sigma m(Y-\partial^2 y)\cdot\delta y+\Sigma m(Z-\partial^2 z)\cdot\delta z=0$;

und leiten wir daraus vorläufig einige besondere Gleichgewichts-Gleichungen dadurch ab, a) daß wir das System entweder ganz beliebig oder nach jeder der drei Axen durch eine von außen eingreifende Hand aus der Ruhe des Gleichgewichts zwischen den verlorenen Kräften, fortgeschoben und b) daß wir dasselbe entweder um eine, durch den Schwer-Punkt gehende beliebige Axe, oder nach und nach um jede der drei Koordinaten-Axen auf dieselbe Weise gedreht uns denken (vgl. II. Th. §. 92.).

I. Denkt man sich aber das System parallel mit OX fortgerückt um $\varkappa\cdot\delta x$, so wird

$$\delta x' = \delta x'' = \text{ꝛc.} = \delta x,$$

dagegen $\delta y = \delta y' = \text{ꝛc.} = \delta z = \delta z' = \text{ꝛc.} = 0.$

Die Gleichung (4.) geht dadurch über in

(♂)... $\Sigma m(X-\partial^2 x) = 0,$

oder (nach 3.) in

(♉)... $\partial^2 x_0\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mX).$

Denkt man sich das System nach den beiden andern Axen fortgerückt, so bekommt man noch zwei analoge Gleichungen für y_0 und z_0, so daß man hat

5) $\partial^2 x_0\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mX)$; $\partial^2 y_0\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mY)$;

und $\partial^2 z_0\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mZ).$

Diese Gleichungen enthalten die Bewegung des Schwer-Punktes des ganzen Systems, und sie lassen sehen, daß die Bewegung desselben genau so ist, wie wenn alle Massen in ihm concentrirt und alle Kräfte parallel mit sich nach ihm fortgerückt wären, und denselben angriffen *).

---

*) Diese Gleichungen (5.) würden auch dann noch gelten, wenn das System nicht ganz frei wäre, sondern wenn einer oder mehrere der Massen-Punkte gezwungen wären, auf gegebenen Flächen oder Kurven zu bleiben,

II. Hätte man das System in einer beliebigen Richtung, welche mit den Axen OX, OY, OZ einen beliebigen Winkel macht, dessen Kosinusse α, β, γ seyn mögen, und um ein Stück x fortgerückt gedacht, so wären die Koordinaten-Werthe aller Punkte m, m', m'', ꝛc. bezüglich um $x \cdot \alpha$ parallel mit OX, $x \cdot \beta$ parallel mit OY, $x \cdot \gamma$ parallel mit OZ gewachsen, so daß man

$$\delta x = \delta x' = \delta x'' = \text{ꝛc.} = \alpha,$$
$$\delta y = \delta y' = \delta y'' = \text{ꝛc.} = \beta,$$
$$\delta z = \delta z' = \delta z'' = \text{ꝛc.} = \gamma$$

gehabt hätte. Die Gleichung (4.) wäre dadurch übergegangen in

$$\alpha \cdot \Sigma m(X - \partial^2 x) + \beta \cdot \Sigma m(Y - \partial^2 y) + \gamma \cdot \Sigma m(Z - \partial^2 z) = 0,$$

und wäre dann, wegen der Willkührlichkeit der Werthe α, β, γ sogleich wieder in die drei Gleichungen (5.) zerfallen*), wenn man nämlich die Gleichungen (3.) zu Hülfe nimmt.

III. Denkt man sich nun das System (wiederum durch eine von außen eingreifende Hand) nach und nach um jede der drei Axen OZ, OY, OX gedreht, und verfährt man genau so wie im (II. Th. §. 92. II.), so erhält man aus (4.) sogleich noch die drei Gleichungen

$$6)\quad \begin{cases} \Sigma m(y \cdot \partial^2 x - x \cdot \partial^2 y) = \Sigma m(yX - xY), \\ \Sigma m(x \cdot \partial^2 z - z \cdot \partial^2 x) = \Sigma m(xZ - zX), \\ \Sigma m(z \cdot \partial^2 y - y \cdot \partial^2 z) = \Sigma m(zY - yZ). \end{cases}$$

Dies sind nun die drei Gleichungen der drehenden Bewegung

---

sobald man nur zu den Kräften X, Y, Z, X', ꝛc. auch noch die Gegendrucke dieser Flächen oder Linien (in der Richtung der Normalen) hinzufügte, weil dann das System als ganz frei anzusehen ist.

*) Hinge das System mit festen Linien oder festen Flächen außer ihm zusammen, so daß m, oder m', oder ꝛc., auf denselben zu bleiben gezwungen wäre, so könnte man das System nicht beliebig fortgeschoben sich denken weil das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner Anwendung (nach II. Th. Kap. X.) voraussetzt, daß die fingirte Bewegung so seyn muß, wie die Bedingungen es vorschreiben, weil also namentlich, wenn Elementchen auf einer Fläche zu bleiben gezwungen sind, auch diese fingirte Bewegung dieser Bedingung genügen muß. Dann würde man also die Gleichungen (5.) **nicht** erhalten. Deshalb gelten die hier gewonnenen Resultate nur unter der zu Anfang des Paragraphen gemachten Voraussetzung.

des freien Systems um einen beliebig festen Punkt O, den man zum Anfangs-Punkte der Koordinaten genommen hat *).

In diesen Gleichungen (6.) ist jedesmal der Ausdruck zur Rechten die Summe der statischen Momente aller wirkenden Kräfte mX, mY, mZ, mX', ꝛc. in Bezug auf die Axen OZ, OY oder OX genommen, während die Ausdrücke zur Linken (in denselben Gleichungen) die Summe der statischen Momente sind aller gewonnenen Zuwachse an Größe der Bewegung, die Momente in Bezug auf dieselben Axen genommen.

IV. Dieselben drei Gleichungen (6.) erhält man wieder, wenn man das im Gleichgewicht sich befindende System mit, von außen eingreifender Hand, um eine **beliebige** durch O gehende Axe OU dreht, welche mit OX, OY, OZ bezüglich die Winkel λ, μ, ν macht, und danach die virtuellen Geschwindigkeiten bestimmt. Weil nämlich bei dieser Drehung die Entfernungen der Punkte m, m', ꝛc. von O sich nicht ändern, so hat man:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_x{}^2 + y_x{}^2 + z_x{}^2;$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x'_x{}^2 + y'_x{}^2 + z'_x{}^2;$$

u. s. w. f.; folglich

$$(\text{♉})\cdots \qquad x \cdot \delta x + y \cdot \delta y + z \cdot \delta z = 0;$$
$$x' \cdot \delta x' + y' \cdot \delta y' + z' \cdot \delta z' = 0; \quad \text{ꝛc.}$$

Die Ebene, in welcher sich m gedreht hat, steht senkrecht auf der (fingirten) Dreh-Axe OU. Denkt man sich also, daß x, y, z dem (Raum-) Punkte M, dagegen x_x, y_x, z_x dem (Raum-) Punkte M_1 angehören, und nennt man α, β, γ die Winkel, welche die Gerade MM_1 mit den drei Axen OX, OY, OZ macht, so hat man deshalb (nach I. Th. Geom. §. 1. VIII. Nr. 8.)

$$\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu = 0,$$

während

---

*) Dieselben Gleichungen würden sich jedoch unverändert gerade so ergeben, wenn auch noch einer oder der andere der Massen-Punkte gezwungen wären, von O gleichweit entfernt zu bleiben, weil dies die hier oben gedachte Abhängigkeit der δx, δy, ꝛc. von einander nicht ändern würde; wie sich von selbst versteht.

$$\cos\alpha = \frac{x_\varkappa - x}{MM_1},\ \cos\beta = \frac{y_\varkappa - y}{MM_1},\ \cos\gamma = \frac{z_\varkappa - z}{MM_1}$$

ist, so daß die vorstehende Gleichung, wenn man diese Werthe substituirt, nach Potenzen von $\varkappa$ ordnet, und dann den Koefficienten von $\varkappa^1$ nimmt, sogleich

$$(\male)\ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda\cdot\delta x + \cos\mu\cdot\delta y + \cos\nu\cdot\delta z = 0, \\ \text{und daher auch für die übrigen Massen-Punkte} \\ \cos\lambda\cdot\delta x' + \cos\mu\cdot\delta y' + \cos\nu\cdot\delta z' = 0, \\ \text{u. s. w. f.} \end{array} \right.$$

liefert. Außerdem ändert sich die Entfernung je zweier der Massen-Punkte m, m′, m″, ꝛc, da sie im Momente des Gleichgewichts gedacht werden müssen, nicht, so daß man noch

$$(x_\varkappa - x'_\varkappa)^2 + (y_\varkappa - y'_\varkappa)^2 + (z_\varkappa - z'_\varkappa)^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

hat. Diese Gleichung liefert augenblicklich

$$x_\varkappa\cdot x'_\varkappa + y_\varkappa\cdot y'_\varkappa + z_\varkappa\cdot z'_\varkappa = 0.$$

Aus dieser und den analogen Gleichungen folgt nun, wenn man sich die Ausdrücke zur Linken in Reihen entwickelt, die nach $\varkappa$ fortlaufen, und dann bloß den ersten Koefficienten (von $\varkappa^1$) nimmt

$$(☾)\ldots \left\{ \begin{array}{l} x\cdot\delta x' + y\cdot\delta y' + z\cdot\delta z' + x'\cdot\delta x + y'\cdot\delta y + z'\cdot\delta z = 0, \\ x\cdot\delta x'' + y\cdot\delta y'' + z\cdot\delta z'' + x''\cdot\delta x + y''\cdot\delta y + z''\cdot\delta z = 0, \\ x'\cdot\delta x'' + y'\cdot\delta y'' + z'\cdot\delta z'' + x''\cdot\delta x' + y''\cdot\delta y' + z''\cdot\delta z' = 0, \\ \text{u. s. w. f.} \end{array} \right.$$

Aus den Gleichungen (♄ und ♂) zieht man nun leicht

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon\cdot(z\cdot\cos\mu - y\cdot\cos\nu), \\ \delta y &= \varepsilon\cdot(x\cdot\cos\nu - z\cdot\cos\lambda), \\ \delta z &= \varepsilon\cdot(y\cdot\cos\lambda - x\cdot\cos\mu); \end{aligned}$$

desgleichen

$$\delta x' = \varepsilon'\cdot(z'\cdot\cos\mu - y'\cdot\cos\nu),$$

u. s. w. f.

wo ε, ε', ꝛc. unbestimmte Faktoren sind, welche jedoch vermöge der Gleichungen (☾) einander gleich seyn müssen. Setzt man nämlich in die Gleichungen (☾) statt δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. diese so eben gefundenen Werthe, so erhält man

$(\varepsilon-\varepsilon')[(x'y-y'x)\cdot \cos\nu+(z'x-x'z)\cdot \cos\mu+(y'z-z'y)\cdot \cos\lambda]=0,$
u. s. w. f.

und da der in den eckigen Klammern befindliche Faktor im Allgemeinen nicht Null seyn wird, so folgt dann

$$\varepsilon-\varepsilon'=0, \quad \varepsilon-\varepsilon''=0, \text{ ꝛc.}$$

Substituirt man aber diese Werthe statt δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. in die Gleichung (4.), so zerfällt solche, da man wegen der Gleichheit von ε, ε', ε'', ꝛc. diesen Faktor ε aus dem Zeichen Σ heraus setzen kann, und da $\varepsilon\cdot\cos\lambda$, $\varepsilon\cdot\cos\mu$, $\varepsilon\cdot\cos\nu$ wegen der beliebigen Annahme der Axe OU ganz beliebige Werthe annehmen können, — sogleich in die drei Gleichungen (6.) *) auf's Neue.

V. Verfährt man ganz genau so, wie wir solches (im §.112.) beschrieben haben, d. h. legt man durch den beweglichen Schwer-Punkt S drei neue Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 parallel mit den alten OX, OY, OZ, und sind x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1, ꝛc. die neuen, von S aus genommenen Koordinaten-Werthe der Massen-Elemente m, m', ꝛc., so erhält man aus den drei Gleichungen (6.), wenn man zuletzt die (1. 2. 3. und 5.) zu Hülfe nimmt, sogleich noch diese drei neuen Gleichungen

$$7.)\quad\begin{cases}\Sigma m(y_1\cdot\partial^2x_1-x_1\cdot\partial^2y_1)=\Sigma m(y_1X-x_1Y),\\ \Sigma m(x_1\cdot\partial^2z_1-z_1\cdot\partial^2x_1)=\Sigma m(x_1Z-z_1X),\\ \Sigma m(z_1\cdot\partial^2y_1-y_1\cdot\partial^2z_1)=\Sigma m(z_1Y-y_1Z)\text{ **)}.\end{cases}$$

---

*) Hätte das System eine feste Axe OZ, um die es sich drehen müßte, so könnte man nach dem „Principe der virtuellen Geschwindigkeiten" auch nur eine Drehung um diese bestimmte Axe fingiren; und es würde die allgemeine Gleichung (4.) dann nur die erstere der drei Gleichungen (6.) liefern, während die beiden andern gar nicht statt finden könnten.

**) Es ist nämlich

$x_1=x-x_0$; $y_1=y-y_0$; $z_1=z-z_0$; $x'_1=x'-x_0$; ꝛc.;
also auch
$\partial x_1=\partial x-\partial x_0$; $\partial y_1=\partial y-\partial y_0$; $\partial z_1=\partial z-\partial z_0$; $\partial x'_1=\partial x'-\partial x_0$; ꝛc.
und
$\partial^2x_1=\partial^2x-\partial^2x_0$; $\partial^2y_1=\partial^2y-\partial^2y_0$; $\partial^2z_1=\partial^2z-\partial^2z_0$; $\partial^2x'_1=\partial^2x'-\partial^2x_0$; ꝛc.

Folglich hat man

$$\Sigma m(y_1\cdot\partial^2x_1-x_1\cdot\partial^2y_1)=\Sigma m[(y-y_0)(\partial^2x-\partial^2x_0)-(x-x_0)(\partial^2y-\partial^2y_0)]$$

Die Bewegung um den Schwer-Punkt S ist daher in jedem Augenblicke gerade so, wie wenn selbiger ein fester Punkt, und die auf alle Massen-Punkte wirkenden Kräfte unverändert wären, ganz so wie wir solches (im §. 112.) für einen festen Körper gefunden haben.

Anmerk. 1. Sind einige der Massen-Punkte m, m′, m″, ꝛc. gezwungen, auf gegebenen Flächen oder Linien zu bleiben, und bringt man dann in der Richtung der Normalen, in welcher diese Flächen oder Linien in jedem Augenblicke der Bewegung gedrückt werden, eben so große Gegendrucke an, so werden die Flächen oder Linien überflüssig, und das System ist dann wiederum als ganz frei anzusehen. Das vorstehende gilt also auch dann noch von diesem System, wenn nur diese unbekannten Gegendrucke zu den Kräften X, Y, Z, ꝛc. noch mit hinzugezählt werden.

Anmerk. 2. Der Anfänger wird nicht übersehen, daß die allgemeine Gleichung (4.) der Bewegung außer den Gleichungen (5. und 7.) noch mehr besondere Gleichungen zu liefern hat, und zwar dieselben, welche im (§. 125.) gefunden worden sind, — wenn die Bewegung eines jeden der Massen-Elemente m, m′, m″, ꝛc. gehörig bestimmt werden soll. Die Gleichungen

---

$$= \Sigma m(y\cdot\partial^2x - x\cdot\partial^2y) - \Sigma m(y_0\cdot\partial^2x - x_0\cdot\partial^2y) - \partial^2x_0\cdot\Sigma m(y-y_0) + \partial^2y_0\cdot\Sigma m(x-x_0)$$
$$= \Sigma m(y\cdot\partial^2x - x\cdot\partial^2y) - y_0\cdot\Sigma(m\cdot\partial^2x) + x_0\cdot\Sigma(m\cdot\partial^2y),$$

in so fern

$$\Sigma m(y-y_0) = \Sigma(my) - \Sigma(my_0) = \Sigma(my) - y_0\cdot\Sigma m = 0,$$

und auch

$$\Sigma m(x-x_0) = \Sigma(mx) - \Sigma(mx_0) = \Sigma(mx) - x_0\cdot\Sigma m = 0$$

ist, vermöge der in den Gleichungen (1.) ausgesprochenen Eigenschaften des Schwer-Punktes.

Weil aber (nach §. 128. I. ♂)

$$\Sigma(m\cdot\partial^2x) = \Sigma(mX), \quad \Sigma(m\cdot\partial^2y) = \Sigma(mY)$$

ist, so geht diese letztgefundene Gleichung noch über in

$$\Sigma m(y_1\cdot\partial^2x_1 - x_1\cdot\partial^2y_1) = \Sigma m(y\cdot\partial^2x - x\cdot\partial^2y) - y_0\cdot\Sigma(mX) + x_0\cdot\Sigma(mY).$$

Da nun (nach 6.)

$$\Sigma m(y\cdot\partial^2x - x\cdot\partial^2y) = \Sigma m(yX - xY)$$

ist, so geht dadurch die vorstehende Gleichung noch über in

$$\Sigma m(y_1\cdot\partial^2x_1 - x_1\cdot\partial^2y_1) = \Sigma m[(y-y_0)X - (x-x_0)Y];$$

und dies ist die erstere der Gleichungen (7.). Die beiden andern finden sich auf ganz anloge Weise.

(5. und 7.) sind nur als algebraische Folgerungen aus jenen anzusehen, die wir aber hier aus der allgemeinen Gleichung direkt ziehen; und da wir dabei die Abhängigkeits-Gleichungen $L = 0$, $L' = 0$, ꝛc. gar nicht benutzt haben, so gelten die hier gewonnenen Resultate (5. und 7.), wie auch die Abhängigkeit der Massen-Elemente unter sich nur immer seyn mag.

§. 129.

Setzen wir voraus, daß keine beschleunigenden Kräfte wirken, sondern bloß dieselben Stoß-Kräfte wie im (§. 127.), jedoch auf unser jetziges von außen freies System von Massen-Punkten, so erhalten wir ganz auf demselben Wege wie im (§. 128. I. oder II.)

1) $\Sigma(ma) = \Sigma(mA)$; $\Sigma(mb) = \Sigma(mB)$; $\Sigma(mc) = \Sigma(mC)$, wo mA, mB, mC, $m'A'$, ꝛc. die hinzugetretenen Stoß-Kräfte, dagegen a, b, c, a', ꝛc. die dadurch erlangten Zuwachse an Geschwindigkeiten sind; oder (nach Anmerk. zu §. 128.) wo A, B, C, A', ꝛc. die Geschwindigkeiten unmittelbar vor, dagegen a, b, c, a', ꝛc. die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Stoße vorstellen können.

Dieser Gleichung zufolge ist die Summe der „Größen der Bewegung" aller Massen-Punkte, in Bezug auf eine beliebige Axe zerlegt, unmittelbar nach der plötzlichen Aenderung gerade so wie unmittelbar vor derselben.

Da (nach §. 128. Nr. 2.) die Summe der „Größen der Bewegung" nach den Koordinaten-Axen genommen, durch die Summe der Massen m, m', m'', ꝛc. dividirt, allemal die Geschwindigkeit des Schwer-Punkts giebt, nach denselben Axen zerlegt *), so folgt zu gleicher Zeit noch:

daß die Geschwindigkeit des Schwer-Punkts eines sich bewe-

*) Es sind nämlich ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. die Seiten-Geschwindigkeiten, also $m \cdot \partial x$, $m \cdot \partial y$, $m \cdot \partial z$, $m' \cdot \partial x'$, ꝛc., die nach den Koordinaten-Axen vorhandenen „Größen der Bewegung" der Massen-Elemente m, m', m'', ꝛc., während ∂x_0, ∂y_0, ∂z_0 die Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punktes sind.

genden, freien Systems von Massen-Punkten, unverändert dieselbe bleibt, wenn auch diese Massen-Punkte während ihrer Bewegung beliebig gegen einander stoßen, und sie selbst dabei unelastisch oder beliebig elastisch gedacht werden.

(Vgl. einen speciellen Fall hiervon im §. 21.)

Verfährt man ferner wie im (§. 128. III. oder IV.), so erhält man noch

$$2)\quad \begin{cases} \Sigma m(ya-xb) = \Sigma m(yA-xB), \\ \Sigma m(xc-za) = \Sigma m(xC-zA), \\ \Sigma m(zb-yc) = \Sigma m(zB-yC); \end{cases}$$

wo A, B, C, A', ꝛc. die Geschwindigkeiten von m, m', ꝛc. unmittelbar vor der plötzlichen Aenderung vorstellen, während a, b, c, a', ꝛc. die Geschwindigkeiten derselben Elemente unmittelbar nachher sind, so daß die Ausdrücke zur Rechten die Summe der statischen Momente vorstellen aller vor dem Stoße vorhandenen „Größen der Bewegung" mA, mB, mC, m'A', ꝛc. in Bezug auf die Axen OZ, OY, OX als Momenten-Axen, genommen, während die Ausdrücke zur Linken die Summen der statischen Momente sind (in Bezug auf dieselben Axen) von allen „Größen der Bewegung", die unmittelbar nachher vorhanden seyn werden; d. h. die Summe der statischen Momente aller vorhandenen „Größen der Bewegung" unmittelbar nach dem Stoße ist genau dieselbe wie unmittelbar vor dem Stoße, in Bezug auf jede beliebige Momenten-Axe.

Sind einige der Massen-Punkte absolut fest und bilden sie eine gerade Linie, oder liegen sie alle in einer und derselben Geraden, so gilt das letztere noch, aber nur in Bezug auf diese einzige Gerade, als Momenten-Axe genommen.

Ist nur ein einziger der Massen-Punkte fest, so gilt dasselbe für jede Momenten-Axe, welche durch diesen festen Punkt hindurchgeht.

§. 130.

Dieser letztern Gleichungen (1. u. 2 des §. 129.) kann man sich auch bedienen, um die Anfangs-Zustände des bewegten Sy-

stems von Massen-Punkten, wie solches im (§. 128.) gedacht ist, auszumitteln. Sind nämlich mA, mB, mC, m'A', m'B', m'C', ꝛc. die zu Anfange parallel mit den Axen gewirkt habenden Stöße, und a, b, c, a', b', c', ꝛc. die dadurch in m, m', ꝛc. hervorgebrachten Geschwindigkeiten, so finden genau diese Gleichungen (§. 129. NNr. 1. u. 2.) statt, in so fern nun diese Geschwindigkeiten a, b, c, ꝛc. zugleich auch die Zuwachse an Geschwindigkeiten sind. Nun ist aber wenn $[\partial x_0]$, $[\partial y_0]$, $[\partial z_0]$ die Anfangs-Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punktes bedeuten (nach der Theorie der parallelen Kräfte)

$$[\partial x_0]\cdot\Sigma(m) = \Sigma(ma);\quad [\partial y_0]\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mb);$$
$$[\partial z_0]\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mc);$$

also ist auch (nach §. 129. Nr. 1.)

1) $[\partial x_0]\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mA);\quad [\partial y_0]\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mB);$
und $[\partial z_0]\cdot\Sigma(m) = \Sigma(mC)$,

wodurch die Anfangs-Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punktes bestimmt sich finden.

Weil a, b, c, a', b', c', ꝛc. die Anfangs-Werthe von ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, ꝛc. sind, und weil, wenn man durch den Schwer-Punkt S die neuen Axen SX_1, SY_1, SZ_1 legt, parallel mit den alten, genau wie im (§. 128.), — dann allemal, wegen der Eigenschaften des Schwer-Punktes (vgl. Note zu §. 128. pag. 378.)

$$\Sigma m(y_1\cdot\partial x_1 - x_1\cdot\partial y_1) = \Sigma m(y_1\cdot\partial x - x_1\cdot\partial y)$$
$$\Sigma m(x_1\cdot\partial z_1 - z_1\cdot\partial x_1) = \Sigma m(x_1\cdot\partial z - z_1\cdot\partial x)$$
$$\Sigma m(z_1\cdot\partial y_1 - y_1\cdot\partial z_1) = \Sigma m(z_1\cdot\partial y - y_1\cdot\partial z)$$

ist, so folgt, wenn man überall $t = 0$ sich denkt, und wenn man bedenkt, daß dann $\partial x = a$, $\partial y = b$, $\partial z = c$, $\partial x' = a'$, ꝛc. ist, endlich daß die Gleichungen (§. 129. Nr. 2.) für jeden Anfangs-Punkt der Koordinaten gelten, also auch, wenn x_1, y_1, z_1, x'_1, ꝛc. statt x, y, z, x', ꝛc. gesetzt werden:

$$2)\quad \begin{cases} \Sigma m(y_1\cdot\partial x_1 - x_1\cdot\partial y_1) = \Sigma m(y_1 A - x_1 B), \\ \Sigma m(x_1\cdot\partial z_1 - z_1\cdot\partial x_1) = \Sigma m(x_1 C - z_1 A), \\ \Sigma m(z_1\cdot\partial y_1 - y_1\cdot\partial z_1) = \Sigma m(z_1 B - y_1 C), \end{cases}$$

wo x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1, ꝛc. die aus dem Schwer-Punkte

genommenen Anfangs-Werthe der Massen-Punkte m, m', rc. vorstellen, so daß ∂x_1, ∂y_1, ∂z_1; $\partial x'_1$, $\partial y'_1$, $\partial z'_1$; rc. die Differenzen zwischen den wahren Seiten-Geschwindigkeiten der Massen-Punkte m, m', rc. und bezüglich den Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punkts sind *), und zwar zu der Zeit wo $t = 0$ ist, nämlich zu Anfange.

Die durch diese drei Gleichungen ausgesprochene Anfangs-Bewegung des Systems um seinen Schwer-Punkt ist also gerade so, wie wenn solcher fest wäre, dabei aber alle Stöße mA, mB, mC, m'A', rc. unverändert blieben. Dasselbe Resultat haben wir früher für ein festes System bereits gefunden.

Anmerk. Multiplicirt man die Gleichungen der Bewegung eines freien Systems von Punkten, nämlich die Gleichungen

$$\Sigma(m \cdot \partial^2 x) = \Sigma(mX),$$
$$\Sigma(m \cdot \partial^2 y) = \Sigma(mY),$$
$$\Sigma(m \cdot \partial^2 z) = \Sigma(mZ),$$

mit dt und integrirt man dann links und rechts nach t, zwischen den Grenz-Werthen 0 und θ von t, so erhält man

$$\Sigma(m \cdot \partial x_{\theta \div 0}) = \Sigma(m \cdot \int_{\theta \div 0} X \cdot dt),$$
$$\Sigma(m \cdot \partial y_{\theta \div 0}) = \Sigma(m \cdot \int_{\theta \div 0} Y \cdot dt),$$
$$\Sigma(m \cdot \partial z_{\theta \div 0}) = \Sigma(m \cdot \int_{\theta \div 0} Z \cdot dt).$$

Denkt man sich nun Stöße, wie mA, mB, mC, rc. als durch stetig wirkende Kräfte X·dt, Y·dt, Z·dt, rc. hervorgebracht, von sehr großer Intensität, welche eine sehr kurze Zeit θ hindurch wirken, und sind a, b, c, rc. die dadurch hervorgebrachten Geschwindigkeiten, so ist offenbar

$$\int_{\theta \div 0} X \cdot dt = A, \qquad \int_{\theta \div 0} Y \cdot dt = B, \qquad \text{u. s. w. f.}$$

und

$$\partial x_{\theta \div 0}{}^{**)} = a, \qquad \partial y_{\theta \div 0} = b, \qquad \text{u. s. w. f.};$$

---

*) In so fern nämlich $x = x_0 + x_1$, $x' = x_0 + x'_1$, rc. ist, hat man auch, wenn man differenziirt, $\partial x = \partial x_0 + \partial x_1$; $\partial x' = \partial x_0 + \partial x'_1$; u. s. w. f.; also $\partial x_1 = \partial x - \partial x_0$, $\partial x'_1 = \partial x' - \partial x_0$, u. s. w.

**) Wir schreiben hier $\partial x_{\theta \div 0}$ und verstehen darunter das was heraus-

und die vorstehenden Gleichungen gehen dadurch offenbar in die (Nr. 1. des §. 129.) über, nämlich in $\Sigma(ma) = \Sigma(mA)$, u. s. w. f.

Behandelt man die Gleichungen (§. 128. Nr. 6.) auf dieselbe Weise, so sieht man wiederum die Gleichungen (§. 129. Nr. 2.) hervorgehen.

Man bekommt also immer dieselben Gleichungen für den Fall plötzlicher Aenderungen, auch wenn man sich diese plötzlichen Aenderungen so denkt, als geschehen sie durch stetig wirkende Kräfte von sehr großer Intensität, die aber nur eine sehr kleine Zeit hindurch wirken.

§. 131.

Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punktes.

Sowohl bei Attraktionen als auch bei Repulsionen, wie wir sie in der Natur wahrnehmen, findet das Gesetz statt:

„daß die Wirkung eines Atoms einer Masse M auf einen „Atom der Masse M′ in der geraden Verbindungs-Linie bei„der Atome statt hat und genau gleich und entgegen ist der „Wirkung des letztern Atoms auf den erstern."

Geht man von dieser Erfahrung aus, so folgt, daß in einem freien Systeme von Massen-Punkten die gegenseitigen Attraktionen und Repulsionen derselben, wenn sie parallel mit sich nach irgend einem Punkte, also z. B. nach dem Schwer-Punkte des Systems fortgerückt gedacht werden, sich gegenseitig aufheben und vernichten.

Da nun nach (§. 128. 1.) die Bewegung des Schwer-Punktes eines Systems freier Massen-Punkte dieselbe ist, welche er annehmen würde, wenn alle, auf die einzelnen Theile des Systems wirkenden Kräfte parallel mit sich nach ihm fortgerückt gedacht würden, so folgt

„daß

---

kommt, wenn man in δx als Funktion von t, statt t zuerst θ dann 0 setzt, und letzteres von ersterem subtrahirt. Analoge Bedeutungen haben dann die Zeichen $\delta y_{\theta \div 0}$, u. s. w. f.

„daß wenn auf ein freies System von Massen-Punkten keine „andern Kräfte wirken als gegenseitige Anziehungen und Ab„stoßungen der Massen-Punkte selbst, dann die Bewegung „des Schwer-Punktes genau so statt findet, wie wenn auf „ihn gar keine Kräfte wirkten. Er geht daher dann in der „Richtung und mit der Größe seiner Anfangs-Geschwindig„keit konstant und geradlinig fort.

Dieses Gesetz wird das „Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punkts" genannt, ein Gesetz, welches nach dem Vorhergegangenen auch dann noch statt findet, wenn sich die Körper gegenseitig stoßen, und dabei entweder unelastisch oder beliebig elastisch sind*).

Die Bewegung des Schwer-Punkts des ganzen Planeten-Systems (d. h. der Sonne, der Planeten mit ihren Monden oder Satelliten und der Kometen) wenn überhaupt eine solche existirt, muß daher geradlinig und konstant gedacht werden, sobald man den Einfluß der Fixsterne außer Acht läßt.

Findet das Gesetz der gleichen Wirkung und Gegenwirkung auch bei Muskel-Kräften statt, so muß man noch aus dem Principe der Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punktes folgern, daß weder Mensch noch Thier durch seinen bloßen Willen seinen Schwer-Punkt verändern kann, so lange nicht Kräfte von außen auf ihn wirken, oder so lange er nicht nach außen zu, feste Stütz-Punkte hat.

Tropfbar flüssige und luftförmige Körper, ja selbst die unwägbaren Flüssigkeiten, wie Elektricität, Wärme, Luft, müssen demselben Gesetze unterworfen seyn, sobald wir das Gesetz der gleichen Wirkung und Gegen-Wirkung ihrer Atome auf einander auch bei ihnen voraussetzen. Strömen also solche Flüssigkeiten von einer Seite eines festen Körpers aus, so muß letzterer in der entgegengesetzten Richtung zurückweichen, damit die Bewegung des Schwer-Punkts des ganzen Systems dieselbe (z. B. in Ruhe) seyn kann, wie anfänglich, wo noch nichts ausströmte. — Und umgekehrt, bestätigen Versuche das letztere, so helfen solche auch das Gesetz der gleichen Wirkung und Gegen-Wirkung je zweier materiellen Atome auf einander bestätigen.

---

*) Wird ein Körper durch eine innere Explosion in Stücke zertrümmert, so muß das Prinzip doch noch gelten, wenn nur immer vom Schwer-Punkte des ganzen Systems, also mit Inbegriff dieser Stücke, von welchen jedes eine eigene Bewegung annehmen wird, die Rede ist.

§. 132.

Gesetz der Erhaltung der Inhalte.

Die Gleichungen (§. 128. III. 6.), welche die Umdrehung eines freien Systems von Massen-Punkten um seinen Schwer-Punkt enthalten, sagen aus, daß die Summen der statischen Momente aller in der unmittelbar nach t folgenden Zeit dt erworbenen Zuwachse an „Größen der Bewegung" um drei auf einander senkrechte und in O sich schneidende Momenten-Axen bezüglich gleich sind den Summen der statischen Momente aller zu Ende der Zeit t neu hinzutretenden Kräfte $mX \cdot dt$, $mY \cdot dt$, ꝛc. in Bezug auf dieselben drei Momenten-Axen.

I. Sind daher letztere Kräfte bloße Attraktions- oder Repulsiv-Kräfte, d. h. sind sie so, daß Wirkung und Gegen-Wirkung einander gleich und genau entgegen sind, so sind die Summen der letztern statischen Momente der Null gleich; also ist dann auch die Summe der erstern der Null gleich, während der Punkt O ein ganz beliebiger ist, und natürlich dann auch statt der drei auf einander senkrechten Axen jede beliebige vierte genommen werden kann.

Kommen aber unter den Kräften $mX \cdot dt$, $mY \cdot dt$, ꝛc. solche vor, welche nach einem festen Punkte hin gerichtet sind, so werden die statischen Momente dieser letztern nur in Bezug auf alle diejenigen Momenten-Axen nothwendig der Null gleich seyn, welche durch diesen festen Punkt gedacht sind.

Man hat daher allemal (nach §. 128. Nr. 6.)

$$1) \quad \begin{cases} \Sigma m(y \cdot \partial^2 x - x \cdot \partial^2 y) = 0, \\ \Sigma m(x \cdot \partial^2 z - z \cdot \partial^2 x) = 0, \\ \Sigma m(z \cdot \partial^2 y - y \cdot \partial^2 z) = 0, \end{cases}$$

so oft nur Attraktions- und Repulsiv-Kräfte allein wirken und die Koordinaten-Axen ganz beliebig gelegt sind, oder wenn auch noch Kräfte wirken, welche (einzelne oder alle Theile des Systems ergreifen, aber) nach einem festen Punkte hin gerichtet sind, sobald man diesen festen Punkt zum Anfangs-Punkte der Koordinaten nimmt.

II. Dieselben Gleichungen (1.) finden sogar dann noch

statt, wenn der Anfangs-Punkt der Koordinaten kein fester Punkt im absoluten Raume ist, sondern selbst noch geradlinig und konstant sich bewegt, sobald nur keine anderen Kräfte wirken, als solche wo Wirkung und Gegen-Wirkung der Theile des Systems auf einander, einander gleich sind. — Sind nämlich α, β, γ die Koordinaten-Werthe dieses beweglichen Anfangs-Punktes der neuen, mit den alten parallelen Axen, folglich, weil die Bewegung dieses Punktes geradlinig und konstant vorausgesetzt wird, solche Funktionen von t, daß

2) $\partial^2\alpha = 0$, $\partial^2\beta = 0$ und $\partial^2\gamma = 0$

ist; sind ferner x_1, y_1, z_1, x'_1, 2c. die neuen mit den alten parallel, aber aus dem beweglichen Punkte genommenen Koordinaten-Werthe der Massen-Punkte m, m′, m″, 2c., so hat man

3) $x = x_1 + \alpha$; $y = y_1 + \beta$; $z = z_1 + \gamma$; $x' = x'_1 + \alpha$; 2c.

also auch (wegen der Gleichungen 2.)

4) $\partial^2 x = \partial^2 x_1$; $\partial^2 y = \partial^2 y_1$; $\partial^2 z = \partial^2 z_1$; $\partial^2 x' = \partial^2 x'_1$; 2c.

Nun wird also, wenn man diese Werthe substituirt,

5) $\Sigma m(y\cdot\partial^2 x - x\cdot\partial^2 y) = \Sigma m[(y_1+\beta)\cdot\partial^2 x_1 - (x_1+\alpha)\cdot\partial^2 y_1]$
$= \Sigma m(y_1\cdot\partial^2 x_1 - x_1\cdot\partial^2 y_1) + \beta\cdot\Sigma(m\cdot\partial^2 x_1) - \alpha\cdot\Sigma(m\cdot\partial^2 y_1)$.

Auf der andern Seite hat man aber, weil die Kräfte mX, mY, mZ, mX′, 2c. sich gegenseitig vernichten

6) $\Sigma(mX) = 0$; $\Sigma(mY) = 0$; $\Sigma(mZ) = 0$;

und daher auch (nach §. 128. I. ♂.)

7) $\Sigma(m\cdot\partial^2 x) = \Sigma(m\cdot\partial^2 x_1) = 0$;
$\Sigma(m\cdot\partial^2 y) = \Sigma(m\cdot\partial^2 y_1) = 0$; 2c.

so daß die Gleichung (5.) in die nachstehende übergeht

8) $\Sigma m(y\cdot\partial^2 x - x\cdot\partial^2 y) = \Sigma m(y_1\cdot\partial^2 x_1 - x_1\cdot\partial^2 y_1)$.

Also gelten die Gleichungen (1.) auch noch, wenn man die Koordinaten-Werthe von dem konstant und geradlinig sich bewegenden Schwer-Punkte aus nimmt.

III. Integrirt man aber nun diese Gleichungen (1.) links und rechts nach allem t, so erhält man augenblicklich

$$9) \quad \begin{cases} \Sigma m(y\cdot\partial x - x\cdot\partial y) = c, \\ \Sigma m(x\cdot\partial z - z\cdot\partial x) = c', \\ \Sigma m(z\cdot\partial y - y\cdot\partial z) = c'', \end{cases}$$

wo die Ausdrücke zur Linken die Summe der statischen Momente aller zu Ende der Zeit im Systeme vorhandenen „Größen der Bewegung" sind, in Bezug auf die drei Koordinaten-Axen, als Momenten-Axen genommen. — Diese Momenten-Summen sind also immer konstant, so oft nur gegenseitige Attraktions- und Repulsiv-Kräfte wirken, man mag übrigens das Centrum der Momente beliebig im Raume fest oder konstant und geradlinig sich bewegend denken. — Wirken aber noch solche Kräfte, welche nach einem festen Punkte hin gerichtet sind, so sind diese Momenten-Summen nur dann konstant, wenn man diesen festen Punkt zum Centrum der Momente nimmt. — Diese Gleichungen ändern sich nicht durch den gegenseitigen Stoß der Körper und auch nicht, wenn einer durch eine Explosion von Innen zertrümmert, sobald nur alle Stücke wieder unter die m, m′, ꝛc. mit aufgenommen werden, eben weil unter allen diesen Annahmen die Körper nur gegenseitig auf einander einwirken, so daß Wirkung und Gegen-Wirkung der Theile des Systems auf einander, einander gleich und genau entgegen angenommen werden können.

IV. Da übrigens (nach I. Th. Mech. §§. 40.—42. und §. 41. Anmerkg.)

$$\pm\tfrac{1}{2}(y\cdot\partial x - x\cdot\partial y)\cdot dt \quad \text{oder} \quad \pm\tfrac{1}{2}(y\cdot dx - x\cdot dy)$$

der Inhalt des von der Projektion des Radius-Vektor an m, in der Ebene XOY in der Zeit dt beschriebenen Sektors ist, so kann man den Gleichungen (9.) indem man sie mit dt multiplicirt und dann links und rechts noch einmal nach t integrirt sich denkt, auch noch folgenden Sinn unterlegen:

die Summe der Produkte aus den Massen m, m′, ꝛc. in die von den Projektionen ihrer Radien-Vektoren auf irgend eine Ebene, in letzterer beschriebenen Sektoren ist mit der Zeit t proportional, wenn nur diese Sektoren positiv oder negativ genommen werden; je nachdem die Radien-Vektoren sie in einer Richtung oder in der entgegengesetzten Richtung beschreiben.

Die hier so eben, oder auch in den Gleichungen (9.) ausgesprochene Wahrheit nennt man daher auch das „Gesetz (Prin-

cip) der Erhaltung der Inhalte". — Es gilt noch, wenn auch Kräfte mitwirken in der Richtung der Massen-Punkte und eines festen Punktes, sobald man die Sektoren aus diesem festen Punkte nimmt.

V. Nimmt man für diese „Größen der Bewegung," wie sie links in der Gleichung (9.) vorkommen, die Ebene der größten Momenten-Summe, oder die sogenannte Haupt-Ebene der „Größen der Bewegung" (§. 34. d. II. Th.) und nennt man C die (konstante) größte Momenten-Summe selbst, so hat man nach (§. 34. d. II. Th.)

$$C = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

Dabei ist die Lage dieser Haupt-Ebene gegen die Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ, YOZ durch die drei Winkel bestimmt, deren Kosinusse bezüglich

$$\frac{c}{C}, \quad \frac{c'}{C} \quad \text{und} \quad \frac{c''}{C}$$

seyn werden. — Diese Haupt-Ebene hat also zu jeder Zeit eine und dieselbe Lage, und ist daher von Laplace die unveränderliche Ebene (plan invariable) dieses freien Systems genannt worden *).

Ist kein fester Punkt im System, so würde man sogar noch immer ein und dasselbe C finden, wenn man solches C zu verschiedenen Epochen berechnete und jedesmal den Schwer-Punkt des Systems zum Centrum der Momente nähme, auch wenn solcher unterdessen geradlinig und konstant sich bewegt haben sollte, wenn man nur nicht unterließe in die Gleichungen (9.) aus denen zunächst c, c' und c'' berechnet werden müssen, statt ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. nicht die wahren Seiten-Geschwindigkeiten, sondern die Differenzen zwischen den wahren Seiten-Geschwindigkeiten der Massen-Punkte m, m', ꝛc. und den Seiten-Geschwindigkeiten des Schwer-Punktes zu setzen; weil nun die Koordi-

*) Da die Planeten nicht Massen-Punkte sind, sondern Massen von bedeutender Größe, die außer der fortschreitenden Bewegung auch noch eine drehende haben, so wird man bei der Anwendung aller dieser allgemeinen Gesetze auf das Planeten-System, hierauf Rücksicht nehmen müssen, so wie dies weiter hinten gezeigt ist.

naten-Werthe aus dem (beweglichen) Schwer-Punkte des Systems genommen, also überhaupt statt der x, y, z, x', ꝛc. die x_1, y_1, z_1, x'_1, ꝛc. gesetzt werden, also auch statt ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. jetzt die ∂x_1, ∂y_1, ∂z_1, $\partial x_1'$, ꝛc. zu stehen kommen müssen, während doch

$$x_1 = x - \alpha, \quad y_1 = y - \beta, \quad z_1 = z - \gamma, \quad x'_1 = x' - \alpha, \text{ ꝛc.}$$

also auch

$$\partial x_1 = \partial x - \partial \alpha, \quad \partial y_1 = \partial y - \partial \beta, \quad \partial z_1 = \partial z - \partial \gamma,$$
$$\partial x'_1 = \partial x' - \partial \alpha, \text{ ꝛc.}$$

ist.

Diese Lage der Haupt-Ebene oder der unveränderlichen Ebene so wie die Größe C des Haupt-Momentes aller vorhandenen „Größen der Bewegung" müssen natürlich in den verschiedenen Epochen noch immer als dieselben gefunden werden, wenn sich auch die Massen-Punkte inzwischen gegenseitig gestoßen haben, oder wenn deren welche, vermöge einer aus ihrem Innern hervorgegangenen Explosion zertrümmert worden seyn sollten, sobald man nur im letzteren Falle die Trümmer zu den übrigen Massen-Punkten hinzuzählt *).

Anmerk. Will man die Lage der „unveränderlichen Ebene" für unser Planeten-System berechnen zu irgend einer Epoche, so muß man nicht übersehen, daß in den Gleichungen (III. 9.), welche c, c' und c'' zu liefern haben, das Summen-Zeichen Σ sich nicht bloß auf die 30 Körper bezieht, welche man von diesem Planeten-System kennt (wenn man die Cometen wegen der Kleinheit ihrer Massen außer Acht läßt), sondern daß jeder einzelne dieser Welt-Körper auch wieder in unendlich kleine Massen-Elementchen zerlegt gedacht und für jeden einzelnen die durch Σ angezeigte Summe (durch dreifache Integration in der Regel) gefunden werden muß. Dieses letztere erleichtert man sich dadurch, daß man die dreifache Integration umgeht. Man legt

*) Findet man daher zu verschiedenen Epochen dieses Haupt-Moment C verschieden, so könnte man daraus folgern, daß entweder Kräfte von außen auf das System gewirkt, oder daß Stöße gegen, dem Systeme fremde Körper, statt gefunden haben.

nämlich durch den Schwer-Punkt des Welt-Körpers neue Koordinaten-Axen, parallel mit den alten und führt, außer den alten Koordinaten-Werthen x_1, y_1, z_1 des Schwer-Punktes des Welt-Körpers noch die aus diesem Schwer-Punkte genommenen Koordinaten-Werthe x, y, z der verschiedenen Elemente dm desselben ein, während m seine ganze Masse vorstellen mag. Will man nun zuerst c berechnen (welches der auf OZ senkrechten Koordinaten-Ebene XOY angehört), so findet man sogleich für den Theil von c, welcher von diesem Welt-Körper herrührt, den Ausdruck

$$(\odot)\cdots \quad m\cdot(y_1\cdot\partial x_1 - x_1\cdot\partial y_1) + \Sigma(y\cdot\partial x - x\cdot\partial y)\cdot dm.$$

Der erste Summand dieser Summe ist das statische Moment der auf XOY projicirten „Größe der Bewegung" des Schwer-Punktes des Welt-Körpers, unter der Voraussetzung, daß die ganze Masse des letztern in diesem Schwer-Punkte concentrirt wäre. Er ist also von der Drehung des Körpers ganz unabhängig. Der andere Summand des Ausdrucks ($\odot$) ist offenbar von der Bewegung des Schwer-Punktes, also von der fortschreitenden Bewegung des Weltkörpers ganz unabhängig, und nur abhängig von der Drehung des Körpers um seinen Schwer-Punkt. Weil aber dieser Theil

$$\Sigma(y\cdot\partial x - x\cdot\partial y)\cdot dm$$

(nach §. 37.) die Summe der statischen Momente der auf XOY projicirten Dreh-Kräfte vorstellt, so ist solcher allemal

$$(☾)\cdots \quad = \mathfrak{A}p\cdot\alpha'' + \mathfrak{B}q\cdot\beta'' + \mathfrak{C}r\cdot\gamma'',$$

wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei Haupt-Trägheits-Momente, ferner p, q, r die zu diesen drei Haupt-Dreh-Axen gehörigen Winkel-Geschwindigkeiten, und α'', β'', γ'' die Kosinusse der Winkel vorstellen, welche die drei gedachten Haupt-Dreh-Axen mit der (auf XOY senkrechten) OZ bilden.

Die Haupt-Trägheits-Momente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, würden sich für jeden Welt-Körper berechnen lassen, dessen Gestalt und Masse man kennt, wenn man voraussetzen dürfte, daß die Masse in seinem Volumen gleichmäßig vertheilt, d. h. daß er homogen sey. Im Allgemeinen werden aber die Haupt-Trägheits-Mo-

mente kleiner seyn, als die unter der so eben gemachten Voraussetzung berechneten, weil man einiges Recht hat anzunehmen, daß die Welt-Körper alle um ihren Schwer-Punkt herum dichtere Schichten haben je näher diese dem Schwer-Punkte liegen. Man wird diese Trägheits-Momente wahrscheinlich nie genauer finden können; doch werden sie in der Regel alle drei nur wenig von einander verschieden seyn, weil jeder Welt-Körper nahehin eine Kugel ist, für welche letztere die drei Trägheits-Momente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, alle drei einander gleich seyn würden. — Die drei Winkel-Geschwindigkeiten p, q, r sind für mehrere der Welt-Körper bekannt, für andere wiederum sehr verschieden angegeben. An einer genaueren Berechnung dieses Theils (☾) ist daher fast für immer zu verzweifeln. Man begnügt sich deshalb damit, zu zeigen, daß dieser Theil (☾) ganz nahehin von der Zeit unabhängig ist, d. h. zu allen Zeiten ganz nahehin einen und denselben Werth hat. Es hängt nämlich die Drehung des Welt-Körpers ab, einmal von dem Anfangs-Gegen-Paar, welches zur Hervorbringung der Anfangs-Drehung nöthig seyn würde, und dann noch von den stetig hinzutretenden Kräften, in so fern sie die Anfangs-Drehung ändern. Diese letztern sind aber hier die Anziehungen der übrigen Welt-Körper, in so fern sie die nicht kugelförmige Rinde des Welt-Körpers betreffen, nicht aber den kugelförmigen (größtmöglichsten) Kern desselben; denn die Anziehungen auf diesen letztern ändern nur die Bewegung des Schwer-Punktes, nicht aber die Drehung (vgl. II. Th. §. 66.). Da nun die nicht kugelförmige Rinde gegen den kugelförmigen Kern so sehr klein ist, so kann man, wie auch die oberflächlichen Rechnungen in jedem besondern Falle besonders sehen lassen, diesen von den Anziehungen herrührenden Theil des Ausdrucks (☾) außer Acht lassen, und es bleibt also nur der von dem Anfangs-Gegen-Paare herrührende Theil desselben Ausdrucks (☾) zu beachten übrig, welcher (nach §. 101. VII.) konstant ist. Daraus folgt, daß die Summe

$$\Sigma m \cdot (\mathfrak{y}_1 \cdot \partial \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_1 \cdot \partial \mathfrak{y}_1)$$

der ersten Theile des Ausdrucks (⊙) für die dreißig Welt-Kör-

per genommen, welche keine weitere Integration, sondern nur die Lage der Schwer-Punkte und die Massen der Welt-Körper erfordert, zwar nicht das (nach III. 9.) gesuchte c, aber doch ebenfalls ganz nahehin konstant ist, so daß man für diese Welt-Körper hat:

$$(\text{♂})\cdots \begin{cases} \Sigma m\cdot(\mathfrak{y}_1\cdot\partial\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_1\cdot\partial\mathfrak{y}_1) = c_1,\\ \Sigma m\cdot(\mathfrak{x}_1\cdot\partial\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_1\cdot\partial\mathfrak{x}_1) = c'_1,\\ \Sigma m\cdot(\mathfrak{z}_1\cdot\partial\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_1\cdot\partial\mathfrak{z}_1) = c''_1.\end{cases}$$

Findet man nun hieraus die Lage der Ebene der größten Momenten-Summe, d. h. unter der Voraussetzung, daß die Massen aller Welt-Körper in ihren Schwer-Punkten concentrirt sind, so findet man die Lage derselben, so wie die größte Momenten-Summe wiederum konstant, und so findet sich unter dieser letzteren Voraussetzung für unser Planeten-System wiederum eine ganz nahehin unveränderliche Ebene, welche zwar von der nach (III. 9. sqq.) gesuchten verschieden ist, aber mit dieser letztern (wenn man sie beide durch einen und denselben Punkt z. B. durch den Schwer-Punkt der Sonne gehen läßt) eine, ganz nahehin immer dieselbe bleibende Durchschnitts-Linie und einen ebenfalls ganz nahehin immer konstanten Winkel bildet, während sie selbst zu allen Epochen ganz nahehin dieselbe Lage behält.

Zum Anfangs-Punkt O der Koordinaten haben wir den Schwer-Punkt des ganzen Systems genommen. Reducirt man die Gleichungen (♂) auf Koordinaten, welche parallel mit diesen aus dem Schwer-Punkt der Sonne genommen und durch x, y, z, x', 2c. bezeichnet sind, so gehen die Gleichungen (♂) in folgende über

$$(\text{♄})\cdots \begin{cases} \Sigma m(y\cdot\partial x - x\cdot\partial y) - \frac{1}{\Sigma m}\cdot[\Sigma(my)\cdot\Sigma(m\cdot\partial x) - \Sigma(mx)\cdot\Sigma(m\cdot\partial y)] = c_1,\\ \Sigma m(x\cdot\partial z - z\cdot\partial x) - \frac{1}{\Sigma m}\cdot[\Sigma(mx)\cdot\Sigma(m\cdot\partial z) - \Sigma(mz)\cdot\Sigma(m\cdot\partial x)] = c'_1,\\ \Sigma m(z\cdot\partial y - y\cdot\partial z) - \frac{1}{\Sigma m}\cdot[\Sigma(mz)\cdot\Sigma(m\cdot\partial y) - \Sigma(my)\cdot\Sigma(m\cdot\partial z)] = c''_1,\end{cases}$$

wo x, y, z, x', 2c. die aus dem Schwer-Punkte der Sonne genommenen Koordinaten-Werthe der Schwer-Punkte der übri-

gen Körper vorstellen, während ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, ꝛc. die Seiten-Geschwindigkeiten dieser letzteren sind, so daß beides als durch Beobachtungen gegeben angesehen werden kann.

Da übrigens in der Summe Σm auch die Masse der Sonne als Summand sich befindet, nicht aber die $\Sigma(mx)$, $\Sigma(my)$, ꝛc. $\Sigma(m \cdot \partial x)$, $\Sigma(m \cdot \partial y)$, ꝛc., weil die Koordinaten-Werthe aus dem Mittel-Punkte der Sonne genommen sind, so ist in jeder der Gleichungen (♄) das mit den eckigen Klammern versehene Glied, gegen das erstere allemal nur sehr klein.

Uebrigens setzt diese ganze Rechnung voraus, daß unser Sonnen-System durch die Einwirkung der Fixsterne nicht gestört wird, und daß überhaupt das ganze Planeten-System nur gegenseitige Einwirkungen, des einen dieser Körper auf den anderen und dieses letzteren wieder auf den ersteren, erfahre.

§. 133.

Gesetz der lebendigen Kräfte.

Kehren wir nun zu der allgemeinen Gleichung der Bewegung des (§. 125.) zurück, nämlich zu der Gleichung

$$1)\quad \Sigma m(X-\partial^2 x)\cdot\delta x+\Sigma m(Y-\partial^2 y)\cdot\delta y+\Sigma m(Z-\partial^2 z)\cdot\delta z=0,$$

die für alle beliebigen Werthe von δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. gilt, welche den gegebenen Bedingungs-Gleichungen

$$2)\quad L=0,\quad L'=0,\quad L''=0,\ \text{ꝛc.};$$

also auch den Gleichungen

$$3)\ \begin{cases}\delta L=\partial L_x\cdot\delta x+\partial L_y\cdot\delta y+\partial L_z\cdot\delta z+\partial L_{x'}\cdot\delta x'+\text{ꝛc.}=0,\\ \delta L'=\partial L'_x\cdot\delta x+\partial L'_y\cdot\delta y+\partial L'_z\cdot\delta z+\partial L'_{x'}\cdot\delta x'+\text{ꝛc.}=0,\\ \quad\text{u. s. w. f.,}\end{cases}$$

genügen.

Setzen wir aber jetzt voraus:

A) daß in den Gleichungen $L=0$, $L'=0$, ꝛc. die Zeit t explicit gar nicht vorkommt, sondern nur implicit, in so fern x, y, z, x', ꝛc. Funktionen von t sind; und

B) daß auf die Massen-Punkte m, m', m'', ꝛc. nur gegenseitige Einwirkungen statt finden, aber keine von außen wir-

kende Kraft vorhanden, und daß das System überhaupt nach außen hin ganz frei sey.

Nach dem d'**Alembert**schen Principe, welches die Gleichung (1.) geliefert hat, (oder nach §. 125.) sind $\varkappa\cdot\delta x$, $\varkappa\cdot\delta y$, $\varkappa\cdot\delta z$, $\varkappa\cdot\delta x'$, rc. (in so fern wir $\varkappa$ unendlich-klein denken können) die unendlich-kleinen Zuwachse, welche die Koordinaten-Werthe x, y, z, x', rc. dadurch erlitten haben, daß eine Hand in das von den verlorenen und im Gleichgewicht sich haltenden Kräften ergriffene System von außen eingriff und das System in eine, von der vorigen unendlich wenig verschiedene Lage brachte, jedoch so, daß die Koordinaten-Werthe der Massen-Punkte in ihrer neuen Lage noch immer den Bedingungen $L = 0$, $L' = 0$, rc. genügen. Man kann sich nun diese Koordinaten-Werthe x, y, z, x', rc. als Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen u, und die Aenderungen $\varkappa\cdot\delta x$, $\varkappa\cdot\delta y$, rc. derselben dadurch entstanden denken, daß u um das unendlich-kleine $du = \varkappa$ wächst. Dann hat man, weil $x_\varkappa$ jetzt $= x_{u+\varkappa} = x + \partial x_u \cdot \varkappa +$ rc. wird, u. s. w. f. —

$$\delta x = \partial x_u, \quad \delta y = \partial y_u, \quad \delta z = \partial z_u, \quad \delta x' = \partial x'_u, \text{ rc.}$$

und, wenn L, L', rc. diesen Buchstaben u selbst nicht explicit enthalten

$$\delta L = \partial L_u{}^{*)}, \quad \delta L' = \partial L'_u, \text{ rc.}$$

Weil aber u ganz beliebig ist, so kann man auch $u = t$ nehmen, so daß dann, wenn die bloßen ∂ auf alle t sich beziehen,

4) $\delta x = \partial x$, $\delta y = \partial y$, $\delta z = \partial z$, $\delta x' = \partial x'$, rc.

und auch, weil (nach A.) L, L', rc. t selbst explicit nicht enthalten sollen,

---

*) Enthält L den Veränderlichen u selbst explicit, so ist

$$\partial L_u = (\partial L_u) + \partial L_x \cdot \partial x_u + \partial L_y \cdot \partial y_u + \text{ rc.},$$

wo das Zeichen (∂L_u) zur Rechten den Differential-Koeffizienten von L nach dem explicit enthaltenen u vorstellen soll. Um dieses Glied (∂L_u) ist aber nun ∂L_u von δL verschieden. So wie jedoch L den Veränderlichen u gar nicht (explicit) enthält, so fällt dieses Glied (∂L_u) zur Rechten fort, und dann ist ∂L_u links, von δL gar nicht mehr verschieden.

5) $\delta L = \partial L, \quad \delta L' = \partial L'$, rc.

wird.

Unter diesen Voraussetzungen geht aber die allgemeine Gleichung (1.) der Bewegung sogleich über in

6) $\Sigma(m \cdot \partial x \cdot \partial^2 x) + \Sigma(m \cdot \partial y \cdot \partial^2 y) + \Sigma(m \cdot \partial z \cdot \partial^2 z)$
$= \Sigma m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z)$,

welche also mit den Gleichungen (5.) zugleich statt hat, und wo sich alle bloßen ∂ auf die Zeit t beziehen. Dies letztere, daß die Gleichungen $\partial L = 0$, $\partial L' = 0$, rc. zugleich mit statt haben, folgt aus der Voraussetzung (A.).

Aus der Voraussetzung (B.) dagegen folgt, daß der Ausdruck zur Rechten (in 6.) allemal ein vollständiges Differenzial ist, so daß ein Integral in x, y, z, rc. existirt, ohne daß man die durch x, y, z, x', rc. bezeichneten Funktionen von t selbst zu kennen braucht, oder, mit andern Worten, während diese letzteren Funktionen ganz beliebige seyn können. Dies erkennt man aus folgenden Betrachtungen: Ist nämlich K die Kraft zwischen m und z. B. m', welche von m nach m' hin, von m' aber auch wieder nach m hin wirkt, so ist die erstere Wirkung K nach den drei Axen zerlegt, wenn r die Entfernung zwischen m und m' vorstellt,

$$K \cdot \frac{x'-x}{r}, \quad K \cdot \frac{y'-y}{r} \quad \text{und} \quad K \cdot \frac{z'-z}{r}.$$

Die andere Wirkung, nach den drei Axen zerlegt, ist dagegen bezüglich

$$-K \cdot \frac{x'-x}{r}, \quad -K \cdot \frac{y'-y}{r} \quad \text{und} \quad -K \cdot \frac{z'-z}{r}.$$

Folglich ist der von dieser doppelten Wirkung K herrührende Theil von $\Sigma m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z)$,

$$(♀) \cdots = -K \cdot \frac{(x'-x)(\partial x'-\partial x)+(y'-y)(\partial y'-\partial y)+(z'-z)(\partial z'-\partial z)}{r}.$$

Auf der andern Seite hat man

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

also, wenn man nach allem t differenziirt,

$$r \cdot dr = (x'-x)(\partial x'-\partial x) + (y'-y)(\partial y'-\partial y) + (z'-z)(\partial z'-\partial z);$$

folglich wird derselbe Theil (♀) von $\Sigma m(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)$,

$$= -K\cdot\partial r,$$

während K selbst konstant oder doch eine Funktion von r, übrigens positiv oder negativ ist, je nachdem K eine Attraktion oder eine Repulsion ausdrückt. Dieser Theil läßt sich also (nach t) integriren, ohne daß man x, y, z, x', ꝛc. in t ausgedrückt vorher zu kennen braucht. Da nun der Voraussetzung (B.) zu Folge die Summe $\Sigma m(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)$ aus lauter solchen Theilen besteht, so ist auch diese ganze Summe

$$\Sigma m(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)$$

unter der Voraussetzung (B.) integrabel (ohne daß man vorher x, y, z, x', ꝛc. in t ausgedrückt zu kennen braucht).

Sind nun v, v', ꝛc. die Geschwindigkeiten von m, m', ꝛc., so daß

$$v^2 = \partial x^2+\partial y^2+\partial z^2; \quad v'^2 = \partial x'^2+\partial y'^2+\partial z'^2; \text{ ꝛc.}$$

ist, und integrirt man nun links und rechts nach allem t zwischen den Grenzen $t=0$ und $t=t$; bezeichnen dabei 𝔳, 𝔳', ꝛc. die Anfangs-Werthe von v, v', ꝛc. (für $t=0$); ist endlich

$$7)\quad \int m\Sigma(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)\cdot dt = f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}},$$

und bedeuten 𝔵, 𝔶, 𝔷, 𝔵', ꝛc. die Anfangs-Werthe von x, y, z, x', ꝛc., so erhält man

$$8)\quad \Sigma(mv^2)-\Sigma(m\mathfrak{v}^2) = 2f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}} - 2f_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\mathfrak{x}',\text{ꝛc.}}$$

Diese Gleichung nennt man das „Gesetz der lebendigen Kräfte". Es lautet in Worte gekleidet, so: „Der Unterschied der Summen der zu Ende und zu Anfang der Zeit t „in allen Massen-Punkten vorhandenen lebendigen Kräfte hängt „bloß von der Lage der Massen-Punkte zu Ende und zu Anfang der Zeit t ab, und keinesweges von den Bahnen, welche „die Massen-Punkte beschrieben haben, also auch nicht von den „durch $L=0$, $L'=0$, ꝛc. gegebenen Verbindungen der „Punkte*), sobald nur keine anderen Kräfte wirken, als solche von

*) Die Gleichung (3. des §. 38. d. I. Th. Mech.) ist der speciellste Fall dieses Gesetzes. Der Anfänger wird daher wohl thun, jenen Paragraphen noch nachzusehen.

„den Massen-Punkten selbst ausgehende gegenseitige Attraktions-„oder Repulsiv-Kräfte."

§. 134.

Aus diesem Gesetze folgt sogleich:

1) Die Summe der lebendigen Kräfte ist konstant, so oft gar keine bewegende Kraft (d. h. keine stetig wirkende Kraft) vorhanden ist, und die Geschwindigkeiten selbst sich nur in Folge des gegenseitigen Zusammenhanges der Massen-Punkte unter einander, oder in so fern die Punkte gezwungen sind, auf einer festen Fläche oder Linie zu bleiben, sich ändern.

2) Wenn alle Punkte des Systems zu verschiedenen Epochen genau in einer und derselben Stellung sich befinden, so ist auch zu denselben Epochen allemal die Summe der lebendigen Kräfte dieselbe; in allen den Fällen nämlich, wo das Gesetz der lebendigen Kräfte statt hat.

Anmerk. 1. Bei dem Stoße der Körper muß das Gesetz (§. 133. Nr. 8.) während der ganzen Dauer des Stoßes statt haben. Sind aber die Körper elastisch, und nehmen sie nach dem Stoße ihre vorige Gestalt vollkommen wieder an, so findet auch noch die Folgerung (§. 134. Nr. 2) statt, d. h. es findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt. (Vgl. §. 23. wo wir dasselbe Resultat in einem der einfachsten Fälle des Stoßes bereits erhalten haben).

Anmerk. 2. Da φ oder $\int_{t\div 0} m\Sigma(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)\cdot dt$ aus lauter Theilen von der Form $-\int_{\varrho\div\varrho'} K\cdot dr$ besteht (wegen der Voraussetzung B.), wo ϱ' und ϱ die Werthe der Entfernung r der beiden auf einander wirkenden Massen-Elementchen für $t=0$ und für $t=t$ sind; — da ferner dieses letztere Integral

a) unter der Voraussetzung, daß K eine Attraktion ist, negativ oder positiv wird, je nachdem $\varrho>\varrho'$ oder $\varrho<\varrho'$ ist; dagegen

b) unter der Voraussetzung, daß K eine Repulsiv-Kraft ist, positiv oder negativ wird, je nachdem $\varrho>\varrho'$ oder $\varrho<\varrho'$ ist;

so folgt noch aus der Gleichung (8. des §. 133.): Unter der Voraussetzung, daß nur Attraktions-Kräfte wirken, erleidet die Summe der lebendigen Kräfte einen Verlust oder einen Zuwachs, je nachdem die Entfernung aller Massen-Punkte von einander größer oder kleiner wird, dagegen findet unter der Voraussetzung, daß nur Repulsiv-Kräfte wirken, gerade das Umgekehrte statt *).

Dies gilt natürlich alles auch dann noch, wenn

$$\partial x = \partial y = \partial z = 0,$$

d. h. wenn irgend einer (oder mehrere) der anziehenden oder abstoßenden Massen-Punkte absolut fest ist.

Eben so wird ein Gewicht P, welches an einer Maschine, oder an irgend einem System materieller Punkte angebracht wird, eine Vermehrung oder Verminderung der Summe der lebendigen Kräfte um 2Ph hervorbringen, wenn es um die Höhe h sinkt oder steigt, welches auch sein dabei zurückgelegter Weg seyn mag, vertikal oder schief, geradlinig oder krummlinig.

Anmerk. 3. Geben wir noch einige Beispiele von Bewegungen, wo das „Gesetz der lebendigen Kräfte" nicht statt hat.

Denken wir uns zunächst, daß einer der Massen-Punkte gezwungen wäre auf einer sich bewegenden Fläche zu bleiben, so würde die Gleichung dieser Fläche die Zeit t explicit in sich aufnehmen, so daß sie sich vorstellen ließe durch

$$L_{x,y,z,t} = 0.$$

Dann aber würde man nicht $\delta x = \partial x$, $\delta y = \partial y$, ꝛc. nehmen können, weil diese Werthe von δx, δy, ꝛc. nicht der Gleichung $\delta L = 0$ genügen würden (außer zu denjenigen bestimmten Zeit-Punkten für welche gerade der Werth $\partial L_t = 0$ werden würde). Also hören jetzt die Schlüsse des Paragraphen auf, und das Gesetz (§. 133. Nr. 8.) braucht nicht mehr wahr zu seyn.

*) Man folgert daraus, daß bei der Bewegung eines elastischen Fluidums allemal eine Vermehrung der Summe der lebendigen Kräfte statt findet, so oft sich solches ausdehnt; daß dagegen allemal eine Verminderung dieser Summe der lebendigen Kräfte eintritt, so oft dieses Fluidum sich verdichtet.

Daß das Gesetz der lebendigen Kräfte in diesem Falle wirklich nicht statt findet, davon überzeugt man sich noch auf folgende Weise. Zu Ende der Zeit t wird die Fläche $L = 0$ von dem Massen-Punkte m gedrückt, und der (normale) Gegendruck R zu den Kräften noch hinzugefügt, würde also das Daseyn der Fläche $L = 0$ überflüssig machen. Da nun die Kosinusse der Winkel, welche die Normale mit den Koordinaten-Axen macht, bezüglich

$$\frac{\partial L_x}{W}, \quad \frac{\partial L_y}{W} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L_z}{W}$$

sind, wenn $W = \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2}$

gesetzt worden ist, so ist, wenn man die Fläche $L = 0$ weglassen will, in der Summe

$$\Sigma m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z)$$

das Glied

$$1) \qquad R \cdot \frac{\partial L_x \cdot \partial x + \partial L_y \cdot \partial y + \partial L_z \cdot \partial z}{W}$$

nothwendig enthalten. Nun ist aber, wenn man $L = 0$ nach allem t differenziirt, weil L den Veränderlichen t noch explicit enthält,

$$\partial L_t + \partial L_x \cdot \partial x + \partial L_y \cdot \partial y + \partial L_z \cdot \partial z = 0.$$

Folglich geht der Ausdruck (1.) in

$$2) \qquad -R \cdot \frac{\partial L_t}{W}$$

über. Der Ausdruck zur Rechten in der Gleichung (8. des §. 133.) würde daher das Glied

$$-2\int_{t \div 0} \left(\frac{R}{W} \cdot \partial L_t\right) \cdot dt$$

noch in sich aufnehmen, wo die Integration nach allem t stattfinden muß, während in dem Faktor ∂L_t nur nach dem in L explicit enthaltenen t differenziirt ist, so daß dieses Integral allerdings von der Bahn des Punktes m abhängig ist, weil man diese Integration nicht vornehmen kann, wenn man nicht vorher x, y, z bereits als Funktionen von t kennt.

Als

Als zweites Beispiel der Bewegung, in welchem das Gesetz der lebendigen Kräfte nicht statt hat, betrachten wir den Fall, in welchem der Massen-Punkt m zwar auf einer festen Fläche bleiben muß, aber die Reibung desselben auf ihr noch beachtet werden soll. Nennen wir wieder R den Druck, so ist μR die Reibung, welche (nach den drei Axen zerlegt) mit zu den Kräften mX, mY, mZ noch hinzugenommen werden soll. Also kann man nun von $\Sigma m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z)$ nicht mehr das Integral finden, so lange nicht x, y, z und der unbekannte Druck R, bereits in t ausgedrückt sind.

Die Reibung μR wirkt in der Richtung der Tangente der Bahn, der Bewegung entgegen. Ist daher s der in der Zeit t beschriebene Bogen, so sind

$$-\mu R \cdot \frac{\partial x}{\partial s}, \quad -\mu R \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \text{und} \quad -\mu R \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

die Kräfte, in welche sich die Reibung nach den drei Axen zerlegt; folglich ist der aus der Reibung hervorgehende Theil von

$$\Sigma m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z),$$

$$= -\mu R \cdot \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial s} = -\mu R \cdot \partial s.$$

Integrirt man nun diesen Theil, so findet man die Aenderung des Ausdrucks $\Sigma mv^2 - \Sigma m\mathfrak{v}^2$,

$$= -\int_{t=0} \mu R \cdot \partial s \cdot dt,$$

so daß man sieht, wie diese Reibung allemal eine Verminderung in der Summe der lebendigen Kräfte erzeugt.

Alles dieses letztere gilt auch noch, wenn zwei der Körper sich an einander reiben *).

Anmerk. 4. Die Summe $\Sigma(mv^2)$ der lebendigen Kräfte ist immer positiv, höchstens Null. Ist jedoch die Summe der lebendigen Kräfte der Null gleich, dann ist auch nothwendig jede einzelne Geschwindigkeit aller einzelnen Punkte der Null gleich, d. h. die Bewegung hat aufgehört.

*) Desgleichen bringen die widerstehenden Flüssigkeiten, in denen ein Körper sich bewegt, allemal eine Verminderung an der Summe der lebendigen Kräfte hervor.

Weil aber Reibung, Widerstand der Luft, des Wassers, oder irgend eines sogenannten Mittels, die Summe der lebendigen Kräfte fortwährend vermindern, so folgt, daß sie auch Stillstand hervorbringen können, und allemal hervorbringen müssen, so oft diese Verminderung der lebendigen Kräfte nicht von den vorhandenen Geschwindigkeiten selbst abhängig ist (wie z. B. bei der Reibung); — so lange nicht Ereignisse eintreten, welche die Summe der lebendigen Kräfte wiederum vermehren.

Zu diesen letztern, neu hinzutretenden, die Summe der lebendigen Kräfte vermehrenden Ursachen gehören z. B. die Uhrfedern, oder die Gewichte an den Uhren, u. s. w. f.

§. 135.

Denkt man sich die Bewegung eines Systems von Massen-Punkten m, m', m'', 2c. in eine fortschreitende des Schwer-Punktes (welcher die Geschwindigkeit v_0 haben mag, zu Ende der Zeit t) und zu gleicher Zeit in eine drehende Bewegung um diesen Schwer-Punkt zerlegt (nach dem §. 128.), sind dabei v, v', 2c. die wahren Geschwindigkeiten der Massen-Punkte m, m', 2c.; sind dagegen v_1, v'_1, 2c. die Geschwindigkeiten der Umdrehung um den Schwer-Punkt *), so hat man allemal

$$\Sigma(mv^2) = v_0^2 \cdot \Sigma(m) + \Sigma(mv_1^2).$$

Sind nämlich x, y, z, x', 2c. die Koordinaten-Werthe von m, m', 2c.; dagegen x_1, y_1, z_1, x'_1, 2c. die Koordinaten-Werthe derselben Massen-Elementchen m, m', 2c., aber aus dem Schwer-Punkte des Systems übrigens mit den erstern parallel genommen, und sind zuletzt noch x_0, y_0, z_0, die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punkts selber, so hat man

$$x = x_0 + x_1, \quad y = y_0 + y_1, \quad z = z_0 + z_1, \quad x' = x'_0 + x'_1, \text{ 2c.}$$

also auch

$$\partial x = \partial x_0 + \partial x_1, \quad \partial y = \partial y_0 + \partial y_1, \quad \partial z = \partial z_0 + \partial z_1, \text{ 2c.}$$

Dabei ist $\quad v_0^2 = \partial x_0^2 + \partial y_0^2 + \partial z_0^2$

und $\quad v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2; \quad v_1^2 = \partial x_1^2 + \partial y_1^2 + \partial z_1^2;$

$\quad v'^2 = \partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2; \quad v'^2_1 = \partial x'^2_1 + \partial y'^2_1 + \partial z'^2_1;$

u. s. w. f. — Wegen der Eigenschaften des Schwer-Punkts hat man aber

---

*) Es ist also nach dieser Annahme v die mittlere Kraft aus v_0 und v_1; desgleichen v' die mittlere Kraft aus v_0 und v'_1, u. s. w. f., wie solche mittlere Kräfte nach dem Parallelogramm der Kräfte sich ergeben.

$$\Sigma(mx_1) = 0, \quad \Sigma(my_1) = 0, \quad \Sigma(mz_1) = 0;$$

also auch

$$\Sigma(m \cdot \partial x_1) = 0, \quad \Sigma(m \cdot \partial y_1) = 0, \quad \Sigma(m \cdot \partial z_1) = 0;$$

und diese letztern Gleichungen verursachen, daß wenn man in $\Sigma(mv^2)$ d. h. in $\Sigma m(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)$ statt ∂x, ∂y, ∂z, ꝛc. ihre vorstehenden Werthe $\partial x_0 + \partial x_1$, $\partial y_0 + \partial y_1$, ꝛc. substituirt, die bei dem quadriren eingehenden doppelten Produkte, deren Summen bezüglich

$$2\Sigma(m \cdot \partial x_0 \cdot \partial x_1), \quad 2\Sigma(m \cdot \partial y_0 \cdot \partial y_1), \quad 2\Sigma(m \cdot \partial z_0 \cdot \partial z_1),$$

oder auch

$$2\partial x_0 \cdot \Sigma(m \cdot \partial x_1), \quad 2\partial y_0 \cdot \Sigma(m \cdot \partial y_1), \quad 2\partial z_0 \cdot \Sigma(m \cdot \partial z_1)$$

sind, sich wegheben.

Wenden wir diesen Satz auf die Himmels-Körper an. — Ist nämlich U das, was hier vorstehend durch $\Sigma(mv_1^2)$ ausgedrückt ist, für alle Massen-Elementchen eines Himmels-Körpers, in Bezug auf den Schwer-Punkt desselben; und ist u die Geschwindigkeit dieses Schwer-Punktes, so ist, wenn wir jetzt unter m die ganze Masse des Himmels-Körpers uns denken, (nach §. 135.) die Summe der lebendigen Kräfte aller Massen-Elementchen dieses Himmels-Körpers

$$= U + mu^2.$$

Denken wir uns nun alle Körper des Sonnen-Systems, und für sie U, u und m durch angehängte Striche von einander unterschieden, so läßt sich die Gleichung (§. 133. Nr. 8.) auch so schreiben

$$1) \qquad \Sigma U + \Sigma(mu^2) = 2f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}} + D,$$

wo D statt der Konstante steht, während das Summen-Zeichen Σ sich auf die Sonne, auf alle Planeten, auf alle Monde, und selbst auf die Kometen erstreckt, nur daß die Massen der letztern durchaus nicht bekannt sind, und daher in ähnlichen Untersuchungen meistens als unbedeutend außer Acht gelassen werden.

Ist nun V die Geschwindigkeit des Schwer-Punktes des Sonnen-Systems, und sind x_1, y_1, z_1, x'_1, ꝛc. die aus diesem Schwer-Punkte genommenen Koordinaten-Werthe der Mittel-Punkte der Welt-Körper, so hat man noch (nach §. 135.)

$$2) \quad \Sigma(mu^2) = V^2 \cdot \Sigma(m) + \Sigma m(\partial x_1^2 + \partial y_1^2 + \partial z_1^2),$$

wodurch die Gleichung (1.) in die folgende übergeht:

$$3)\quad \Sigma U + V^2 \cdot \Sigma(m) + \Sigma m(\partial x_1{}^2 + \partial y_1{}^2 + \partial z_1{}^2) = 2 f_{x,y,z,x',\text{rc.}} + D,$$

wo

$$4)\quad f_{x,y,z,x',\text{rc.}} = \int m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt$$

ist, während X, Y, Z, X′, rc. die Attraktions-Kräfte zwischen je zweien Welt-Körpern vorstellen.

Ist daher ε die Größe der Attraktion zweier Einheits-Massen auf einander in der Einheits-Entfernung, und ist ϱ die Entfernung der Mittel-Punkte zweier Welt-Körper von einander, während die Massen der letztern m und m′ seyn mögen, so ist die Attraktion dieser beiden Welt-Körper auf einander, wenn man solche als vollkommene Kugeln ansieht, oder auch wegen der großen Entfernungen derselben von einander (II. Th. §§. 66. 71.),

$$= \frac{\varepsilon m m'}{\varrho^2},$$

und der davon herrührende Theil von $f_{x,y,z,x',\text{rc.}}$

$$= -\frac{\varepsilon m m'}{\varrho}.$$

Daher findet sich

$$5)\quad f_{x,y,z,x',\text{rc.}} = -\varepsilon \cdot \Sigma \frac{m m'}{\varrho},$$

wo sich das Summenzeichen über alle Verbindungen je zweier der Welt-Körper erstreckt.

Berücksichtigt man nun nicht den Einfluß der Fixsterne auf das Sonnen-System, so ist die Bewegung des Schwer-Punktes des letztern geradlinig und konstant; berücksichtigt man ferner nicht die Störung der Umdrehung eines Weltkörpers um seinen Schwer-Punkt, welche davon herrührt, daß er nicht genau kugelförmig ist, so ist für jeden der Weltkörper, U also auch ΣU, etwas konstantes, so daß dann in der Gleichung (3.) der Ausdruck

$$6)\quad D - \Sigma U - V^2 \cdot \Sigma m = C$$

gesetzt und C als konstant angesehen werden kann. Die Gleichung (3.) geht dadurch über in

$$7)\quad \Sigma m(\partial x_1{}^2 + \partial y_1{}^2 + \partial z_1{}^2) = C - 2\varepsilon\Sigma\left(\frac{mm'}{\varrho}\right).$$

Nimmt man jetzt die Koordinaten-Werthe x, y, z, x', y', z', ꝛc. der Mittel-Punkte von m, m', ꝛc. aus dem Mittel-Punkte der Sonne, und sind g, h, k die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punkts des Sonnen-Systems aus diesem Mittel-Punkte der Sonne genommen, so hat man

$$x_1 = x - g, \quad y_1 = y - h, \quad z_1 = z - k, \text{ ꝛc.}$$

und wegen der Eigenschaften des Schwer-Punktes

$$g \cdot \Sigma(m) = \Sigma(mx), \; h \cdot \Sigma(m) = \Sigma(my), \; k \cdot \Sigma(m) = \Sigma(mz);$$

also auch

$$\partial g \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial x), \quad \partial h \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial y),$$
$$\partial k \cdot \Sigma(m) = \Sigma(m \cdot \partial z),$$

und

$$\partial x_1 = \partial x - \partial g, \quad \partial y_1 = \partial y - \partial h, \quad \partial z_1 = \partial z - \partial k, \text{ ꝛc.}$$

Eliminirt man aber mittelst dieser Gleichungen aus der (7.), sowohl ∂x_1, ∂y_1, ∂z_1, ꝛc. als auch ∂g, ∂h, ∂k, so erhält man zuletzt

$$8)\quad \Sigma m(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2) - \frac{1}{\Sigma m}[(\Sigma m \cdot \partial x)^2 + (\Sigma m \cdot \partial y)^2 + (\Sigma m \cdot \partial z)^2]$$
$$= C - 2\varepsilon \cdot \Sigma\left(\frac{mm'}{\varrho}\right).$$

Da für die Sonne selbst, die aus ihrem Mittel-Punkte genommenen Koordinaten ihres Mittel-Punktes alle Null sind, daher auch die Differenzial-Koefficienten derselben, so enthalten in dieser Gleichung (8.) die Summen-Zeichen Σ die Masse M der Sonne selbst nicht, ausgenommen in $\Sigma(m)$ und in $\Sigma\left(\frac{mm'}{\varrho}\right)$. Sondert man aber in letzteren Summen ebenfalls die Masse M der Sonne ab, d. h. schreibt man

$$M + \Sigma(m) \quad \text{statt} \quad \Sigma(m)$$

und

$$\frac{Mm}{r} + \frac{Mm'}{r'} + \frac{Mm''}{r''} + \text{ꝛc.} + \Sigma\left(\frac{mm'}{\varrho}\right) \text{ statt } \Sigma\left(\frac{mm'}{\varrho}\right),$$

wo r, r', r'', ꝛc. die Entfernungen vorstellen des Mittel-Punkts

der Sonne von den Mittel-Punkten der übrigen Planeten, so wird zuletzt die Gleichung der lebendigen Kräfte für unser Sonnen-System die nachstehende

$$9)\quad \Sigma m(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)-\frac{1}{M+\Sigma(m)}[(\Sigma m\cdot\partial x)^2+(\Sigma m\cdot\partial y)^2+(\Sigma m\cdot\partial z)^2]$$
$$= C+2\varepsilon M\cdot\Sigma\left(\frac{m}{r}\right)+2\varepsilon\Sigma\left(\frac{mm'}{\varrho}\right),$$

in welcher Gleichung die Summen-Zeichen Σ sich über alle Planeten, Monde und auch Kometen erstrekken, wenn man letztere nicht außer Acht lassen wollte *), aber nicht die Sonne in sich begreifen.

§. 136.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Summe der lebendigen Kräfte bei plötzlichen Aenderungen (d. h. im Falle Stöße der Körper unter sich, oder gegen andere unbewegliche Körper, oder Explosionen statt finden) ändern wird.

I. Zuerst machen wir bemerklich, daß jede wirkliche Bewegung eines Systems den Bedingungen des Zusammenhanges der Theile desselben, wie sie in den Gleichungen $L=0$, $L'=0$, rc. ausgesprochen sind, nothwendig genügt. Sind nun a, b, c, a', rc. die Anfangs-Geschwindigkeiten, welche die Theile m, m', rc. des Systems dadurch angenommen haben, daß Kräfte A, B, C, A', rc. auf dieselben wirkten, so beschreiben die einzelnen Massen-Punkte in der unendlich-klein gedachten Zeit $d\tau$ die Wege $a\cdot d\tau$, $b\cdot d\tau$, $c\cdot d\tau$, $a'\cdot d\tau$, rc.; und wenn man diese bezüglich statt δx, δy, δz, $\delta x'$, rc. in die allgemeine Gleichung der Bewegung (§. 127. ♂), nämlich in

*) Berechnete man nach dieser Gleichung, C zu verschiedenen Epochen, indem man jedesmal die Kometen außer Acht ließe, und zeigte sich jedesmal C merklich anders, d. h. erhielte man für C nicht immer einen und denselben Werth, so müßte dieser merkliche Unterschied in den Werthen von C dem Gesammt-Einfluß der Kometen zugeschrieben werden, wenn man die Einwirkung der Fixsterne nicht beachten will, und auch nicht voraussetzen will, daß unterdessen Stöße zwischen zweien der Welt-Körper statt gefunden haben.

1) $\Sigma m(A-a)\cdot\delta x + \Sigma m(B-b)\cdot\delta y + \Sigma m(C-c)\cdot\delta z = 0$
substituirt, so erhält man die Gleichung

2) $\Sigma m(A-a)a + \Sigma m(B-b)b + \Sigma m(C-c)c = 0$,
wo A, B, C, A′, ꝛc. die Geschwindigkeiten der Theilchen m, m′, ꝛc. seyn würden, wenn letztere von einander unabhängig (isolirt) wären, während a, b, c, a′, ꝛc. die wirklichen Geschwindigkeiten derselben Theile sind.

II. Treten aber plötzliche Aenderungen in der Geschwindigkeit der Massen-Punkte ein, nämlich Stöße oder Explosionen, so kann man in der allgemeinen Gleichung (1.) der Bewegung (§. 127. ♂) statt δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. wiederum die unendlich kleinen Wege setzen, welche in irgend einer Epoche der Stöße wirklich statt finden, wenn nur die Punkte zweier sich stoßenden Körper, welche sich berühren, wirklich eine und dieselbe Geschwindigkeit in einer und derselben Richtung haben. Bei Stößen ist dies letztere der Fall in dem Moment des größten Zusammen-Pressens. — Sind nun A, B, C, A′, ꝛc. die Geschwindigkeiten **vor** dem Stoße, dagegen a, b, c, a′, ꝛc. die Geschwindigkeiten im Momente des größten Zusammen-Pressens bei dem Stoße (also bei nicht elastischen Körpern, nachdem der Stoß beendigt ist), so gilt wieder die Gleichung (2.), welche sich auch auf diese Form bringen läßt, nämlich

$$\Sigma m(Aa + Bb + Cc) = \Sigma m(a^2 + b^2 + c^2),$$

und welche sich auch in dieser Form schreiben läßt, nämlich

$$\Sigma m(A^2 + B^2 + C^2) - \Sigma m(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= \Sigma m[(A-a)^2 + (B-b)^2 + (C-c)^2].$$

Also findet bei diesem Stoße allemal ein Verlust an der Summe der lebendigen Kräfte statt *).

III. Entstehen aber die plötzlichen Veränderungen an Geschwindigkeit durch Explosionen, die sich im Innern der Körper bilden, so sind die Geschwindigkeiten A, B, C, A′, ꝛc. zu Anfange des Ereignisses diejenigen, denen die einzelnen Massen-Ele-

*) Für homogene kugelförmige und central sich stoßende Körper haben wir dasselbe bereits (§. 23.) erfahren.

mentchen folgen; also kann man jetzt in der allgemeinen Gleichung (1.) der Bewegung statt δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. bezüglich $A \cdot d\tau$, $B \cdot d\tau$, $C \cdot d\tau$, $A' \cdot d\tau$, ꝛc. setzen.

Die Gleichung (1.) geht dadurch über in

$$\Sigma m[(A-a)A+(B-b)B+(C-c)C] = 0,$$

d. h. in

$$\Sigma m(a^2+b^2+c^2) - \Sigma m(A^2+B^2+C^2)$$
$$= \Sigma m[(a-A)^2+(b-B)^2+(c-C)^2],$$

so daß dasmal die Summe der lebendigen Kräfte vergrößert sich zeigt.

IV. Bei dem Stoße elastischer Körper tritt der Fall (II.) ein, im erstern Theil des Stoßes, bis zu dem Augenblicke des größten Zusammen-Pressens. Dagegen tritt in dem 2ten Theil des Stoßes, wo die Elasticität (wie eine Explosion) zurückwirkt, allemal der Fall (III.) ein, so daß also in der erstern Hälfte des Stoßes eine Verminderung, in der letztern Hälfte desselben dagegen eine Vermehrung der Summe der lebendigen Kräfte statt hat. Sind die Körper vollständig elastisch, so ist die Vermehrung der Verminderung gleich, und es ist dann die Summe der lebendigen Kräfte vor und nach gänzlich beendigtem Stoße eine und dieselbe. (Vgl. §. 23. und Anmerk. 1. zu §. 134.)

§. 137.

Gesetz der kleinsten Wirkung.

Wir kommen nun zu dem „Gesetze der kleinsten Wirkung.“ Es läßt sich wie folgt aussprechen:

„In allen den Fällen, wo das Gesetz der lebendigen Kräfte „statt findet, ist allemal das Integral

$$\int_{t \div 0} \Sigma(mv^2) \cdot dt \quad \text{oder} \quad \int_{t \div 0} \Sigma(mv \cdot \partial s) \cdot dt$$

„ein **Minimum** oder ein **Maximum**“; d. h. unter allen Wegen, welche das System durchlaufen könnte, um von seiner Anfangs-Stellung in seine End-Stellung zu gelangen, durchläuft es allemal denjenigen, für welche die Summe der, während der Dauer der Bewegung verbrauchten lebendigen Kräfte ein Minimum (oder ein Maximum) ist.

Der Beweis wird genau so geführt, wie er für den einfachsten II dieses Gesetzes bereits in dem (§. 39. IV. d. I. Th. Mech.) geführt sich findet, weshalb wir selbigen hier der Kürze wegen übergehen wollen.

In allen den Fällen wo $\Sigma(mv^2)$ konstant ist, also wenn gar keine Kräfte auf die einzelnen Massen-Punkte wirken, findet sich

$$\int_{t \div 0} \Sigma(mv^2) \cdot dt = \Sigma(mv^2) \times t,$$

und dann ist also die Zeit t der Bewegung (während welcher das System von seiner Anfangs-Stellung in seine End-Stellung gelangt) selbst ein Minimum oder ein Maximum.

Anmerk. Vergleicht man dieses „Gesetz der kleinsten Wirkung" mit den vorhergehenden allgemeinen Gesetzen der „lebendigen Kräfte", der „Erhaltung der Inhalte" und der „Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punktes", so findet man bald, daß das erstere uns Differenzial-Gleichungen, die drei letztern aber Integral-Gleichungen liefern. Da das d'Alembertsche Prinzip uns allemal den vollständigsten Ansatz jeder Aufgabe der Mechanik, nämlich alle Differenzial-Gleichungen giebt, so ist jetzt das „Gesetz der kleinsten Wirkung" von sehr untergeordneter Wichtigkeit, während die drei andern Gesetze uns sogleich Integral-Gleichungen liefern, die man außerdem in jedem besondern Falle sich erst verschaffen müßte *).

---

*) Die Integral-Gleichungen, welche das „Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwer-Punkts" an die Hand giebt sind

$$1) \quad \begin{cases} \Sigma(mx) = a \cdot \Sigma(m) + a' \cdot t, \\ \Sigma(my) = b \cdot \Sigma(m) + b' \cdot t, \\ \Sigma(mz) = c \cdot \Sigma(m) + c' \cdot t. \end{cases}$$

Die aus dem „Gesetz der Erhaltung der Inhalte" hervorgehenden Integral-Gleichungen sind dagegen

$$2) \quad \begin{cases} \Sigma m(y \cdot \partial x - x \cdot \partial y) = c, \\ \Sigma m(x \cdot \partial z - z \cdot \partial x) = c', \\ \Sigma m(z \cdot \partial y - y \cdot \partial z) = c''. \end{cases}$$

Endlich ist die Integral-Gleichung, welche aus dem „Gesetze der lebendigen Kräfte" hervorgeht, die nachstehende

$$3) \quad \tfrac{1}{2}\Sigma m(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2) = f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}} + \mathit{const.},$$

wenn $\int \Sigma m(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt = f_{x,y,z,\text{ꝛc.}}$

gefunden worden ist.

Dritte Abtheilung.

Von den kleinen Schwingungen.

Vorerinnerung.

In sehr verschiedenen Fällen erscheinen, wenn sich ein System von Körpern bewegt, bloß ganz kleine schwingende Bewegungen, während welcher die einzelnen Punkte des Systems periodisch sich einander nähern und wieder sich von einander entfernen, so aber daß jedes Massen-Elementchen seine Lage während der ganzen Dauer der Bewegung, und trotz der verschiedenen Geschwindigkeit, die es haben mag, doch immer nur sehr wenig ändert. — In solchen Fällen wird die Integration der allgemeinen Gleichungen der Bewegung dadurch sehr erleichtert, daß man die höhern Dimensionen der sehr kleinen Wege außer Acht läßt, und dadurch wenigstens genäherte Resultate erhält. Die Gleichungen der Bewegung verwandeln sich nämlich dadurch in lineäre Differenzial-Gleichungen, welche bequemer integrirt werden können. — Wie sich dies gestaltet, mag nun das Nachstehende dem Anfänger sehen lassen.

§. 138.

Es bewege sich ein System von Massen-Elementen m, m', m'', ꝛc. dergestalt, daß die Aenderung ihrer Lage diesseits oder jenseits ihrer Anfangs-Lage immer nur sehr gering bleibt, während zwischen den Koordinaten-Werthen der Massen-Punkte noch eine Anzahl von Gleichungen $L = 0$, $L' = 0$, ꝛc. vorhanden sind, denen die Koordinaten-Werthe während der ganzen Dauer der Bewegung zu genügen haben. Es bleibt dann eine Anzahl von einander unabhängiger Koordinaten-Werthe.

I. Sind nun α, β, γ, ꝛc. die Anfangs-Werthe der n von einander unabhängigen Koordinaten, und $\alpha+u$, $\beta+v$, $\gamma+w$, ꝛc. die Werthe derselben zu Ende der Zeit t, so daß, der Voraussetzung zufolge, u, v, w, ꝛc. sehr kleine Werthe bleiben, so sind die übrigen Koordinaten-Werthe der Massen-Punkte zu Ende der Zeit t, Funktionen von $\alpha+u$, $\beta+v$, $\gamma+w$, ꝛc.

Man kann aber auch alle Koordinaten-Werthe als Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen $\alpha+u$, $\beta+v$, $\gamma+w$, ꝛc. ansehen, ohne daß diese letzteren selbst grade Koordinaten-Werthe vorzustellen brauchen, während doch vorausgesetzt ist, daß u, v, w, ꝛc. für alle Werthe von t immer nur sehr kleine Werthe ha-

ben. Diesen letztern Gesichts-Punkt wollen wir hier fest halten.

II. Dann lassen sich aber alle Koordinaten-Werthe x, y, z, x′, ꝛc. der verschiedenen Massen-Punkte in unendliche Reihen verwandeln, die nach den Dimensionen der sehr kleinen u, v, w, ꝛc. geordnet sind. Es seyen dieselben wie folgt vorgestellt:

$$
1)\left\{\begin{array}{l}
x = p + au + bv + cw + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}eu^2 + \frac{1}{2}fv^2 + \frac{1}{2}gw^2 + huv + kuw + lvw + \text{ꝛc.} \\
y = p_1 + a_1u + b_1v + c_1w + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}e_1u^2 + \frac{1}{2}f_1v^2 + \frac{1}{2}g_1w^2 + h_1uv + k_1uw + l_1vw + \text{ꝛc.} \\
z = p_2 + a_2u + b_2v + c_2w + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}e_2u^2 + \frac{1}{2}f_2v^2 + \frac{1}{2}g_2w^2 + h_2uv + k_2uw + l_2vw + \text{ꝛc.} \\
x' = p' + a'u + b'v + c'w + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}e'u^2 + \frac{1}{2}f'v^2 + \frac{1}{2}g'w^2 + h'uv + k'uw + l'vw + \text{ꝛc.} \\
\text{u. s. w. f.;}
\end{array}\right.
$$

und wir wollen noch den besondern Fall der Aufgabe voraussetzen, in welchem in x, y, z, ꝛc. die Zeit t explicit gar nicht vorkommt, so daß die Koefficienten dieser Reihen alle nach t konstant sind.*)

III. Setzen wir nun voraus, daß die Kräfte X, Y, Z, X′, ꝛc., welche auf das System einwirken, ebenfalls von der Lage der einzelnen Theile desselben abhängen, so sind auch diese Kräfte Funktionen von $\alpha + u$, $\beta + v$, $\gamma + w$, ꝛc., so daß sich auch diese Kräfte in ganz analoge Reihen entwikkeln lassen, nämlich:

$$
2)\left\{\begin{array}{l}
X = P + Au + Bv + Cw + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}Eu^2 + \frac{1}{2}Fv^2 + \frac{1}{2}Gw^2 + Huv + Kuw + Lvw + \text{ꝛc.} \\
Y = P_1 + A_1u + B_1v + C_1w + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}E_1u^2 + \frac{1}{2}F_1v^2 + \frac{1}{2}G_1w^2 + H_1uv + K_1uw + L_1vw + \text{ꝛc.} \\
Z = P_2 + A_2u + B_2v + C_2w + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}E_2u^2 + \frac{1}{2}F_2v^2 + \frac{1}{2}G_2w^2 + H_2uv + K_2uw + L_2vw + \text{ꝛc.} \\
X' = P' + A'u + B'v + C'w + \text{ꝛc.} \\
\quad + \frac{1}{2}E'u^2 + \frac{1}{2}F'v^2 + \frac{1}{2}G'w^2 + H'uv + K'uw + L'vw + \text{ꝛc.} \\
\text{u. s. w. f.;}
\end{array}\right.
$$

*) Die Glieder p, p_1, p_2, p', p'_1, p'_2, ꝛc. müssen eigentlich auch die,

wobei sich von selbst versteht, daß alle Koefficienten dieser Gleichungen (2.) als Funktionen der Koefficienten der Gleichungen (1.) angesehen werden, welche auch t (explicit) enthalten können. Wir wollen jedoch noch voraussetzen, daß sie t explicit **nicht** enthalten, folglich (nach t) konstant sind.

IV. Wir nehmen nun die allgemeine Gleichung der Bewegung (§. 125.) nämlich die Gleichung

$$3)\quad \Sigma m(X-\partial^2 x)\cdot\delta x+\Sigma m(Y-\partial^2 y)\cdot\delta y+\Sigma m(Z-\partial^2 z)\cdot\delta z=0,$$

und setzen in sie beliebige Werthe von δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc., welche jedoch den Bedingungen der Abhängigkeit genügen. Zu dem Ende darf man nur u, v, w, ꝛc. ganz willkührlich in

$$u_\varkappa \text{ oder } u+\varkappa\cdot\delta u+ \text{ꝛc.}$$
$$v_\varkappa \text{ oder } v+\varkappa\cdot\delta v+ \text{ꝛc.}$$
$$w_\varkappa \text{ oder } w+\varkappa\cdot\delta w+ \text{ꝛc.}$$

übergehen lassen, danach aber die aus den Gleichungen (1.) dafür hervorgehenden $x_\varkappa$ oder $x+\varkappa\cdot\delta x+$ ꝛc., $y_\varkappa$ oder $y+\varkappa\cdot\delta y$, ꝛc. berechnen. Man erhält dann (nach I. Th. Analys. §. 55.)

$$4)\quad \begin{cases} \delta x = \begin{Bmatrix} (a+eu+hv+kw+\text{ꝛc.})\cdot\delta u \\ +(b+fv+hu+lw+\text{ꝛc.})\cdot\delta v \\ +(c+gw+ku+lv+\text{ꝛc.})\cdot\delta w \end{Bmatrix}+\text{ꝛc.} \\ \delta y = \begin{Bmatrix} (a_1+e_1u+h_1v+k_1w+\text{ꝛc.})\cdot\delta u \\ +(b_1+f_1v+h_1u+l_1w+\text{ꝛc.})\cdot\delta v \\ +(c_1+g_1w+k_1u+l_1v+\text{ꝛc.})\cdot\delta w \end{Bmatrix}+\text{ꝛc.} \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

Substituirt man nun diese Werthe von δx, δy, δz, $\delta x'$, ꝛc. in die Gleichung (3.), so kann man die Koefficienten von δu, δv, δw, ꝛc. einzeln der Null gleich setzen, und dies giebt:

---

allen Elementen m, m′, m″, ꝛc. gemeinschaftlichen Fortschreitungs- und Drehungs-Bewegungen in sich aufnehmen, so daß sie wenigstens implicit t enthalten. Wir haben aber hier vorausgesetzt, daß solche gemeinschaftliche Bewegungen gar nicht existiren; deshalb sind hier auch p, p_1, ꝛc. (nach t) konstant.

$$
5) \begin{cases}
\Sigma m \begin{Bmatrix} (\partial^2 x - X)(a + eu + hv + kw + \text{ꝛc.}) \\ +(\partial^2 y - Y)(a_1 + e_1 u + h_1 v + k_1 w + \text{ꝛc.}) \\ +(\partial^2 z - Z)(a_2 + e_2 u + h_2 v + k_2 w + \text{ꝛc.}) \end{Bmatrix} = 0; \\
\Sigma m \begin{Bmatrix} (\partial^2 x - X)(b + fv + hu + lw + \text{ꝛc.}) \\ +(\partial^2 y - Y)(b_1 + f_1 v + h_1 u + l_1 w + \text{ꝛc.}) \\ +(\partial^2 z - Z)(b_2 + f_2 v + h_2 u + l_2 w + \text{ꝛc.}) \end{Bmatrix} = 0; \\
\Sigma m \begin{Bmatrix} (\partial^2 x - X)(c + gw + ku + lv + \text{ꝛc.}) \\ +(\partial^2 y - Y)(c_1 + g_1 w + k_1 u + l_1 v + \text{ꝛc.}) \\ +(\partial^2 z - Z)(c_2 + g_2 w + k_2 u + l_2 v + \text{ꝛc.}) \end{Bmatrix} = 0; \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

V. In diese Gleichungen substituirt man nun statt x, y, z, x', ꝛc. und X, Y, Z, X', ꝛc. ihre Werthe aus den Gleichungen (1. u. 2.), läßt in den Resultaten, um *eine erste Annäherung zu bekommen*, alle zweiten und höhern Dimensionen der sehr kleinen u, v, w, ꝛc. und der ebenfalls sehr kleinen $\partial^2 u$, $\partial^2 v$, $\partial^2 w$, ꝛc. weg, und man hat dann n lineäre Differenzial-Gleichungen mit konstanten Koefficienten, von denen jede einzelne die nachstehende Form hat, nämlich

6) $D \cdot \partial^2 u + E \cdot \partial^2 v + F \cdot \partial^2 w + \text{ꝛc.} + Gu + Hv + Kw + \text{ꝛc.} = Q$,

wo D, E, F, ꝛc., G, H, K, ꝛc. und Q aus den konstanten Koefficienten der x, y, z, ꝛc. und X, Y, Z, ꝛc. (in 1. u. 2.) zusammengesetzt sind.

Hat man nun diese lineären Gleichungen integrirt und die ihnen entsprechenden Werthe u, v, w, ꝛc. gefunden, als erste Annäherung, so setzt man diese Werthe in die vorher vernachlässigten Glieder der Gleichungen. Die dadurch hervorgehenden Gleichungen unterscheiden sich von den vorstehenden (6.) dann nur darin, daß in ihnen auch noch *bekannte* Funktionen von t vorkommen. Integrirt man daher selbige sogleich wieder, so erhält man eine zweite Annäherung. Man kann noch fortfahren diese Methode der successiven Annäherungen in Anwendung zu bringen, um immer mehr genäherte Resultate zu erhalten. Gewöhnlich begnügt man sich mit der ersten Annäherung; und auch wir wollen solches hier thun.

VI. Die n Gleichungen (6.) lassen sich noch einfacher machen, wenn man statt der n Veränderlichen u, v, w, 2c, welche durch sie bestimmt sind, n neue Veränderliche einführt, von denen jeder bezüglich um ein unbestimmtes konstantes Glied vergrößert (oder verkleinert) gedacht ist; wenn man dann diese neuen Ausdrücke statt u, v, w, 2c. substituirt, nachgehends aber in den neu entstehenden und auf dieselbe Form (6.) gebrachten Gleichungen, die konstanten Theile rechts (die neuen Q) alle der Null gleich setzt, und aus diesen letztern Gleichungen die Werthe der konstanten Aenderungen von u, v, w, 2c. erst bestimmt. Die neuen Gleichungen zwischen den neuen Veränderlichen haben dann dieselbe Form (6.), nur daß rechts statt Q die Null zu stehen kommt. Für diese neuen u, v, w, 2c. haben also die Gleichungen (6.) diese Form

$$7)\quad D\cdot\partial^2 u + E\cdot\partial^2 v + F\cdot\partial^2 w + 2c. + Gu + Hv + Kw + 2c. = 0.$$

Da diese konstanten Theile, um welche diese neuen u, v, w, 2c. von den alten verschieden sind, mit in α, β, γ, 2c. aufgenommen werden können, so sind die Koordinaten-Werthe x, y, z, x', 2c. immer noch als Funktionen von $\alpha+u$, $\beta+v$, $\gamma+w$, 2c. anzusehen, nur daß die Werthe α, β, γ, 2c. etwas anders sind, als vorher.

Und da der Gleichung (7.) für jedes t durch $u=0$, $v=0$, $w=0$, 2c. genügt wird, so folgt, daß diese neuen Anfangs-Werthe α, β, γ, 2c. der n unabhängigen Veränderlichen, einer Lage des Gleichgewichts entsprechen, aus welcher man das System dadurch absichtlich entfernt hat, daß man sehr kleine aber beliebige Anfangs-Werthe von u, v, w, 2c. ∂u, ∂v, ∂w, 2c. voraussetzte.

VII. Um nun diese n Gleichungen (7.) gemeinschaftlich zu integriren, setze man

$$8)\quad \begin{cases} u = N\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ v = N'\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ w = N''\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

und suche die Konstanten ϱ, r, N, N', N'', ꝛc. so zu bestimmen, daß den Differenzial-Gleichungen (7.) genügt wird.

So wie man aber diese Werthe von u, v, w, ꝛc. zweimal nach allem t differenziirt und in die Gleichungen (7.) substituirt, so findet man sogleich, daß r zugleich mit t herausfällt, und daß die entstehenden n Gleichungen noch, durch N z. B., dividirt werden können, so daß sie r und N völlig willkührlich lassen, dagegen die n übrigen Konstanten N', N'', ꝛc. und ϱ bestimmen (in r und N ausgedrückt).

Eliminirt man nun aus diesen n Gleichungen, welche die Form haben werden

$$9)\quad (DN + EN' + FN'' + \text{ꝛc.})\cdot\varrho = GN + HN' + KN'' + \text{ꝛc.}$$

nach und nach N', N'', N''', ꝛc., wo dann N selbst mit wegfällt, so erhält man zuletzt zur Bestimmung von ϱ eine höhere Gleichung vom nten Grade, welche wir durch

$$10)\qquad f_\varrho = 0$$

vorstellen wollen, und welche für ϱ im Allgemeinen n verschiedene Werthe liefert. Und denkt man sich ϱ gefunden, so lassen sich N, N', N'', ꝛc. (aus den n Gleichungen 9.) als ganze Funktionen von ϱ herstellen vom nten Grade, jede noch mit einem und demselben Ausdruck R multiplicirt, während dieser Ausdruck als eine völlig willkührliche Konstante angesehen werden kann, weil sie völlig unbestimmt bleibt.

VIII. Hat man aber aus der Gleichung (10.) die n Werthe von ϱ gefunden, und bezüglich durch ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ꝛc. ausgedrückt, so genügen den Differenzial-Gleichungen (7.), in so fern sie linear sind, auch noch die allgemeinen Werthe

$$11)\quad \begin{cases} u = RN\cdot \sin(t\sqrt{\varrho} - r) + R_1N_1\cdot \sin(t\sqrt{\varrho_1} - r_1) \\ \qquad\qquad + R_2N_2\cdot \sin(t\sqrt{\varrho_2} - r_2) + \text{ꝛc.}; \\ v = RN'\cdot \sin(t\sqrt{\varrho} - r) + R_1N'_1\cdot \sin(t\sqrt{\varrho_1} - r_1) \\ \qquad\qquad + R_2N'_2\cdot \sin(t\sqrt{\varrho_2} - r_2) + \text{ꝛc.}; \\ w = RN''\cdot \sin(t\sqrt{\varrho} - r) + R_1N''_1\cdot \sin(t\sqrt{\varrho_1} - r_1) \\ \qquad\qquad + R_2N''_2\cdot \sin(t\sqrt{\varrho_2} - r_2) + \text{ꝛc.}; \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

Weil aber diese letztern Gleichungen, $2n$ willkührliche Konstanten R, r, R_1, r_1, R_2, r_2, ꝛc. enthalten, so sind sie die allgemeinen Integrale der Gleichungen (7.).

Diese $2n$ Konstanten bestimmen sich zuletzt aus den Anfangs-Werthen (für $t = 0$) der sehr kleinen u, v, w, ꝛc., ∂u, ∂v, ∂w, ꝛc.; deshalb werden die Werthe von R, R_1, R_2, ꝛc. ebenfalls sehr klein, während die Werthe von r, r_1, r_2, ꝛc., da ihre Kosinusse nur vorkommen, immer positiv und zwischen 0 und π liegend genommen werden können.

§. 139.

Sind nun alle Werthe ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ꝛc. der Gleichung (10.) $f_\varrho = 0$ reell und positiv, so sind u, v, w, ꝛc. periodische Funktionen von t, die immer (für jedes t) sehr kleine Werthe behalten. Sind aber unter den Werthen von ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ꝛc. auch negative oder imaginäre, so gehen die periodischen Funktionen mit imaginären Elementen theilweise in Exponential-Funktionen über, welche reelle Exponenten haben. Die Werthe von u, v, w, ꝛc. entsprechen dann nicht mehr der Voraussetzung, nach welcher sie fortwährend sehr klein bleiben sollen; und es gelten daher in diesem zweiten Falle die Resultate nur, so lange t noch sehr klein ist.

§. 140.

Denkt man sich nun, daß das System der Massen-Punkte in der Anfangs-Lage im Gleichgewichte gewesen ist, und daß von Außen eingreifende Ursachen dieses Gleichgewicht nur sehr wenig gestört haben, so wird das System in dem ersten Falle, wo ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ꝛc. alle positiv sind, um die Anfangs-Lage (des Gleichgewichts) herum oscilliren, und sich nie weit davon entfernen*); in dem andern Falle dagegen, wo die Werthe ϱ, ϱ_1,

ϱ_2,

*) Die Reibung oder andere Hindernisse werden sogar häufig die geringe Bewegung immer mehr vermindern, so daß bald wieder völliger Stillstand (in der Lage des Gleichgewichts) eintreten wird.

ϱ_2, ꝛc. zum Theil negativ oder gar imaginär sind, und wenn nicht zufällig die Koefficienten der dadurch statt der periodischen Glieder eingehenden Exponential-Funktionen der Null gleich werden, — da wird das System seine Bewegung dergestalt fortsetzen, daß nicht immer jeder Massen-Punkt in der Nähe seiner Anfangs-Lage bleibt. — Das System wird zuletzt, was man nennt, umschlagen.

Im erstern Falle nennt man das (hier vorausgesetzte) Gleichgewicht des Systems stabil, im andern Falle wird es nicht stabil genannt. (Vgl. II. Th. §. 118.).

§. 141.

Setzen wir abermals ein von Kräften X, Y, Z, X′, ꝛc. angegriffenes System voraus, für welches das „Gesetz der lebendigen Kräfte", d. h. die Gleichung (§. 133. Nr. 8.)

1) $\Sigma(mv^2) - \Sigma(m\mathfrak{v}^2) = 2f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}} - 2f_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\text{ꝛc.}}$

statt hat, wo

2) $\partial f = \Sigma m(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z)$

ist.

Wirken aber auf ein System von Punkten, welches in Ruhe sich befindet, und welches unter sich beliebig fest oder lose zusammenhängt, die Kräfte X, Y, Z, X′, ꝛc., so hat man als Bedingung, daß diese Kräfte sich im Gleichgewicht halten, nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung

3) $\Sigma m(X\cdot\delta x + Y\cdot\delta y + Z\cdot\delta z) = 0$,

oder auch, wenn die Kräfte so sind, wie sie bei der Existenz des Gesetzes der lebendigen Kräfte vorausgesetzt werden müssen, diese andere Gleichung

4) $\Sigma m(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z) = 0$, d. h. $\partial f = 0$,

d. h. die obige Funktion f ist ein Maximum oder ein Minimum. — Folglich geht die Summe der lebendigen Kräfte vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen über, so oft das System durch eine Stellung hindurchgeht, in welcher die stetig wirkenden Kräfte es gerade jetzt im Gleichgewicht halten würden, wenn allen Punkten desselben plötzlich ihre

Geschwindigkeit benommen werden könnte. Und da die größten und kleinsten Werthe von f regelmäßig abwechseln müssen, so wird das bewegte System abwechselnd durch Lagen des Gleichgewichts hindurchgehen, in welchen die Funktion f einmal ein Minimum und das nächste Mal ein Maximum ist.

Wir wollen aber jetzt noch zeigen, daß diejenige Lage des Gleichgewichts eine stabile ist, für welche die Funktion f ein Maximum wird.

Es seyen nämlich a, b, c, a', b', c', ꝛc. die Koordinaten-Werthe von m, m', ꝛc. für die Lage des Gleichgewichts. Diese Massen-Punkte werden nun aus der Lage des Gleichgewichts gebracht, und mit sehr kleinen Geschwindigkeiten k, k', k'', ꝛc. versehen, so daß zu Ende der Zeit t die Koordinaten-Werthe derselben Massen-Punkte bezüglich

$$x = a + p, \quad y = b + q, \quad z = c + r;$$
$$x' = a' + p', \quad y' = b' + q', \quad z' = c' + r';$$

u. s. w. f. sind. Dann hat man zunächst nur zu beweisen, daß p, q, r, p', q', ꝛc. immer sehr klein bleiben, so oft $f_{a,b,c,a',b',c',\text{ꝛc.}}$ ein Maximum ist.

Man entwickle zu dem Ende $f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}}$ in eine nach den Dimensionen von p, q, r, ꝛc. fortlaufende Reihe. Weil aber $f_{a,b,c,\text{ꝛc}}$ ein Maximum ist, so ist die Summe der, mit den ersten Dimensionen von p, q, r, ꝛc. versehenen Glieder dieser Entwickelung der Null gleich (nach der Theorie vom Größten und Kleinsten), und die Summe der mit den zweiten Dimensionen von p, q, r, ꝛc. versehenen Glieder negativ; solche mag daher durch $-(s^2 + s'^2 + s''^2 + \cdots)$ vorgestellt seyn *). Bezeichnet man nun die Summe aller übrigen Glieder der Entwickelung durch R, so hat man

$$5) \quad f_{x,y,z,x',\text{ꝛc.}} = f_{a,b,c,a',\text{ꝛc.}} - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \cdots) + R,$$

*) Eine homogene Funktion der zweiten Dimension von beliebigen Veränderlichen p, q, r, p', ꝛc. kann nicht für alle Werthe von p, q, r, ꝛc. immerfort positive Werthe annehmen, wenn sie nicht in lauter Glieder von der Form $(\alpha p + \beta q + \gamma r + \text{ꝛc.})^2$ zerlegt werden kann, so daß sie als eine Summe solcher Quadrate erscheint.

wo s, s', s'', ꝛc. lineäre Funktionen von p, q, r, p' ꝛc. sind, die mit diesen letztern Veränderlichen zugleich Null werden. Substituirt man aber dieß in die Gleichung (1.), so erhält man

$$6) \quad \tfrac{1}{2}\Sigma(mv^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma(mk^2) - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) + R.$$

Könnten nun die Werthe von p, q, r, ꝛc. dergestalt anwachsen, daß das größeste der Quadrate s^2, s'^2, ꝛc. z. B.

$$s^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma(mk^2)$$

würde, so könnte man doch $\Sigma(mk^2)$ selbst so klein nehmen, daß s'^2, s''^2, ꝛc. noch immer größer als R würden, in so fern R lauter Glieder der dritten und höhern Dimensionen enthielte. Dann hätte man also $\frac{1}{2}\Sigma(mv^2)$ negativ, was nie möglich ist. Folglich können unter unseren Voraussetzungen p, q, r, ꝛc. nie so groß werden. Deshalb ist das Gleichgewicht stabil, so oft $f_{a,b,c,a',\text{ꝛc.}}$ ein Maximum ist.

Dieselben Schlüsse lassen sehen, daß die Werthe von p, q, r, p', q', ꝛc. gar wohl beliebig anwachsen können, so oft $f_{a,b,c,a',\text{ꝛc.}}$ ein Minimum ist *).

§. 142.

Gesetz der Koexistenz der kleinen Schwingungen.

Man kann sich im (§. 138.) die Anfangs-Werthe von ∂u, ∂v, ∂w, ꝛc. so denken, daß alle Koefficienten R, R_1, R_2, R_3, ꝛc. bis auf einen, z. B. bis auf R, der Null gleich werden, dann erhält man aus den Gleichungen (§. 138. I. u. II.) bloß

$$1) \begin{cases} x = p + (aN + bN' + cN'' + \text{ꝛc.})R\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ y = p_1 + (a_1N + b_1N' + c_1N'' + \text{ꝛc.})R\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ z = p_2 + (a_2N + b_2N' + c_2N'' + \text{ꝛc.})R\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ x' = p' + (a'N + b'N' + c'N'' + \text{ꝛc.})R\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ y' = p'_1 + (a'_1N + b'_1N' + c'_1N'' + \text{ꝛc.})R\cdot\sin(t\sqrt{\varrho} - r), \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

---

*) Ein in einem Punkte unterstützter schwerer Körper ist daher im stabilen Gleichgewicht, so oft sein Schwer-Punkt am tiefsten liegt; er ist dagegen im nicht stabilen Gleichgewicht, so oft sein Schwer-Punkt am höchsten zu liegen kommt.

Weil aber $\sin(t\sqrt{\varrho}-r)$ immer denselben Werth behält, so oft t um $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho}}$ wächst, so folgt, daß in diesem Falle alle Massen-Punkte in der Richtung der Koordinaten-Axen gleichzeitige Schwingungen machen, deren konstante Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho}}$ ist, während die Weiten dieser Schwingungen konstant sind, und ihr Verhältniß zu einander nach den vorstehenden Formeln unmittelbar sich ausrechnet. Dieses Verhältniß der Weiten der gleichzeitigen Schwingungen hängt ab, von der Natur des Systems und von dem Werthe ϱ aus der Gleichung $f_\varrho = 0$ (§. 138. 10.). Da die absolute Größe dieser Schwingungs-Weiten auch von R mit abhängt, so hat sie auf die Dauer der Schwingungen keinen Einfluß, weil letztere bloß von ϱ allein abhängen. Alle Massen-Punkte kommen auf einmal in diejenige Lage zurück, in welcher sie im Gleichgewicht seyn würden, wenn sie keine Geschwindigkeiten hätten, und welches nach der Voraussetzung der Fall ist, so oft $u = v = w =$ ꝛc. $= 0$, d. h. $x = p$, $y = p_1$, $z = p_2$, $x' = p'$, ꝛc. ist. Die erste Rückkehr findet statt in der Zeit, für welche $\sin(t\sqrt{\varrho}-r) = 0$ wird, d. h. in der Zeit $t = \frac{r}{\sqrt{\varrho}}$, und diese Zeit, eben so wie R, hängt von den anfänglichen Ursachen der Verrückung des Systems ab.

Nun hat aber ϱ aus der Gleichung (§. 138. 10.) n verschiedene Werthe, also kann man dem Systeme n solche Bewegungen beibringen, wie die so eben besprochene. Weil aber die allgemeinen Werthe von x, y, z, x', ꝛc. vermöge der Gleichungen (§. 138. 11.) und vermöge der linearen Zusammensetzung der Formeln (§. 138. I.) (in so fern die zweiten und höhern Potenzen von u, v, w, ꝛc. außer Acht gelassen werden) von den Anfangs-Werthen p, p_1, p_2, p', ꝛc. dieser Koordinaten, um die Summe der so eben gedachten einzelnen Aenderungen verschieden sind, so haben eigentlich im Allgemeinen, alle diese einzelnen Schwingungen zu gleicher Zeit statt. Umgekehrt nämlich, wie auch die anfängliche Verrückung aus dem Gleichgewichte gewesen seyn mag, so läßt

sich doch die entstehende Bewegung eines jeden dieser Massen-Punkte parallel mit den Koordinaten-Axen in n (oder weniger als n) solche einfache Schwingungen zerlegen, wie sie in den Gleichungen (1.) ausgedrückt sind, deren Dauer bezüglich

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\varrho_1}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\varrho_2}}, \quad \text{rc.}$$

ist. Sind diese verschiedenen Zeiten unter sich commensurabel, so kommt das ganze System immer einmal wieder in seine Anfangs-Lage zurück.

Diese Eigenschaft der kleinen Schwingungen, nennt man das „Gesetz der Koexistenz der kleinen Schwingungen." Es findet auch dann noch statt, wenn die Anzahl der Massen-Punkte unendlich groß ist, in welchem Falle die Anzahl der möglichen einfachen Schwingungen ebenfalls unendlich seyn kann; aber die Dauer und die Verhältnisse der Weiten dieser einfachen Schwingungen sind jedesmal völlig bestimmt.

§. 143.

Kleine Schwingungen in einem widerstehenden Mittel.

Da die Größe des Widerstandes einer Flüssigkeit, in welcher sich ein Massen-Punkt bewegt, von der Geschwindigkeit des letztern mit abhängt, so nehmen die Kräfte X, Y, Z, X', rc., im Falle einer solchen Bewegung, diese Geschwindigkeiten ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, rc. mit in sich auf. Denkt man sich den Widerstand mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so ändert diese Annahme die vorhergehenden Rechnungen gar nicht, weil die zweiten und höhern Potenzen von ∂x, ∂y, ∂z, rc. außer Acht gelassen werden. Bei langsamen Bewegungen zeigt sich aber in der Erfahrung der Widerstand mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional, und da übt der Widerstand auch auf die vorstehenden Rechnungen seinen Einfluß aus.

Statt der n Differenzial-Gleichungen (§. 138. 7.) erhält man nämlich jetzt n Differenzial-Gleichungen von nachstehender Form:

$$2) \quad D\cdot\partial^2 u + E\cdot\partial^2 v + F\cdot\partial^2 w \text{ rc.} + Gu + Hv + Kw + \text{rc.}$$
$$= D'\cdot\partial u + E'\cdot\partial v + F'\cdot\partial w + \text{rc.},$$

wo die konstanten Koefficienten D′, E′, F′, ꝛc. mit der Dichtigkeit der widerstehenden Flüssigkeit proportional, dabei aber gegen die übrigen Koefficienten sehr klein sind.

Diesen Differenzial-Gleichungen genügen die Formen (§. 138. 8.) nicht mehr, sondern man muß nun

$$3)\quad \begin{cases} u = RN\cdot\sin(t\sqrt{\varrho}-r)\cdot e^{-\omega t}, \\ v = RN'\cdot\sin(t\sqrt{\varrho}-r)\cdot e^{-\omega' t}, \\ w = RN''\cdot\sin(t\sqrt{\varrho}-r)\cdot e^{-\omega'' t}, \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

nehmen, wo wir statt N, N′, N″, ꝛc. sogleich RN, RN′, RN″, ꝛc. geschrieben haben, um die Werthe von N, N′, N″, ꝛc. nicht in Bruchform zu erhalten, welches dadurch vermieden wird, daß man die Renner oder vielmehr den General-Renner in den Faktor R hineinzieht; wo ferner e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo ω, ω', ω'', ꝛc. sehr kleine konstante Werthe sind.

Substituirt man diese Werthe von u, v, w, ꝛc. in die Gleichungen (2.) so erhält man n Gleichungen von der Form

$$4)\quad 2DN\omega + 2EN'\omega' + 2FN''\omega'' + \text{ꝛc.} = D'N + E'N' + \text{ꝛc.},$$

aus denen sich die n Unbekannten ω, ω', ω'', ꝛc. bestimmen.

Da der Widerstand die Weite der Schwingungen nach und nach vermindert, so sind diese Werthe ω, ω', ω'', ꝛc nothwendig positiv. Diese Verminderung ist für die verschiedenen Veränderlichen u, v, w, ꝛc. bald schneller bald langsamer und hängt von den Werthen von ϱ ab, so daß die Weiten der einfachen Schwingungen nicht alle gleich schnell abnehmen. Die Dauer einer jeden einfachen Schwingung ist noch immer dieselbe, wie wenn das widerstehende Mittel nicht vorhanden wäre, nämlich bezüglich $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho_1}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho_2}}$, ꝛc. Endlich giebt die Summe der in (3.) stehenden Ausdrücke für die n verschiedenen Werthe von ϱ, auch jetzt wieder die allgemeinen Werthe von u, v, w, ꝛc., woraus die allgemeinen Werthe von x, y, z, x′, ꝛc. unmittelbar hervorgehen (nach 1.), sobald man nur die zweiten und höhern Dimensionen von u, v, w, ꝛc. außer Acht läßt.

Anmerk. Aus dem Gesetze der Koexistenz der kleinen Schwingungen geht noch hervor:

1) Sind die Massen-Punkte dergestalt mit einander verbunden, daß alle Koordinaten-Werthe nur von einem einzigen unabhängigen Veränderlichen abhängen, so können sie nur eine Art Schwingungen machen, für welche die Dauer und die Verhältnisse der Weiten der Schwingungen der einzelnen Punkte von den angreifenden Kräften und von der Natur des Systems abhängen.

Dieser Fall findet z. B. bei der Bewegung zweier Punkte m und m′ statt, welche mittelst eines Fadens von konstanter Länge zusammenhängen, und welche sich auf gegebenen Kurven bewegen.

2) Sind die Punkte m, m′, m″, etc. unter sich nicht verbunden auch nicht gezwungen auf gegebenen Kurven zu bleiben, jedoch vielleicht gegenseitigen Anziehungen und Abstoßungen, oder Kräften überlassen, welche sie nach festen Punkten hin treiben, so sind die Koordinaten-Werthe alle von einander unabhängig, und es ist daher die Anzahl der einfachen Oscillationen, welche statt finden können, dann dreimal so groß, als die Anzahl der Massen-Punkte.

§. 144.

Betrachten wir noch ein Beispiel der Anwendung des (im §. 142.) vorliegenden Gesetzes. Es sey nämlich ein schwerer Punkt m in die Höhlung des durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegebenenen Ellipsoids gelegt, dessen eine Axe OZ, welche der Länge nach 2c ist, vertikal liegen mag; derselbe beschreibt nun, wenn er ein wenig aus der Lage des Gleichgewichts gebracht wird, unendlich kleine Schwingungen um seine Gleichgewichts-Lage herum. Man soll dieselben näher bestimmen.

Verlegt man in der Axe OZ den Anfangs-Punkt O der Koordinaten in den tiefsten Punkt, so muß man z — c statt z setzen, und die Gleichung (1.) des Ellipsoids geht dann in die nachstehende über:

2) $$z = \frac{cx^2}{2a^2} + \frac{cy^2}{2b^2},$$

wo die z nach oben hin positiv genommen sind. Aus dieser Gleichung finden sich die Krümmungs-Halbmesser h und k der beiden durch XOZ und YOZ gebildeten Durchschnitte so:

3) $$h = \frac{a^2}{c} \quad \text{und} \quad k = \frac{b^2}{c}.$$

In dieser Aufgabe befinden sich zwei unabhängige Veränderliche, nämlich x und y; daher kann der bewegliche Punkt m nur zwei Arten einfacher Schwingungen ausführen, und seine allgemeinste Bewegung wird aus der Koexistenz dieser beiden besondern Bewegungen hervorgehen. Verrückt man nun den Punkt m in dem Schnitte XOZ um etwas, so wird er vermöge der Schwere g aus diesem Schnitte nicht heraustreten. Die Dauer dieser Schwingungen ist daher (nach §. 51. d. I. Th. Mech. wo der einfache Pendel behandelt sich findet) $= 2\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{g}\right)}$ $= \frac{2\pi a}{\sqrt{cg}}$; und zu Ende der Zeit t hat man für diese einfache Schwingung

$$x = R \cdot \sin\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)} - r\right] \text{ und } y = 0.$$

Die andere einfache Schwingung in dem durch YOZ gebildeten Schnitte hat die Dauer $2\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{g}\right)}$ oder $\frac{2\pi b}{\sqrt{cg}}$ und zu Ende der Zeit t ist

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = R' \cdot \sin\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)} - r'\right].$$

Also sind die allgemeinen Werthe von x und y nach dem Gesetze der Koexistenz der kleinen Schwingungen nothwendig so, nämlich:

4) $$x = R \cdot \sin\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)} - r\right] \text{ und } y = R' \cdot \sin\left[\sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)} - r'\right],$$

wo R, R', r und r' vier Konstanten sind, welche aus den Anfangs-Werthen von x, y, ∂x und ∂y ohne Weiteres bestimmt werden können. Sind nämlich p, q, p', q' diese Anfangs-Werthe, so hat man, wenn die Gleichung (4.) differenziirt wird, um

$$5)\qquad \partial x = R\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}\cdot\cos\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}-r\right]$$

und

$$\partial y = R'\sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)}\cdot\cos\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)}-r'\right]$$

zu erhalten, und wenn man dann (in 4. und 5.) $t = 0$ setzt,

$$p = -R\cdot\sin r,\qquad q = -R'\cdot\sin r',$$

$$p' = R\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}\cdot\cos r,\quad q' = R'\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)}\cdot\cos r'.$$

Löst man aber in den Gleichungen (4.) zur Rechten

$$\sin\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}-r\right] \text{ und } \sin\left[t\sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)}-r'\right]$$

auf, so erhält man zuletzt

$$6)\qquad x = p\cdot\cos\left(\frac{t}{a}\cdot\sqrt{gc}\right)+\frac{p'a}{\sqrt{gc}}\cdot\sin\left(\frac{t}{a}\cdot\sqrt{gc}\right),$$

$$7)\qquad y = q\cdot\cos\left(\frac{t}{b}\cdot\sqrt{gc}\right)+\frac{q'b}{\sqrt{gc}}\cdot\sin\left(\frac{t}{b}\cdot\sqrt{gc}\right).$$

Denkt man sich den besondern Fall, wo $a = b = c = 1$ ist, so müssen diese Resultate mit denen zusammenfallen, welche man im (I. Th. Mech. §. 51.) für das Centrifugal-Pendel erhalten hat. Es waren aber dort ψ und θ so genommen, daß wegen des sehr kleinen Werthes von ψ,

$$x = l\psi\cdot\cos\theta \text{ und } y = l\psi\cdot\sin\theta$$

wird. Ferner war dort vorausgesetzt, daß für $t = 0$ gleichzeitig

$$\psi = w,\quad \theta = 0,\quad \partial\psi = 0 \text{ und } l\psi\cdot\partial\theta = v = m\sqrt{gl}$$

wird, folglich ist unter derselben Voraussetzung hier

$$p = lw,\quad p' = 0,\quad q = 0,\quad q' = m\sqrt{gl}$$

zu nehmen. — Dadurch gehen aber die Gleichungen (6. und 7.) in die nachstehenden über, nämlich in:

$$\psi\cdot\cos\theta = w\cdot\cos\left[t\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right] \text{ und } \psi\cdot\sin\theta = m\cdot\sin\left[t.\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right]:$$

woraus

$$\psi^2 = \tfrac{1}{2}(w^2+m^2)+\tfrac{1}{2}(w^2-m^2)\cdot\cos\left[2t.\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right]$$

und

$$w\cdot tg\,\theta = m\cdot tg\left[t\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}\right]$$

hervorgeht; genau so wie in dem angeführten Paragraphen.

§. 145.

Gesetz der Zusammensetzung der kleinen Bewegungen.

Wenn einmal, unter der Voraussetzung, daß für $t = 0$, also zu Anfange

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1, \quad \text{ꝛc.}$$
$$\partial u = \mathfrak{u}_1, \quad \partial v = \mathfrak{v}_1, \quad \partial w = \mathfrak{w}_1, \quad \text{ꝛc.}$$

ist, — für jedes t noch

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W, \quad \text{ꝛc.}$$

wird; wenn ferner unter der andern Voraussetzung, daß für $t = 0$,

$$u = u'_1, \quad v = v'_1, \quad w = w'_1, \quad \text{ꝛc.}$$
$$\partial u = \mathfrak{u}'_1, \quad \partial v = \mathfrak{v}'_1, \quad \partial w = \mathfrak{w}'_1, \quad \text{ꝛc.}$$

ist, für jedes t noch

$$u = U', \quad v = V', \quad w = W', \quad \text{ꝛc.}$$

wird; wenn abermals, sobald für $t = 0$

$$u = u''_1, \quad v = v''_1, \quad w = w''_1, \quad \text{ꝛc.}$$
$$\partial u = \mathfrak{u}''_1, \quad \partial v = \mathfrak{v}''_1, \quad \partial w = \mathfrak{w}''_1, \quad \text{ꝛc.}$$

ist, für jedes t noch

$$u = U'', \quad v = V'', \quad w = W'', \quad \text{ꝛc.}$$

wird; u. s. w. f.; — dann ist allemal

$$(\odot)\cdots \left\{ \begin{array}{l} u = U + U' + U'' + \text{ꝛc.}, \\ v = V + V' + V'' + \text{ꝛc.}, \\ w = W + W' + W'' + \text{ꝛc.}, \\ \text{u. s. w. f.,} \end{array} \right.$$

so oft zu Anfange, wo $t = 0$ ist,

$$u = u_1 + u'_1 + u''_1 + \text{ꝛc.}$$
$$v = v_1 + v'_1 + v''_1 + \text{ꝛc.}$$
$$w = w_1 + w'_1 + w''_1 + \text{ꝛc.}$$
$$\text{u. s. w. f.}$$
$$\partial u = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}'_1 + \mathfrak{u}''_1 + \text{ꝛc.}$$
$$\partial v = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}'_1 + \mathfrak{v}''_1 + \text{ꝛc.}$$
$$\partial w = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}'_1 + \mathfrak{w}''_1 + \text{ꝛc.}$$
$$\text{u. s. w. f.}$$

genommen wird.

Denn die Resultate (⊙) genügen in jedem einzelnen ihrer Summanden den Differenzial-Gleichungen; weil aber letztere lineär sind, so genügen auch die Summen selbst den Differenzial-Gleichungen; und dieselben Resultate, so wie auch ihre Differenzial-Koeffizienten, gehen für $t = 0$ in die dafür gemachten Voraussetzungen über. Also ist allen Bedingungen genügt.

Dieses Gesetz kann das Gesetz der Zusammensetzung der kleinen Bewegungen (principe de la superposition des petits mouvemens) genannt werden. Es gilt, versteht sich, nur, wenn die zweiten und höheren Dimensionen von u, v, w, etc. außer Acht gelassen werden können.

Diesem Gesetze zufolge verbreiten sich die von verschiedenen Punkten ausgehenden Ton-Wellen, und legen sich über einander ohne sich zu stören, so daß in jedem Augenblicke der Weg und die Geschwindigkeit eines Luft-Theilchens nach irgend einer Richtung, gleich sind bezüglich den Summen derjenigen Wege und Geschwindigkeiten, welche dasselbe Lufttheilchen machen und haben würde, wenn man jede Welle einzeln betrachten wollte; weshalb wir auch mehrere von verschiedenen Körpern hervorgebrachte Töne, jeden von dem andern abgesondert und ohne daß sie sich stören, zu gleicher Zeit hören. Die gleichzeitigen Töne können auch von der Koexistenz der kleinen Schwingungen in einem und demselben ertönenden Körper herrühren. Wenn z. B. eine gespannte Seite gleichzeitig die Schwingungen von gleicher Dauer hat, welche ihrer ganzen Länge und auch dem Drittheil derselben entsprechen, so ist die Bewegung der Luft dieselbe, wie wenn zwei Seiten von den angegebenen Längen, gleichzeitig die langsamsten Schwingungen hätten, deren sie fähig sind; und man hört gleichzeitig den Grund-Ton, und einen höhern Ton, nämlich die Quinte der obern Oktave. — Aus demselben Grunde hört man auch abgesondert von einander die Töne, welche durch die Längen-Schwingungen, und die andern, welche durch die gleichzeitigen Transversal-Schwingungen einer gespannten Seite erzeugt werden.

Nach demselben Gesetze legen sich die Wellen, welche an verschiedenen Stellen des Wassers erzeugt werden, indem sie sich in Kreisen um ihre Mittel-Punkte verbreiten, über einander ohne sich gegenseitig zu stören, so daß zu jeder Zeit und an jeder Stelle die Erhebung des Wassers genau die Summe der (positiven oder negativen) Erhebungen ist, welche statt finden würden, wenn man jede Welle einzeln betrachten wollte.

Die Erklärung, welche man von der Interferenz des Lichtes (in der Theorie der Licht-Wellen) giebt, gründet sich ebenfalls auf das sich Uebereinanderlegen der kleinen Bewegungen.

Anmerk. Wir fügen zu diesem Gesetze noch hinzu:

Wenn Kräfte auf das System der Massen-Punkte wirken, welche von beweglichen Punkten ausgehen, so sind die Q zur

Rechten der Gleichungen (6. des §. 138.) lineäre Funktionen dieser nach den Axen zerlegten Kräfte. Dasselbe findet dann auch bei deren allgemeinen Integral-Gleichungen statt, so daß also diejenigen Theile von u, v, w, ꝛc., welche von dem Anfangs-Zustande der Körper unabhängig sind, folglich auch die von dem Anfangs-Zustande unabhängigen Theile der Koordinaten-Werthe der Massen-Punkte m, m′, m″, ꝛc., die Summen derjenigen Werthe sind, welche sie haben würden, wenn die gegebenen Kräfte einzeln wirkten.

So ist z. B. in Bezug auf Ebbe und Fluth die gänzliche Erhebung des Meeres zu jeder Zeit und an jeder Stelle der Summe derjenigen Erhebungen gleich, welche statt finden würden, wenn einmal die Sonne allein und ein andermal der Mond allein wirksam wäre. Und dieserhalb sind die Fluthen unter übrigens gleichen Umständen die größten in den Syzygien und am kleinsten in den Quadraturen.

Anwendungen der Mechanik

zur Beantwortung

astronomischer, physikalischer und technischer Fragen.



Anwendungen der Mechanik.

Eilftes Kapitel.

Zur Mechanik des Himmels.

Vorerinnerung.

Wir haben (im I. Th. Mech. §. 49.) Bewegungen von Atomen betrachtet, welche nach den Keplerschen Gesetzen statt finden, und haben nach Größe und Richtung der beschleunigenden Kraft gefragt, welche wirken muß, damit gerade diese Bewegung eintreten könne. Wir fanden als Endresultat, 1) daß die Kraft immer nach einem festen Punkte hin gerichtet; 2) umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung des bewegten Atoms von diesem festen Punkte proportional; endlich 3) für verschiedene Atome, sobald wir das dritte Keplersche Gesetz voraussetzen, in der Einheits-Entfernung eine und dieselbe Kraft seyn müsse.

Wir kehrten dann (ebendaselbst) die Aufgabe um; setzten eine Central-Bewegung und die Intensität der Central-Kraft umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung proportional voraus, und wir fanden, daß sich dann die Bewegung wiederum nach den Keplerschen Gesetzen richten müsse.

Diese Untersuchungen wollen wir nun hier noch weiter fortsetzen.

§. 146.

Newton hat zuerst das Gesetz ausgesprochen: „daß alle „materiellen Punkte im direkten Verhältniß ihrer „Massen und im umgekehrten Verhältniß der Qua„drate ihrer Entfernungen von einander sich einan„der anziehen.“ (Vgl. II. Th. §. 41.) — Die Mechanik des Himmels hat sich die Aufgabe gestellt, alle Erscheinungen

in den Bewegungen der Himmels-Körper als nothwendige Folgen dieses allgemeinen Attraktions-Gesetzes abzuleiten.

In den großen Entfernungen, in welchen die Planeten von der Sonne (und auch von einander) stehen, und den, dagegen gehalten, nur geringen Dimensionen dieser Weltkörper, kann man sich die Anziehungen von je zwei Atomen derselben als unter sich parallel, und daher die Anziehungen aller Atome des einen Körpers, der die Masse M haben mag, auf alle Atome des andern, welcher die Masse m hat, nach der Theorie der parallelen Kräfte, in eine einzige (bewegende) Kraft vereint denken, welche zwischen den Schwer-Punkten beider Körper wirkt. Und weil die Welt-Körper nahehin Kugelgestalt haben, so ist (nach II. Th. §. 41. u. §. 66.) die Attraktions-Kraft zwischen beiden um so genauer

$$= \frac{\mathrm{Mmf.}}{r^2},$$

sobald man unter r die Entfernung der beiden Schwer-Punkte von einander versteht, während f die Größe der Attraktion zweier Massen-Einheiten in der Einheits-Entfernung vorstellt, d. h. das Verhältniß dieser Kraft zu der Einheits-Kraft. Unter dieser letztern verstehen wir aber immer diejenige beschleunigende Kraft, welche eine Zeit-Einheit hindurch stetig und unverändert und in derselben Richtung wirken muß, damit zu Ende dieser Zeit-Einheit die Einheits-Geschwindigkeit hervorgebracht sey, d. h. eine Geschwindigkeit, vermöge welcher der Atom in der Zeit-Einheit gerade die Raum-Einheit konstant durchläuft *).

Diese Zahl f ist, so weit bis jetzt unsere Kenntniß der Natur reicht, für alle Körper eine konstante und unveränderliche.

§. 147.

---

*) Man müßte eigentlich sagen, daß die Einheits-Kraft eine bewegende Kraft sey, welche auf die Einheits-Masse eine volle Sekunde hindurch stetig und in derselben Richtung wirken müsse, um eine Geschwindigkeit aller Atome dieser Einheits-Masse hervorzubringen, mit welcher jeder derselben in der Zeit-Einheit konstant die Raum-Einheit beschreiben würde. Dies ist aber dasselbe, in Zahlen, was wir immer unter dem Namen der beschleunigenden Kraft in Rechnung gebracht haben.

§. 147.

Da nun die bewegende Kraft $\frac{Mmf}{r^2}$ zwischen beiden Planeten wirkt, so theilt sie jedem Atom derselben eine beschleunigende Kraft mit, welche (nach §. 8.) für die Atome des einen

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{Mmf}{r^2}, \text{ d. h. } = \frac{mf}{r^2},$$

für die Atome des andern dagegen

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{Mmf}{r^2}, \text{ d. h. } = \frac{Mf}{r^2}$$

ist (nach §. 8.). Vermöge dieser beschleunigenden Kräfte werden sich also beide Körper gegen einander bewegen, und in derselben unendlich-kleinen Zeit Wege beschreiben, welche sich wie diese Kräfte $\frac{mf}{r^2}$ und $\frac{Mf}{r^2}$, d. h. wie $\frac{1}{M} : \frac{1}{m}$, also umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Soll aber die relative Bewegung des Planeten m um die Sonne M betrachtet werden, so muß m beide Wege beschreiben, um zu Ende der gedachten unendlich-kleinen Zeit in derselben Entfernung von der Sonne M zu seyn; deshalb muß man dann als beschleunigende Kraft eines jeden Atoms des Planeten m in der Richtung gegen die Sonne die Summe

$$\frac{mf}{r^2} + \frac{Mf}{r^2} \text{ oder } \frac{(m+M)f}{r^2}$$

in Rechnung bringen.

Haben wir daher in den Aufgaben des (I. Th. §. 49.) die wirkende Central-Kraft mit $\frac{\mu}{r^2}$ in Rechnung gebracht, so sieht man jetzt, daß jene Zahl μ gegeben ist durch die Gleichung

$$1) \qquad \mu = (M+m)f.$$

Haben wir ferner (im I. Th. §. 49.) gefunden, daß wenn a die mittere Entfernung des Planeten von der Sonne und T die Umlaufs-Zeit vorstellt, dann allemal

$$2) \qquad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu$$

seyn müsse, so folgt jetzt, wenn man statt μ den vorliegenden Werth setzt:

$$3) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f.(M+m)}.$$

Für einen andern Planeten, dessen Masse m', mittlere Entfernung a' und Umlaufs-Zeit T' ist, hat man also

$$4) \quad \frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{f.(M+m')}.$$

Folglich ist für zwei verschiedene Planeten nicht

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3},$$

d. h. das dritte Keplersche Gesetz findet nicht genau statt. Weil aber die aus den Beobachtungen gefolgerten Rechnungen für je zwei Planeten diese Verhältnisse $\frac{T^2}{a^3}$ und $\frac{T'^2}{a'^3}$, wenn auch nicht genau, doch sehr genähert als einander gleich nachweisen, so folgt, daß $\frac{m}{M}$ und $\frac{m'}{M}$ sehr nahehin einander gleich seyn müssen, d. h. daß, wenn m und m' von einander verschieden sind, die Masse M der Sonne gegen die Massen (m und m') der übrigen Planeten sehr groß seyn müsse *).

Dies letztere ist nun der Grund, warum man in dem Problem der Bewegung eines Planeten m um die Sonne, zunächst nur auf die Einwirkung der Sonne Rücksicht zu nehmen braucht, weil die Einwirkungen der übrigen Planeten auf m nur sehr langsame oder sehr unbedeutende Störungen (Perturbationen) in der von der Anziehung der Sonne herrührenden elliptischen Bewegung verursachen können.

Nimmt man dann auch auf diese Störungs-Kräfte Rücksicht, so werden doch die Rechnungen und namentlich die Integrationen der Gleichungen der Bewegung weit einfacher, weil man nun die (im §. 126.) beschriebene „Methode der Variation der Konstanten" in Anwendung bringen kann.

*) In der That ist die Masse des Jupiters, der unter allen Planeten die größeste Masse hat, kleiner als $\frac{1}{1000}$ der Masse der Sonne.

Anmerk. Es ist dabei merkwürdig, daß diese Störungen nicht die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne ändern, und auch nicht die mittleren Bewegungen derselben; eben so wenig, als die durch die Gleichung (3.) gegebene Umlaufs-Zeit.

§. 148.

Ist ϱ die Entfernung zweier Planeten m und m' (d. h. die Entfernung ihrer Schwer-Punkte) von einander, so ist die Anziehungs-Kraft zwischen beiden $= \frac{mm'f}{\varrho^2}$, und die für m hervorgehende beschleunigende Kraft $= \frac{m'f}{\varrho^2}$, also mit der Masse des störenden Planeten m' proportional, dagegen von der Masse m des gestörten Planeten ganz unabhängig. Beobachtet man daher die Störungen, welche m auf m' ausübt, so kann man daraus auf die Größe der Masse m' zurückschließen. — Auf diese Weise hat man aus den bedeutendern Störungen, welche der Jupiter auf den Saturn ausübt, die Masse des Jupiters $= \frac{1}{1070}$ der Masse der Sonne geschlossen. — Man hat aber auch noch ein anderes Mittel, um die Masse derjenigen Planeten, welche Monde haben, zu finden.

Es sey nämlich m' ein Satellit (Mond) des Planeten m, und r' der Abstand ihrer Schwer-Punkte von einander, während m', m, M die Massen des Satelliten, des Planeten und der Sonne vorstellen sollen. Bei der Bewegung des Mondes um seinen Planeten, da beide von der Sonne nahehin gleich stark angezogen werden, kann man den Einfluß der letztern außer Acht lassen, und man hat also die Rechnungen der zweiten Aufgabe des (I. Th. Mech. §. 49.), indem man $\frac{\mu'}{r'^2}$ als die durch die Anziehung hervorgebrachte beschleunigende Kraft des Schwer-Punktes von m' nimmt, und m unbeweglich sich denkt, während dann (nach §. 147. Nr. 1.)

$$1) \qquad \mu' = (m+m')f$$

ist. Ist nun a' die mittlere Entfernung des Satelliten von seinem Planeten (d. h. die halbe große Axe seiner elliptischen Bahn um den Planeten, letzteren als unbeweglich gedacht) und bedeutet T' die Umlaufszeit des Mondes um den Planeten, so hat man (nach §. 147. Nr. 3.)

$$2) \qquad \frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{f(m+m')}.$$

Dividirt man diese Gleichung und die andere für die Bewegung des Planeten um die Sonne, nämlich

$$3) \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M+m)},$$

durch einander, so erhält man

$$4) \qquad \frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{a'^3}{a^3} = \frac{m+m'}{M+m}.$$

Ist nun m' gegen m sehr klein, wie dies z. B. bei den Satelliten oder Monden des Jupiters der Fall ist, so kann man in dieser Formel bloß m statt $m+m'$ setzen, und man hat dann die Gleichung

$$5) \qquad \frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{a'^3}{a^3} = \frac{m}{M+m} = \frac{m}{M} : \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

aus welcher das Verhältniß $\frac{m}{M}$ ohne weiteres gefunden werden kann. Auf diesem Wege hat Newton die Masse des Jupiters $= \frac{1}{1067}$ der Sonne gefunden, was von dem später auf anderen Wegen gefundenen Verhältniß $\frac{1}{1054}$ nur sehr wenig abweicht.

§. 149.

Die aus den verschiedenen Stellungen des Mondes und seines Planeten gegen die Sonne, hervorgehende, wenn auch nur geringe Ungleichheit der Anziehung der letztern, bringt in der Bewegung des Mondes eine ähnliche Störung hervor, wie sie der Planet durch die übrigen Planeten erfährt. Hat aber ein Planet mehrere Monde, so stören sich diese noch überdieß wechselseitig auf analoge Weise; und man kann sich dieser letztern

Störungen bedienen, um das Verhältniß ihrer Massen zu dem ihres Planeten auszumitteln *).

Sonne und Mond üben nach ihren verschiedenen Stellungen gegen die Erde, auf die leicht beweglichen Meere Wirkungen aus, die wir durch den Namen von „Ebbe und Fluth" bezeichnen. Solche lassen sich dadurch leicht bestimmen, daß man die Größe der Anziehung des Mondes (oder der Sonne), auf irgend ein Theilchen des Meeres bestimmt, solche nach dem Kräften-Parallelogramm in zwei Theile zerlegt, wovon der Eine mit der Verbindungs-Linie der Schwer-Punkte der Erde und des Mondes (oder der Sonne) parallel, die andere senkrecht darauf wirkt. Die ersteren Kräfte, die alle mit der Verbindungs-Linie der Schwer-Punkte parallel sind, bestimmen den Weg, den die ganze Erde gegen den Mond (oder gegen die Sonne) nimmt; die anderen auf die gedachte Entfernung senkrechten Kräfte, deren Ausdrücke die Masse des Mondes (oder der Sonne) in sich aufnehmen, bestimmen nun die „Ebbe und Fluth". Da nun die von dem Monde und der Sonne herrührenden Bewegungen des Meeres, vermöge der verschiedenen Gesetze, die sie befolgen, in den Beobachtungen sich von einander absondern lassen, so kann man das Verhältniß derselben durch eine Zahl ausdrücken, die für einen bestimmten Ort der Erde, und unter gleichen Stellungen des Mondes und der Sonne gegen die Erde durch ω **) ausgedrückt seyn mag. Die Vergleichung der Ausdrücke für die Bewegungen der Meere, die vom Monde und von der Sonne herrühren, führen dann zu der Gleichung

$$\frac{m'}{m} = \omega \cdot \frac{\alpha^3}{a^3} \cdot \frac{M}{m},$$

wo m die Masse der Erde, m' die des Mondes, M die der Sonne ist, und wo endlich α und a bezüglich die Entfernungen

*) Auf diesem Wege hat man gefunden, daß die Masse eines Jupiter-Mondes noch nicht einmal $\frac{1}{10000}$ der Masse des Jupiters ist.

**) Eine große Anzahl zu Brest angestellter Beobachtungen hat

$$\omega = 2{,}3533$$

gegeben.

des Mondes und der Sonne von der Erde vorstellen. — So bestimmt sich die Masse des Mondes auf $\frac{1}{75}$ von der Masse der Erde *).

§. 150.

Der Mond vermindert auch die Schwere, d. h. die Anziehung, welche die Erde auf Körper ausübt, die auf ihrer Oberfläche liegen. Diese letztere muß aber wegen der von der Kugel wenig abweichenden Gestalt der Erde $= \frac{fm}{r^2}$ seyn, wenn m die Masse der Erde, und r den Erd-Halbmesser vorstellt (nach II. Th. §. 66.) und wenn die Schwere nichts anders als diese allgemeine Anziehungs-Kraft ist. Die durch die Anziehung des Mondes verursachte Verminderung der Schwere zeigt sich aber so gering, wenn man sie berechnet, daß sie nur auf die siebente Decimalstelle in dem Werthe von g Einfluß hätte.

Bestimmt man aus der Bewegung des Mondes die Anziehungs-Kraft der Erde und reducirt man dieselbe auf die Oberfläche der Erde (im Verhältniß des Quadrats der umgekehrten Entfernung), so findet sich in der That, wenn man auf alle einfließenden Neben-Umstände Rücksicht nimmt, der Werth von g nur unmerklich verschieden von demjenigen Werthe, den die Pendel-Beobachtungen ergeben. Folglich hat in der That unsere Schwere keine andere Ursache, als jene allgemeine Anziehung, wie sie zwischen je zwei materiellen Atomen des ganzen Universums statt hat.

Nimmt man aber

$$1) \qquad g = \frac{fm}{r^2},$$

---

*) Man kann natürlich auch auf die Masse des Mondes aus jeder anderweitigen Einwirkung desselben, z. B. auf den nicht kugelförmigen Theil der Erde schließen, welcher übrig bleibt, wenn man sich die größte Kugel als Kern der Erde, weggenommen denkt. Diese Einwirkung bringt nämlich, wie wir bereits (§. 113.) gesehen haben, eine Aenderung in der Lage der Erd-Axe hervor (die sogenannte Nutation); und aus der Größe dieser letztern, so weit sie vom Monde herrührt, muß also die Größe der einwirkenden Masse, d. h. der Masse des Mondes hergeleitet werden können.

und multiplicirt man diese Gleichung mit der (3. des §. 147.) nämlich mit

$$2) \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f\cdot(M+m)},$$

so erhält man

$$3) \qquad \frac{m}{M+m} = \frac{gT^2r^2}{4\pi^2a^3}.$$

Diese Gleichung dient nun zur Bestimmung des Verhältnisses der Masse m der Erde, zu der Masse M der Sonne, wenn der Erd-Halbmesser r, die Umlaufszeit T der Erde um die Sonne, und die halbe große Axe a der elliptischen Erdbahn (die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne) bekannt sind, und wenn man g so nimmt, wie solches aus Pendel-Schwingungen unter einer Breite beobachtet worden ist, deren Sinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, in so fern nach der Theorie der Attraktionen der Ellipsoide, die Gleichung (1.), nämlich $g = \frac{fm}{r^2}$, nur dann am genauesten wahr ist. Doch muß man auch nicht unterlassen, das unter dieser Breite beobachtete g noch um den Theil zu vermehren, um welchen die Centrifugal-Kraft die Schwere selbst vermindert. (Vgl. I. Th. Mech. §. 51.).

Aber eben so muß man statt r den zu dieser Breite gehörigen Erd-Halbmesser nehmen, während a aus der Parallaxe der Sonne für diese Breite und für ihre mittlere Entfernung von der Erde genommen werden kann. Auf diesem Wege hat man, wenn m die Masse der Erde und M die Masse der Sonne vorstellt

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{354592}$$

gefunden.

§. 151.

Dividirt man die Gleichungen (§. 147. NNr. 3. und 4.) durch einander, so erhält man:

$$\frac{a'^3}{a^3} = \frac{M+m'}{M+m}\cdot\frac{T'^2}{T^2}.$$

Dieser Formel kann man sich aber bedienen, um die Masse irgend eines andern Planeten m' zu finden, wenn die Masse der Erde m bekannt ist. Es versteht sich, daß immer nur von dem Verhältnisse der Massen zu der Masse der Sonne die Rede seyn kann, so daß man in allen diesen Untersuchungen am besten thut, die Masse M der Sonne $= 1$ zu setzen, wo dann m, m', immer nur kleine Brüche seyn können.

Man bedient sich aber derselben vorstehenden Formel, um umgekehrt, wenn die Masse m' des andern Planeten, seine Umlaufs-Zeit T', desgleichen für die Erde a und T bekannt sind, die mittlere Entfernung a' jenes andern Planeten von der Sonne zu berechnen. Dies ist besonders für diejenigen Planeten sehr anwendbar, welche Monde haben, deren Massen also nach dem Verfahren des (§. 148.) gefunden werden können, in so fern jenes Verfahren nur einen genäherten Werth dieser mittleren Entfernung a' voraussetzt, so daß die jetzige Procedur dasselbe a' viel genauer zu liefern im Stande ist.

§. 152.

Da man die Größen der Sonne und der Erde aus den Messungen kennt, so kann man daraus sogleich das Verhältniß ihrer mittlern Dichtigkeiten zu einander finden. Sind nämlich V, D, M, und v, d, m, bezüglich die Raum-Inhalte, mittleren Dichtigkeiten und Massen der Sonne und der Erde, so hat man

$$M = DV \quad \text{und} \quad m = dv;$$

folglich

$$\frac{m}{M} = \frac{d}{D} \cdot \frac{v}{V}$$

und

$$\frac{d}{D} = \frac{m:M}{v:V} \quad \text{oder} \quad \frac{D}{d} = \frac{M:m}{V:v}.$$

Kann man daher die mittlere Dichtigkeit d der Erde finden, so geht auch daraus die mittlere Dichtigkeit D der Sonne hervor.

§. 153.

Große Gebirgs-Massen müssen ein in ihrer Nähe hängendes

Senkblei von seiner vertikalen Lage abweichen machen. Dies hat sich durch die in Peru und in Schottland angestellten Versuche bestätigt*). Die nachstehende Rechnung mag zeigen, wie die Größe der Abweichung berechnet werden kann, wenn die, die Abweichung verursachende Masse eine Kugel und bekannt ist.

Es sey nämlich (Fig. 27.) CA ein solches Senkblei in C aufgehängt; solches bestehe aus einer Kugel, von welcher A der Mittel-Punkt ist, und aus einem unbiegsamen und unausdehnbaren Faden CA. Es sey noch O der Mittel-Punkt einer andern Kugel, welche auf die erstere einwirkt. Vermöge dieser Einwirkung wird das Senkblei von der vertikalen CB abweichen und in die Lage CA kommen, welche in der Ebene OCB liegt. Bezeichnen wir nun den Winkel BCA durch φ, die Linie OA durch y, so wie den Winkel BCO durch γ, so wird die Bedingung des Gleichgewichts des Senkbleies, in der Lage CA die Gleichung liefern, aus welcher die Abweichung φ gefunden werden kann.

Im Gleichgewichte wirkt das Gewicht P der Kugel an A in der vertikalen Richtung AD, während die Größe Q der Anziehung der andern Kugel in der Richtung AO wirkt. Diese beiden Kräfte vereinigen sich dann in eine einzige, welche in der Verlängerung CA wirkt, weil sonst das Senkblei nicht im Gleichgewicht seyn könnte. Es muß also das statische Moment von Q gleich seyn dem statischen Momente des Gewichtes P, beide in Bezug auf C als Centrum der Momente genommen. Nun ist aber der Arm CE des Momentes von P, $= CA \cdot \sin\varphi$, und der Arm CH des Momentes von Q, $= CA \cdot \sin CAH$; folglich hat man die Gleichung des Gleichgewichts

$$1) \qquad P \cdot \sin\varphi = Q \cdot \sin CAH.$$

Ist nun m die Masse der ganzen Erde, m' die Masse der anziehenden Kugel an O, und μ die Masse der Kugel am Senk-

*) Man bemerkt diese Abweichung, wenn man von zweien Seiten der Gebirge die (scheinbaren) Zenithe nach dem Senkblei nimmt, und den Unterschied derselben halbirt, vorausgesetzt, daß alles auf beiden Seiten ziemlich gleich ausgesucht worden ist.

blei, so hat man, wenn r den Radius der Erde vorstellt:

2) $P = \frac{\mu m f}{r^2}$ und 3) $Q = \frac{\mu m' f}{y^2}$.

Ist ferner $CO = c$ und $CA = a$, so hat man

4) $$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\gamma - \varphi),$$

und

5) $$\sin CAH = \sin CAO = \frac{c \cdot \sin(\gamma - \varphi)}{y}.$$

Ist ferner ϱ die mittlere Dichtigkeit der Erde, ϱ' die der anziehenden Kugel, und r' der Radius der letztern, so hat man, weil sich die Volumina der Kugeln, wie die Würfel ihrer Halbmesser verhalten,

6) $$m' : m = \varrho' \cdot r'^3 : \varrho \cdot r^3 \quad \text{oder} \quad m' = \frac{\varrho' \cdot r'^3 \cdot m}{\varrho \cdot r^3}.$$

Die Gleichung (1.) geht dadurch über in

7) $$\varrho r y^3 \cdot \sin\varphi = \varrho' r'^3 c \cdot \sin(\gamma - \varphi).$$

Wird zuletzt hier noch statt y sein Werth aus (4.) gesetzt, so kann man aus dieser Gleichung den Winkel φ finden, um welchen die Kugel an O (von dem Halbmesser r' und mittleren Dichtigkeit ϱ') das Senkblei von der vertikalen Richtung ablenken wird, wenn ϱ die mittlere Dichtigkeit der Erde, r der Erd-Halbmesser und a und c die bekannten Längen AC und OC vorstellen.

In den Fällen, die gewöhnlich statt finden, wo a gegen c sehr klein ist, kann man in

$$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\gamma - \varphi),$$

a gegen c vernachlässigen, und dann hat man bloß $y = c$; und (aus 7.)

8) $$\frac{\sin\varphi}{\sin(\gamma - \varphi)} = \frac{\varrho' \cdot r'^3}{\varrho r c^2}.$$

Nimmt man $c = r'$, so wie $\gamma = 90°$, so erhält man die größte Abweichung φ, nämlich

9) $$tg\,\varphi = \frac{\varrho' \cdot r'}{\varrho \cdot r};$$

und diese zeigt sich noch immer sehr gering, wenn man nicht die Dichtigkeit ϱ' viel größer als ϱ sich denkt. Eine Kugel von 180 Fuß im Durchmesser würde unter diesen günstigsten Umständen und wenn sie die mittlere Dichtigkeit der Erde hätte, das Senkblei noch nicht ganz um eine Sekunde abweichen machen.

Man hat übrigens beobachtetete Abweichungen des Senkbleies, in der Nähe der Gebirge auch umgekehrt dazu benutzt, um die mittlere Dichtigkeit der Erde daraus zu bestimmen. Es hat sich solche auf diesem Wege ungefähr 4 bis 5 mal so groß gefunden als die Dichtigkeit des Wassers.

§. 154.

Cavendish hat die Dreh-Wage *) zur Auffindung der mittlern Dichtigkeit der Erde benutzt, und hat letztere $= 5\frac{1}{2}$ gefunden, wenn die Dichtigkeit des Wassers $= 1$ gesetzt wird.

Diese Dreh-Wage besteht im Wesentlichen aus einer dünnen symmetrischen Stange ACA' (Fig. 28.), welche horizontal hängt, in so fern sie in ihrer Mitte C an einem vertikal hängenden dünnen Metall-Streifen befestigt ist; an den Enden dieser dünnen Stange befinden sich kleine Kugeln, die ihre Mittel-Punkte in A und A' haben mögen. Außerdem ist der Umfang des horizontalen Kreises, welchen diese Stange ACA' um C beschreiben kann, in sehr viele gleiche Theile getheilt, damit man die Winkel BCA messen kann, welche die Richtungen BC, AC der Stange in zweien ihrer verschiedenen Lagen BCB' und ACA' mit einander machen.

Ist nun BCB' die Anfangs-Lage der Stange, wo der vertikale Metallstreifen noch gar nicht gewunden ist; dreht man dann die Stange, um sie in die Lage ACA' zu bringen, so wird dadurch der vertikale Metall-Streifen sich aufwinden, und das

*) Die Dreh-Wage ist höchst geeignet um sehr kleine Kräfte zu messen, und wird deshalb vorzüglich häufig zur Messung elektrischer Kräfte benutzt. Daher hat sie auch den Namen elektrische Wage. Sie ist zuerst von Coulomb gebraucht worden.

Bestreben haben, in seine alte Lage wieder zurück zu kehren. Bringt man nun an beiden Kugeln an A und A′ gleiche und entgegengesetzte Kräfte in der Richtung der Tangenten an, welche dieses Zurückgehen hindern, so kann man diese an beiden Enden angebrachte Kraft als das Maaß dieser Rückdrehungs-Kraft ansehen. Coulomb hat aus Versuchen gefunden, daß diese Rückdrehungs-Kraft allemal, unter übrigens gleichen Umständen mit dem Winkel BCA $= \theta$ proportional ist, so daß sie durch $h\theta$ ausgedrückt werden kann. Diese Rückdrehungs-Kraft ist also gleichgeltend mit zweien gleichen und entgegengesetzt in A und A′ tangentiell und horizontal wirkenden Kräften, von denen jede $= h\theta$ ist.

Cavendish hat nun symmetrisch zwei Blei-Kugeln von 8 englischen Zollen im Durchmesser angebracht, so etwa, daß O und O′ ihre Mittel-Punkte vorstellen können. Diese wirken vermöge der Attraktions-Kraft auf die kleinen Kugeln der Wage in B und B′, und machen die Wage um C drehen. Dadurch wird die Rückdreh-Kraft des vertikalen Metall-Streifens erregt, und es muß die Wage endlich in eine Lage kommen, wo, wenn sie ohne Geschwindigkeit ankäme (also wenn sie durch äußere Mittel dahin versetzt, in Ruhe gehalten, dann aber sich selbst überlassen würde) die Attraktions-Kraft der Blei-Kugeln in O und O′ und die Rückdreh-Kraft $h\theta$ einander das Gleichgewicht hielten. Weil aber die Wage in dieser Lage des Gleichgewichts mit einer Geschwindigkeit ankommt, so befindet sie sich in der Lage eines Pendels, nur daß sie ihre Schwingungen in der Horizontal-Ebene zurücklegt. Indem man nun diese horizontalen Schwingungen mit den Schwingungen eines gewöhnlichen (vertikalen) Pendels vergleicht, gelangt man zur Vergleichung zwischen der Anziehungs-Kraft der Bleikugeln zu der der ganzen Erde, woraus dann, weil die Dichtigkeit des Bleies bekannt ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde erschlossen werden kann. Die Rechnungen selbst nehmen sich ohngefähr so aus:

Es sey CB $=$ CA $= a$, CO $= c$, BCO $= \gamma$; ferner sey m' die Masse der Bleikugel in O. Der Winkel BCA, wie

er von BC zu Ende der Zeit t beschrieben seyn wird, sey durch θ bezeichnet, so wie AO durch z, so hat man sogleich z in θ ausgedrückt; denn es ist im Δ ACO,

$$1) \qquad z^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\gamma - \theta).$$

Auf A wirkt nun in der Richtung AO die Kraft $\frac{fm'}{z^2}$, wenn f, wie bisher immer, die Anziehungs-Kraft in der Einheits-Entfernung zwischen den Einheits-Massen ausdrückt. Diese Anziehungs-Kraft $\frac{fm'}{z^2}$ zerlegt sich in zweie, nämlich in die eine

$$= \frac{fm'c}{z^3} \cdot \sin(\gamma - \theta)$$

senkrecht auf CA, und in die andere in der Richtung CA selbst. Da diese letztere von derjenigen, welche von der andern Bleikugel in O' herrührt, vernichtet wird, so betrachten wir bloß die erstere, welche senkrecht auf CA wirkt. Von der zweiten Bleikugel in O' entsteht ganz dieselbe Wirkung auf A'. — Diesen Kräften genau entgegen wirkt die Rück-Dreh-Kraft $h\theta$, so daß die zu Ende der Zeit t auf's Neue hinzutretende Kraft

$$= \frac{fm'c}{z^3} \cdot \sin(\gamma - \theta) - h\theta$$

ist. Da nun $a\theta$ der Weg, also $a \cdot \partial\theta$ die Geschwindigkeit von A, und $a \cdot \partial^2\theta$ seine beschleunigende Kraft (oder vielmehr der durch dt dividirte Zuwachs an Geschwindigkeit) ist, so hat man die Gleichung der Bewegung für dieses horizontale Pendel, nämlich

$$2) \qquad a \cdot \partial^2\theta = \frac{fm'c}{z^3} \cdot \sin(\gamma - \theta) - h\theta.$$

Weil aber θ ein sehr kleiner Winkel bleibt zu jeder Zeit, so kann man die zweiten und höhern Potenzen von θ außer Acht lassen. Setzt man daher in dem Ausdrucke zur Rechten der Gleichung (2.) statt z seinen Werth (aus der 1.), entwickelt man dann den ganzen Ausdruck zur Rechten (in 2.) nach Potenzen von θ (mittelst des Meclaurinschen Lehrsatzes) und begnügt man sich mit der ersten Potenz von θ; setzt man ferner der Kürze wegen

3) den Anfangs-Werth BO von z, $= b$,

4) $$[(a^2+c^2)\cdot cos\gamma - 2ac - ac\cdot sin\gamma^2]\frac{fm'c}{b^5}+h = g',$$

und

5) $$\frac{fm'c\cdot sin\gamma}{b^3g'} = \beta,$$

so daß namentlich auch

6) $$b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot cos\gamma$$

ist; — so erhält man statt der Gleichung (2.) jetzt die nachstehende

7) $$a\cdot\partial^2\theta = g'\beta - g'\theta,$$

woraus, wenn man integrirt

8) $$\theta = \beta + k\cdot cos\left(t\sqrt{\left(\frac{g'}{a}\right)}+k'\right)$$

hervorgeht, während k und k' zwei willkührliche Konstanten vorstellen.

Da der größte und der kleinste Werth eines Kosinus +1 oder —1 ist, so sind die größten und kleinsten Werthe von θ offenbar $\beta+k$ und $\beta-k$. Macht man also BCD $= \beta$, so macht der horizontale Pendel auf beiden Seiten von DCD' gleiche und gleichzeitige (isochrone) Schwingungen, deren Weite k ist. Den Werth von β kann man aus den Beobachtungen durch Messung finden, indem man zwischen den beiden äußersten Abweichungen der Wage das Mittel nimmt. Die Lage DCD' der Wage ist (wenn nämlich BCD $= \beta$ gedacht ist) diejenige Lage, in welcher die Wage im Gleichgewichte bliebe, zwischen der Anzieh-Kraft und der Rück-Dreh-Kraft, wenn sie ohne Geschwindigkeit in dieser Lage ankäme.

Sucht man aus der Gleichung (8.) die Zeit T einer ganzen Schwingung, so findet sich

9) $$T = \pi\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{g'}\right)}.$$

Bei einem gewöhnlichen, bloß von der Schwere in Bewegung gesetzten (vertikalen) Pendel, welches seine Schwingungen in derselben Zeit T vollendet, ist, wenn l dessen Länge und g die örtliche Schwere vorstellt,

10) $$T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

11) $$ga = g'l;$$

oder, weil $g = \frac{fm}{r^2}$ und $g' = \frac{fm'c \cdot \sin\gamma}{\beta b^3}$ ist, wenn m die Masse der Erde und r den Erd-Halbmesser vorstellt,

12) $$\frac{m'}{m} = \frac{\beta ab^3}{clr^2 \cdot \sin\gamma}.$$

Kennt man aber das Verhältniß der Massen, und ist r' der Halbmesser der Blei-Kugeln und D' die Dichtigkeit des Bleies, so wie D die mittlere Dichtigkeit der Erde, so hat man noch

13) $$\frac{m'}{m} = \frac{D' \cdot r'^3}{D \cdot r^3}.$$

Also hat man (aus 12. u. 13.)

14) $$\frac{D}{D'} = \frac{clr'^3 \cdot \sin\gamma}{\beta ab^3 r},$$

wo der Ausdruck rechts ohne weiteres in Ziffern ausgewerthet werden kann, so daß man die mittlere Dichtigkeit D der Erde in die bekannte Dichtigkeit D' des Bleies, also auch in die Dichtigkeit des Wassers ausgedrückt hat.

(Man vgl. noch das 17te Heft des Journal de l'école polytechnique, in welchem das Memoire des Cavendish in einer französischen Uebersetzung abgedruckt sich findet.)

Anwendungen der Mechanik.

Zwölftes Kapitel.

Noch einiges vom Pendel; einiges zur Ballistik gehörige; vom ballistischen Pendel.

Erste Abtheilung.

Vom Pendel.

§. 155.

Wir haben zwar die Aufgabe des Massen-Pendels, oder, wie er häufiger genannt wird, des zusammengesetzten oder des physikalischen Pendels, schon zweimal behandelt, einmal (§. 36.) als ein bloßes Beispiel der Anwendung des d'Alembertschen Princips, und das anderemal (§. 62. Beispiel), in so fern er auch als ein Beispiel der Umdrehung eines Körpers um eine feste Dreh-Axe aufgestellt werden kann. Wir wollen aber hier noch in einige Einzelnheiten eingehen.

I. Was die allgemeine Gleichung des physikalischen Pendels betrifft, so erhält man solche augenblicklich, nach dem d'Alembertschen Principe, indem man den Zuwachs $d\omega$ an Winkel-Geschwindigkeit mit der Entfernung r eines Elementchens dM der schwingenden Masse multiplicirt, um den Zuwachs $r \cdot d\omega$ an wahrer Geschwindigkeit, und den Zuwachs $r \cdot d\omega \cdot dM$ an der „Größe der Bewegung" des Elementchens dM zu haben, wie sol-

solcher in der Zeit dt durch den neuen Zutritt des, in dem Schwer-Punkte der schwingenden Masse vereinigten Gewichts Mg·dt hervorgegangen ist. Multiplicirt man diesen Ausdruck noch einmal mit r, so hat man das statische Moment dieses Zuwachses an „Größe der Bewegung", und $d\omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM)$ drückt also die Summe der statischen Momente aller, von der ganzen Masse M in der Zeit dt gewonnenen Zuwachse an Größe der Bewegung aus, während $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ das Trägheits-Moment genannt, und nach Anleitung des IVten Kapitels berechnet wird. Diese Summe der statischen Momente muß nun nach dem d'Alembertschen Principe dem statischen Momente $Mg \cdot x_0 \cdot dt$ des Gewichtes Mg·dt der schwingenden Masse (ebenfalls in Bezug auf die Schwingungs-Axe genommen) gleich seyn, da solches eben (zu Ende der Zeit t, während die durch die Schwingungs-Axe und durch den Schwer-Punkt gelegte Ebene mit der Vertikal-Ebene den Winkel θ macht) auf's Neue als bewegende Kraft hinzutritt. Die Gleichung der Pendel-Bewegung ist daher

$$d\omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = Mg \cdot x_0 \cdot dt,$$

oder

$$\partial\omega_t \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = Mg \cdot x_0,$$

wo nur noch alles in den Winkel θ auszudrücken ist.

Es ist aber, wenn a die Entfernung des Schwer-Punktes von der Dreh-Axe vorstellt, der Arm x_0 des statischen Momentes des Gewichts Mg so:

$$x_0 = a \cdot \sin\theta.$$

Außerdem drückt, wenn α der Werth von θ für $t = 0$ ist, die Differenz $\alpha - \theta$ den Weg, also $\partial(\alpha - \theta)$ oder $-\partial\theta$ die Geschwindigkeit eines jeden Atoms aus, welcher von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernt ist, so daß also $-\partial\theta$ die Winkel-Geschwindigkeit ω, mithin

$$\partial\omega_t = -\partial^2\theta_t, \quad \text{oder} \quad \partial\omega = -\partial^2\theta$$

ist. Die Gleichung der Bewegung des Pendels geht dadurch über in

$$1) \qquad \partial^2\theta + \frac{Ma}{\Sigma(r^2 \cdot dM)} \cdot g \cdot \sin\theta = 0.$$

Ist nun Mk^2 das Trägheits-Moment der schwingenden

Masse M in Bezug auf eine, durch ihren Schwer-Punkt mit der Schwingungs-Axe parallel gedachte Axe, so ist (nach §. 45.)

2.) $\Sigma(r^2 \cdot \partial M) = Ma^2 + Mk^2 = M(a^2 + k^2)$;

und die Gleichung des Pendels geht dadurch über in

3.) $\partial^2\theta + \frac{a}{a^2+k^2} \cdot g \cdot \sin\theta = 0.$

Integrirt man diese Gleichung (3.), indem man sie mit $\partial\theta$ multiplicirt und links und rechts die Integrale nimmt, so erhält man

4.) $\partial\theta^2 + \frac{2ga}{a^2+k^2} \cdot (\cos\alpha - \cos\theta) = \Omega^2,$

wenn Ω^2 das Quadrat der Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ist, und wenn wir noch immer voraussetzen, daß für t = 0 noch $\theta = \alpha$ wird. Setzt man dann $\frac{1}{\partial t_\theta}$ statt $\partial\theta$, so findet man ∂t_θ als eine Funktion von θ und dann nach t ohne Weiteres durch ein Integral einer entwickelt gegebenen Funktion von θ nach θ, ausgedrückt.

Hat man aber eine Urgleichung zwischen t und θ gefunden, so hat man θ in t, also auch $-\partial\theta$, d. h. die Winkel-Geschwindigkeit ω in t, d. h. man hat alles, was nur immer gewünscht werden kann.

II. Aus diesen Gleichungen für den zusammengesetzten Pendel kann man auch die Gleichungen für den einfachen Pendel (den man wohl auch zuweilen den mathematischen nennt) wie solche (im I. Th. Mech. pag. 451. Note) bereits gefunden sind, auf's Neue ableiten. Denkt man sich nämlich die ganze schwingende Masse bloß auf den Schwer-Punkt derselben reducirt, so hat man das einfache Pendel, während die Entfernung a des Schwer-Punkts von der Schwingungs-Axe die sogenannte Länge desselben ausdrückt. Es ist aber unter der jetzt gemachten Voraussetzung das Trägheits-Moment $Mk^2 = 0$, also $k^2 = 0$; und setzt man diesen Werth 0 statt k und zu gleicher Zeit l statt a in die Gleichungen (3. und 4.), so daß l die Länge dieses

einfachen Pendels ausdrückt, so erhält man für den einfachen Pendel die beiden Gleichungen

5) $$\partial^2\theta + \frac{1}{l}\cdot g\cdot \sin\theta = 0,$$

6) $$\partial\theta^2 + \frac{2g}{l}(\cos\alpha - \cos\theta) = \Omega^2,$$

wo α und Ω^2 die Werthe von θ und $\partial\theta^2$ für $t = 0$ sind.

III. Man kann sich nun fragen: Wie groß muß die Länge l eines einfachen Pendels seyn, damit es mit dem zusammengesetzten Pendel (in I.) genau einerlei Schwingungen mache. Die Antwort giebt sich augenblicklich aus der Vergleichung der Gleichungen (3. u. 5., oder 4. und 6.) mit einander. Man findet

7) $$l = \frac{a^2 + k^2}{a} = a + \frac{k^2}{a},$$

wenn man nur zu gleicher Zeit voraussetzt, daß bei beiden Pendeln dieselben Anfangs-Werthe von θ und $\partial\theta^2$, nämlich α und Ω^2, genommmen werden.

Läßt man also irgend einen Massen-Pendel schwingen, bestimmt man aber l aus der Gleichung (7.) so kann man dann sogleich die Rechnungen statt finden lassen, wie solche (im I. Th. Mech. §. 51.) ausgeführt sich finden. Macht namentlich der zusammengesetzte Pendel nur sehr kleine Schwingungen, und ist T die Dauer einer solchen Schwingung, so findet sich noch

8) $$T = \pi\cdot\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)} \text{ und } g = \frac{\pi^2}{T^2}\cdot l,$$

wo statt l der Werth aus (7.) gesetzt wird, während die Dauer T einer Schwingung dadurch gefunden wird, daß man die Schwingungen zählt, welche der zusammengesetzte Pendel in einer gegebenen Anzahl von Sekunden macht, und letztere durch die Anzahl der Schwingungen dividirt.

IV. Man kann nun auch aus den Schwingungen eines zusammengesetzten Pendels die Länge λ des einfachen Sekunden-Pendels berechnen. Man hat nämlich, wenn T und l (wie in III.) bestimmt sind

$$T = \pi\cdot\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)},$$

also auch für $l = \lambda$, wo dann $T = 1$ ist,

$$1 = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{\lambda}{g}\right)},$$

mithin, wenn man diese Gleichungen durch einander dividirt,

$$9) \qquad \lambda = \frac{l}{T^2}.$$

V. Denkt man sich in der Gleichung (7.) l und k gegeben, und sucht man a dazu, so bekommt man für a zwei Werthe, nämlich

$$10) \qquad a = \tfrac{1}{2}l \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}l^2 - k^2},$$

die, weil der eine davon, den wir oben durch a ausgedrückt haben, reell ist, nothwendig alle beide reell sind. Wir wollen den andern dieser beiden Werthe, welcher nicht der oben unter a gedachte ist, durch a' bezeichnen, so hat man sogleich

$$11) \qquad a + a' = l,$$

während nebenbei noch hervorgeht, daß l nie kleiner als 2k werden kann, also auch nie kleiner als 2k gegeben seyn darf.

VI. Denkt man sich also einen beliebigen Körper von beliebiger Gestalt und von beliebiger Masse; denkt man sich durch den Schwer-Punkt S desselben eine beliebige Gerade SU, und in Bezug auf diese Gerade SU das Trägheits-Moment Mk^2 berechnet, und solches durch die Masse M dividirt, so hat man k^2. — Will man nun aus diesem Körper einen Pendel machen, welcher mit einem einfachen Pendel von der Länge l (die nicht kleiner als 2k gegeben seyn darf) gleichzeitige Schwingungen macht, so lege man durch die Gerade SU eine beliebige Ebene, nehme in selbiger auf jeder Seite von SU zwei andere, mit SU parallele gerade Linien OZ und $O'Z'$, welche von SU bezüglich um a und a' entfernt sind, während a und a' die beiden aus $l = \frac{a^2 + k^2}{a}$, oder aus $a^2 - la + k^2 = 0$ für a hervorgehenden Werthe $\frac{1}{2}l \pm \sqrt{\frac{1}{4}l^2 - a^2}$ vorstellen, und nehme nach Belieben entweder OZ oder $O'Z'$ zur Schwingungs-Axe, so wird man in jedem der beiden Fälle einen Pendel haben, welcher mit dem gegebenen einfachen Pendel gleichzeitige Schwin-

gungen macht. Diese beiden Schwingungs-Axen sind dabei (nach 11.) allemal um die Länge l von einander entfernt.

War aber, wie in (I.), die eine dieser beiden Schwingungs-Axen z. B. OZ schon zuvor gegeben, und hat man dazu die Länge l des zugehörigen einfachen Pendels gefunden, so darf man nur in der, durch den Schwer-Punkt S und durch OZ gelegten Ebene, auf der andern Seite des Schwer-Punktes eine zweite Gerade O'Z' parallel mit OZ und von letzterer um l entfernt nehmen, und man hat eine zugehörige zweite Schwingungs-Axe so daß, wenn man den Körper wirklich um diese zweite Axe O'Z' schwingen lassen wollte, dieselbe genau dieselben Schwingungen machen würde.

VII. Legt man durch den Schwer-Punkt S eine Ebene senkrecht auf OZ und O'Z', so erhält man zwei Durchschnitts-Punkte P und P', und jeder derselben heißt der **Mittel-Punkt der Schwingung um die andere der beiden Axen OZ und O'Z'**, in welcher er nicht liegt. — Je zwei solche mit einander parallele Axen OZ und O'Z', welche in einer und derselben, durch den Schwer-Punkt gehenden Ebene liegen, und von denen jede durch den, zur andern gehörigen Mittel-Punkt der Schwingung hindurch geht, kann man gleichzeitige Schwingungs-Axen nennen, weil der Pendel, er mag seine Schwingungen um die eine oder um die andere dieser Axen ausführen, allemal gleichzeitige Schwingungen macht, wenn nur α und Ω allemal dieselben bleiben.

VIII. Man begreift übrigens, daß die zu einem gegebenen l gehörigen Werthe von a und a' immer dieselben bleiben, so lange k denselben Werth behält, d. h. so lange jede der beiden gleichzeitigen Schwingungs-Axen, in der einen durch den Schwer-Punkt gehenden Ebene, mit jeder der beiden gleichzeitigen Schwingungs-Axen in jeder andern durch den Schwer-Punkt gelegten Ebene parallel bleibt. So wie man aber der durch den Schwer-Punkt gelegten Geraden, in Bezug auf welche das Trägheits-Moment Mk^2 genommen wird, eine andere Lage giebt, so kann der Werth von Mk^2, also der Werth von k^2 sich ändern, und

dann ändern sich auch die, zu einem gegebenen l gehörigen Werthe von a und a', oder der zu einem gegebenen a gehörige Werth von l und zugehörige Werth a', in so fern immer $a + a' = l$ seyn muß *).

Dieses letztere läßt sich sehr einfach in Formeln übersehen. Sind nämlich 𝔄, 𝔅, ℭ die zu dem Schwer-Punkte gehörigen drei Haupt-Trägheits-Momente, und sind α, β, γ die Winkel, welche die Gerade SU, oder die Schwingungs-Axe, mit den zu dem Schwer-Punkte gehörigen Haupt-Dreh-Axen macht, so hat man (nach §. 52.)

$$Mk^2 = \mathfrak{A} \cdot \cos\alpha^2 + \mathfrak{B} \cdot \cos\beta^2 + \mathfrak{C} \cdot \cos\gamma^2.$$

Der Werth von k^2 wird daher auch bei einer geänderten Richtung von SU noch derselbe bleiben können, wenn er auch in der Regel ein anderer werden wird. Sind nämlich α', β', γ', die Winkel, welche die neue Richtung SU mit den gedachten drei Haupt-Dreh-Axen macht, so wird k^2 denselben Werth behalten, so oft

$$\mathfrak{A} \cdot (\cos\alpha^2 - \cos\alpha'^2) + \mathfrak{B} \cdot (\cos\beta^2 - \cos\beta'^2) + \mathfrak{C} \cdot (\cos\gamma^2 - \cos\gamma'^2) = 0$$

ist, und dies wird auf unendlich viele Arten geschehen können.

IX. Sucht man die Werthe von a, α, β, γ für welche

$$l = a + \frac{\mathfrak{A} \cdot \cos\alpha^2 + \mathfrak{B} \cdot \cos\beta^2 + \mathfrak{C} \cdot \cos\gamma^2}{Ma}$$

ein Minimum wird, so findet man leicht, daß wenn 𝔄 das kleinste der drei Haupt-Trägheits-Momente ist, dann dieser Ausdruck für l offenbar der kleinste wird, wenn

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \beta = \gamma = 90^\circ$$

ist, und wenn $a = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}}{M}\right)}$ wird. Es wird dann l selbst

$$= 2\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}}{M}\right)} = 2a \text{ und } a' = a.$$

Die Schwingungs-Axen laufen also, im Falle die Länge l des

*) Die Existenz der Paare gleichzeitiger paralleler Schwingungs-Axen hat man mit Erfolg dazu benutzt (in so fern ihre Entfernung der Länge l des zugehörigen gleichzeitigen einfachen Pendels gleich ist), um die Länge l dieses einfachen Pendels ohne alle Rechnung zu finden.

gleichzeitigen einfachen Pendels ein Minimum werden soll, mit derjenigen der, zu dem Schwer-Punkte gehörigen Haupt-Dreh-Axen parallel, zu welcher das kleinste Haupt-Trägheits-Moment gehört.

§. 156.

Betrachten wir jetzt noch die Bewegung eines zusammengesetzten Pendels, unter der Voraussetzung, daß jedes Elementchen dF seiner Oberfläche, welches in der Richtung seiner Normale die Geschwindigkeit v hat, einen Widerstand der Luft oder eines sonstigen Mittels erleide, welcher für die Flächen-Einheit durch

1) $R = A \cdot v^{\alpha} + A' \cdot v^{\alpha'} + A'' \cdot v^{\alpha''} + \text{rc.}$

ausgedrückt seyn mag. Ist ϱ die Entfernung des Elementchens dF von der Schwingungs-Axe, ist ferner ω wiederum die Winkel-Geschwindigkeit der Schwingung (zu Ende der Zeit t), und ist ε der Winkel, welchen die Entfernung ϱ mit der Normale an dF macht, so ist $\varrho\omega \cdot \cos\varepsilon = v$ die, normal auf dF zerlegte Geschwindigkeit; und der (in 1. ausgedrückte) Widerstand R wird jetzt

2) $R = A \cdot \varrho^{\alpha} \cdot \omega^{\alpha} \cdot \cos\varepsilon^{\alpha} + A' \cdot \varrho^{\alpha'} \cdot \omega^{\alpha'} \cdot \cos\varepsilon^{\alpha'} + \cdots,$

während R·dF den Widerstand ausdrückt auf das Elementchen dF der Fläche.

Fällt nun von den drei rechtwinklichen Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die OZ mit der (horizontalen) Schwingungs-Axe zusammen, und ist OX horizontal, OY vertikal, sind ferner μ, ν die Winkel, welche die Normale an dF mit OX und OY macht, so zerlegt sich dieser Widerstand parallel mit OX und OY in

$$R \cdot \cos\mu \cdot dF \quad \text{und} \quad R \cdot \cos\nu \cdot dF,$$

während der mit OZ parallele Theil unausgedrückt bleiben mag. Sind nun x' und y' die Koordinaten-Werthe des Elementchens dF, so ist

$$(y' \cdot \cos\mu - x' \cdot \cos\nu) \cdot R \cdot dF$$

das statische Moment dieses Widerstandes, so daß in der Gleichung der Bewegung des Pendels

$$\partial\omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = Mg \cdot x_0,$$

welche (nach §. 155.) die Gleichheit der statischen Momente zwischen den verlorenen Kräften ausdrückt, zur Rechten noch das Glied

3) $\quad \Sigma(y' \cdot \cos\mu - x' \cdot \cos\nu) \cdot R \cdot dF$

hinzukommt, während das Zeichen Σ sich über die ganze Fläche F erstreckt, welche jedesmal den Widerstand erleidet. Bezeichnet man aber den Ausdruck

4) $\quad y' \cdot \cos\mu - x' \cdot \cos\nu$ durch ζ,

so daß ζ der Arm des statischen Momentes des Widerstandes $R \cdot dF$ ist, so sind ζ, so wie ε und ϱ (nach t) konstant; man kann daher

5) $\quad \Sigma(\zeta \cdot \varrho^\alpha \cdot \cos\varepsilon^\alpha \cdot dF) = \gamma, \quad \Sigma(\zeta \cdot \varrho^{\alpha'} \cdot \cos\varepsilon^{\alpha'} \cdot dF) = \gamma'$, 2c.

berechnen, in so fern die Gleichung der Oberfläche F gegeben ist, und in so fern die Grenzen des, den Widerstand erleidenden Theils dieser Fläche durch einen um den schwingenden Körper, wenn solcher in seiner Gleichgewichts-Lage gedacht wird, beschriebenen Cylinder bestimmt sind, dessen Seiten horizontal liegen. Sind die beiden Seiten der Fläche F nicht symmetrisch, so sind die Werthe von γ, γ', 2c. für die eine Schwingung anders, wie für die nächst folgende, welche in der entgegengesetzten Richtung statt hat.

Die Gleichung des Pendels wird dann, wenn man wieder wie im (§. 155.) umformt, die nachstehende

6) $$\partial^2\theta + \frac{ga \cdot \sin\theta}{a^2 + k^2} + \frac{A\gamma}{M(a^2+k^2)} \cdot \omega^\alpha + \frac{A'\gamma'}{M(a^2+k^2)} \cdot \omega^{\alpha'} + \text{2c.} = 0.$$

Wendet man aber wieder dieselben Betrachtungen auf den einfachen Pendel von der Länge l an, so hat man für diesen die Gleichung

7) $$\partial^2\theta + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta + B \cdot \omega^\alpha + B' \cdot \omega^{\alpha'} + \text{2c.} = 0,$$

wo B, B', 2c. (nach t) konstante Koefficienten sind.

Sind nun in beiden Pendeln die Anfangs-Werthe von θ

und $\delta\theta$ dieselben, so machen wieder beide genau gleichzeitige Schwingungen, wenn man nicht bloß

$$8) \qquad l = a + \frac{k^2}{a},$$

sondern auch noch

$$9) \qquad B = \frac{A\gamma}{M(a^2 + k^2)}, \quad B' = \frac{A'\gamma'}{M(a^2 + k^2)}, \text{ ꝛc.}$$

macht. Dadurch reducirt sich aber der zusammengesetzte Pendel auf den hier zuletzt gedachten einfachen; und alles, was im I. Th. Mech. (§. 51.) über den letzteren gesagt ist, gilt also nun ohne Weiteres. In diesem letzgedachten einfachen Pendel ist aber die Länge l desselben von dem Widerstande des Mittels ganz unabhängig (nach 8.), während der für das einfache Pendel in Rechnung gebrachte Widerstand, von der Natur des gegebenen Mittels und von der Gestalt und Masse des zusammengesetzten Pendels abhängt.

Da nun bei dem einfachen Pendel die Schwingungs-Zeit von dem widerstehenden Mittel ganz unabhängig ist, sobald nur die Schwingungen unendlich klein gedacht werden (nach I. Th. Mech. §. 51.), so folgt noch, daß unter derselben Voraussetzung (unendlich-kleiner Schwingungen) der Widerstand des Mittels auch auf die Schwingungs-Zeit des zusammengesetzten Pendels keinen Einfluß äußern werde. — Bei sehr kleinen Schwingungen wird also der Einfluß des Widerstandes des Mittels auf die Schwingungs-Zeit, auch bei dem zusammengesetzten Pendel unmerklich.

§. 157.

Das Gesetz, daß die Schwere g vom Pol nach dem Aequator hin abnimmt im Verhältniß des Quadrats des Kosinus der Breite (I. Th. Mech. §. 51.) setzt voraus, daß die aus Pendel-Beobachtungen an irgend einer Stelle des Festlandes gezogenen Werthe von g auf den Horizont der Meere reducirt seyen. Wir wollen daher hier noch zeigen, wie diese Reduktion auf theoretischem Wege statt finde.

Es sey (Fig. 29.) DAMBE der Horizont der Meere und AM′B ein heraustretendes Festland, C der Mittel-Punkt der Erde und M′ der Beobachtungs-Ort. Die Höhe MM′ = h sey (durch Nivellement oder durch Barometer-Messungen) bekannt; auch seyen bedeutende Berge und das Meer selbst, nicht in der Nähe. Unter dieser Voraussetzung kann man annehmen, daß dieses Festland überall dieselbe Höhe h über dem Horizont der Meere habe, in dem kreisförmigen Umfange, dessen Radius c ist. Die Dichtigkeit dieses Festlandes sey ϱ'.

Es sey nun K ein Atom dieser Schicht, und z und y seyen seine Abstände KH und KL von der Oberfläche der Schicht und vom Radius CM′. Beschreibt man nun aus LM′ als Axe zwei cylindrische Oberflächen, mit den Radien y und y + dy, so schneiden solche eine cylindrische Schicht aus, deren Grundfläche $\pi(y+dy)^2 - \pi y^2$, d. h. $2\pi y \cdot dy$, deren Höhe aber h ist. Wird dieselbe noch durch unendlich viele, auf z senkrechte Ebenen in unendlich viele Ringe zertheilt, so hat der Ring zu welchem K gehört, den Inhalt $2\pi y \cdot dy \cdot dz$ und die Masse $2\pi\varrho' y \cdot dy \cdot dz$. Alle Anziehungen aller Massen-Elemente dieses Ringes auf M′ vereinigen sich nun in eine einzige Kraft in der Richtung M′C und diese ist gleich der Summe aller einzelnen, parallel mit CM′ zerlegten Anziehungen. Diese berechnet sich nun wie folgt: Es ist

$$1) \quad KM' = \sqrt{y^2+z^2} \text{ und } \cos KM'M = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

folglich ist die Anziehung des Massen-Elementchens dm bei K, auf M′,

$$2) \quad = \frac{f \cdot dm}{y^2+z^2};$$

und der parallel mit CM′ zerlegte Theil hiervon,

$$3) \quad = \frac{f \cdot z \cdot dm}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich ist die Summe aller dieser letztern Kräfte, für alle Elemente des ganzen Ringes

$$4) \quad = \Sigma \frac{f \cdot z \cdot dm}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ oder } = \frac{f \cdot z}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Sigma(dm),$$

in so fern f (die Anziehung zweier Massen-Einheiten in der Einheits-Entfernung) und z und y, rings herum dieselben Werthe haben. Nun ist aber $\Sigma(dm)$ nichts anders als die (oben bestimmte) Masse $2\pi\varrho' y\cdot dy\cdot dz$ des Ringes. Folglich ist die von dem Ringe herrührende Anziehung auf M′ in der Richtung M′C,

$$5)\quad = \frac{2\pi f\varrho' yz\cdot dy\cdot dz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrirt man nun diesen Ausdruck nach z von $z = 0$ bis $z = h$, so hat man die Anziehung der cylindrischen Schicht auf die Stelle in M′; und wird das Resultat zuletzt noch nach y integrirt zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = c$, so erhält man die Anziehung k' des ganzen, über dem Horizonte der Meere hervorragenden Stücks des Festlandes, auf die Stelle M′, in der Richtung M′C. Man findet

$$6)\quad k' = 2\pi f\varrho'(c+h-\sqrt{c^2+h^2}).$$

In der Regel kann man aber h^2 gegen c^2 (in c^2+h^2) verschwinden lassen, und dann erhält man diese Anziehung

$$7)\quad k' = 2\pi f\varrho' h.$$

Ist nun k die Anziehung des Kerns der Erde bis zu dem Horizonte der Meere genommen, auf die Stelle M dieses Horizontes; und ist ferner der Halbmesser $CM = r$ gesetzt, so ist die Anziehung desselben Kerns auf die Stelle M′,

$$8)\quad = \frac{kr^2}{(r+h)^2}.$$

Ist nun g die Schwere an M, und γ die nach der Richtung der Schwere zerlegte Centrifugal-Kraft, so hat man, wenn g' und γ' dieselben Bedeutungen an M′ haben,

$$9)\quad g = k-\gamma \text{ und } g' = \frac{kr^2}{(r+h)^2}+k'-\gamma'.$$

Dies giebt, wenn man nach Potenzen von h entwikkelt und bereits das Quadrat h^2, so wie noch $\gamma'-\gamma$ als sehr klein außer Acht läßt,

$$10)\quad g-g' = \frac{2kh}{r}-k' = \frac{2kh}{r}-2\pi f\varrho' h.$$

Ist aber ϱ die mittlere Dichtigkeit der Erde, so hat man noch zur Elimination von f die Gleichung

11) $$g = \tfrac{4}{3}\pi\varrho f r,$$

in so fern $\frac{4}{3}\pi r^3$ der Inhalt, $\frac{4}{3}\pi\varrho r^3$ die Masse und $\frac{4}{3}\pi\varrho r^3 \cdot \frac{f}{r^2}$ die Größe g der Anziehung der ganzen Erde auf M seyn muß, letztere als eine Kugel betrachtet, welches für diesen Zweck genau genug ist. Setzt man nun (in 10. zur Rechten) weil $\frac{k}{r}$ klein ist, das davon wenig verschiedene $\frac{g'}{r}$ dafür, und substituirt man statt f den aus (11.) gezogenen Werth, indem man darin, wegen des kleinen h, ebenfalls g' statt g setzen kann und setzt, so erhält man

12) $$g = g'\left(1 + \frac{2h}{r} - \frac{3\varrho' h}{2\varrho r}\right);$$

welches die gesuchte Reduktions-Formel ist, durch welche man aus dem in M' aus den Pendel-Schwingungen beobachteten Werth g', den Werth g berechnen kann, wie solcher in M auf dem Horizonte der Meere beobachtet werden würde, wenn die Schicht des Festlandes oberhalb dieses Horizontes gar nicht vorhanden wäre.

Umgekehrt kann man sich dieser Formel (12.) bedienen, um, wenn g aus dem Gesetze der Abnahme der Schwere vom Pol zum Aequator für irgend einen auf den Horizont reducirten Ort der Erde vorausgesetzt werden sollte, die Schwere g' zu berechnen, wie sie sich an dem (höher gelegenen) Orte selbst zeigen müßte *).

---

*) Poisson hat auf diese hier vorstehend aus einandergesetzte Weise gezeigt, daß die gewöhnliche Reduktions-Formel

$$g = g' \cdot \frac{(r+h)^2}{r^2},$$

die Korrektion fast um die Hälfte zu groß giebt, und zwar deshalb, weil bei ihr die Anziehung der über den Horizont der Meere hervorragenden Schicht des Festlandes völlig unbeachtet bleibt.

Zweite Abtheilung.

Einiges zur Ballistik gehörige; namentlich vom ballistischen Pendel.

§. 158.

Robins ballistisches Pendel.

Man hat den Pendel auch dazu benutzt, um die Geschwindigkeit eines geworfenen Körpers auszumitteln. Robins hat zuerst diesen Gedanken gehabt und ausgeführt, und Hutton hat darüber eine Reihe von Versuchen angestellt und in einem eigenen Werke beschrieben.

Dieser Pendel des Robins besteht aus einer sehr großen Masse (im Verhältniß zu der dagegen abgeschossenen Kugel-Masse), welche sich um eine feste Axe drehen kann. In diese Masse dringt nun die Kugel, deren Geschwindigkeit man wissen will, ein und bleibt darin stekken. Dadurch kommt der Pendel in Bewegung, und man mißt den Bogen, welchen irgend ein Punkt dieser festen Masse beschreibt, bis er wieder in Ruhe kommt, um unmittelbar darauf rückwärts zu gehen. Daraus berechnet man die „Größe der Bewegung" und daraus die Geschwindigkeit der abgeschossenen Kugel.

Es stelle (Fig. 30.) AEBF einen auf die Dreh-Axe senkrechten und durch den Schwer-Punkt S gehenden Querschnitt des Pendels vor. Es sey C ein Punkt der Dreh-Axe und O der Mittel-Punkt der Schwingung um diese Axe, so daß CO $= l$ die Länge des, mit diesem Pendel gleichzeitige Schwingungen machenden einfachen Pendels ist. Im Zustande des Gleichgewichtes ist also CSO eine gerade Linie, welche in jeder Lage des Pendels das untere Ende desselben in einem Punkte B treffen wird. Die Kugel, deren Masse μ ist, werde an der Stelle E gegen diese Masse M des Pendels geschossen, so daß E der Mittel-Punkt der kreisförmigen Oeffnung ist, welche sie veranlaßt. Ist nun v die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel, in dem Augenblicke, wo sie dem Pendel begegnet, also μv ihre „Größe

der Bewegung"; ist ferner M die Masse des schwingenden Pendels, Mk^2 sein Trägheits-Moment in Bezug auf eine, parallel mit der Schwingungs-Axe durch den Schwer-Punkt gedachte Dreh-Axe, ist endlich p die Länge des Arms des statischen Momentes der Kraft μv in Bezug auf C als Centrum der Momente (d. h. das Perpendikel von C auf die Richtung des Schwer-Punkts von μ in dem Augenblicke, wo diese Masse μ in den Pendel eindringt), und a die Entfernung CS des Schwer-Punktes S von der Dreh-Axe C, so ist die Anfangs-Geschwindigkeit Ω des Pendels nach dem d'Alembertschen Principe leicht zu finden, in dem (§. 53.) aber bereits gefunden, nämlich

$$1) \qquad \Omega = \frac{\mu v p}{M(a^2+k^2)},$$

weil $M(a^2+k^2)$ das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ ist in Bezug auf die Axe C. — Da nun (nach §. 155. I. 4.) die Gleichung für die Bewegung des Pendels so gefunden worden ist, nämlich

$$2) \qquad \partial\theta^2 + \frac{2ga \cdot (\cos\alpha - \cos\theta)}{a^2+k^2} = \Omega^2,$$

wenn Ω die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit, und α der Anfangs-Werth von θ, also dasmal $= 0$ ist, so erhält man dasmal die Gleichung

$$3) \qquad \partial\theta^2 + \frac{2ga(1-\cos\theta)}{a^2+k^2} = \frac{\mu^2 v^2 p^2}{M^2(a^2+k^2)^2}.$$

Ist nun der Winkel $BCB' = \beta$ in dem Augenblicke wo B in B' gerade die Geschwindigkeit Null hat, wo also $\partial\theta = 0$ ist, so hat man gleichzeitig

$$\partial\theta = 0 \qquad \text{und} \qquad \theta = \beta,$$

und für diese Werthe von $\partial\theta$ und θ geht dann die Gleichung (3.) über in

$$4) \qquad 2ga(1-\cos\beta) = \frac{\mu^2 v^2 p^2}{M^2(a^2+k^2)},$$

woraus nun v gefunden werden kann, da M, μ, p, a, k, β und die Schwere g aus dem Versuche und den dabei statt gehabten Messungen als bekannt angesehen werden müssen.

Setzt man jedoch $CB = b$ und die Sehne $BB' = s$, so hat man

$$\cos\beta = 1 - \frac{s^2}{2b^2};$$

und setzt man noch

$$\frac{M}{\mu} = n,$$

(so daß n eine große Zahl vorstellen wird) so erhält man, wenn diese Werthe in die Gleichung (4.) substituirt werden,

$$5) \qquad v^2 = \frac{n^2 g a s^2}{p^2 b^2}(a^2 + k^2).$$

Die Sehne s wird durch die Länge eines Bandes gemessen, welches sich bei dem Versuche aufrollt. Die Werthe von p und b messen sich direkt; der erstere kann auch aus der Lage der Axe des Geschützes gegen den Pendel genau genug berechnet werden. Das Verhältniß n der Massen ist leicht auszumitteln, weil man statt der Massen ihre Gewichte setzen kann, desgleichen ist die Schwere g an demselben Orte zu finden, wenn nicht schon bekannt. Die Werthe von a und k lassen sich endlich auch berechnen; letztere beiden aber pflegt man aus bloßen Beobachtungen ohne weitläufigere Rechnung zu finden.

Um nämlich a zu finden befestigt man in B ein Seil, läßt es über einen Stift D gehen, welcher mit C einerlei Höhe hat und hängt nun an das andere Ende ein Gewicht M_1, so groß, daß endlich die Gerade CSB des Pendels horizontal zu liegen kommt. Dann hat man, wenn $CD = a_1$ ist, für diesen Hebel, weil das Gewicht M des Pendels in dem Schwer-Punkte S desselben wirkt,

$$M \cdot a = M_1 \cdot a_1,$$

also

$$6) \qquad a = \frac{M_1}{M} \cdot a_1,$$

wo M das Gewicht des Pendels vorstellt.

Um k ohne weitläufigere Rechnung zu finden, läßt man den Pendel kleine Schwingungen machen und bestimmt die Dauer T einer dieser Schwingungen. Dann hat man nicht bloß

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a}, \text{ sondern auch } T = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)};$$

folglich, wenn man l eliminirt,

$$7) \qquad a^2 + k^2 = \frac{gT^2a}{\pi^2},$$

woraus sich k^2 ohne Weiteres ergiebt.

Substituirt man diesen Werth von k^2 in die Gleichung (5.), so erhält man

$$8) \qquad v = \frac{ngTas}{\pi pb}.$$

Anmerk. Man kann auf diesem Wege die Anfangs-Geschwindigkeit einer Kugel finden, wenn die Mündung des Geschützes dicht am Pendel sich befindet. Man kann aber auch mit demselben Geschütze und derselben Ladung in verschiedenen Entfernungen schießen, um aus den jedesmaligen Geschwindigkeiten, wenn sie auf dem vorliegenden Wege bestimmt worden sind, eine Bestätigung oder eine Verwerfung des Gesetzes des Luft-Widerstandes, welches man bei den Gleichungen der Bewegung der Kugel in Rechnung gebracht hat, zu erhalten; in so fern dann dieselben Geschwindigkeiten aus diesen Gleichungen der Bewegung direkt sich ergeben, und mit den durch das ballistische Pendel bestimmten übereinstimmen müssen.

Unter andern hat sich aus den in England angestellten Versuchen am entschiedensten hervorgestellt, daß unter übrigens gleichen Umständen, die Quadrate der Anfangs-Geschwindigkeiten sich wie die Gewichte der Ladungen verhalten, und daß dieses Verhältniß desto genauer gefunden wird, je kleiner das Verhältniß der Länge der Ladung zu der Länge des Rohres ist.

§. 159.

Vom Rücklauf.

Da bei dem Abfeuern eines Geschützes, die Kraft des Pulvers zwischen der Kugel und dem Boden des Geschützes sich entwickelt, so muß die Wirkung der Kraft nicht bloß darin bestehen, daß die Kugel fortgetrieben wird, sondern es wird auch

das

das Geschütz (in entgegengesetzter Richtung) fortgetrieben werden. Diese letztere Bewegung, welche wegen der weit größern Masse des Geschützes gegen die Masse der Kugel an sich geringer ist, und wegen der Reibung und sonstiger Ursachen noch weniger bedeutend wird, nennt man den Rücklauf. Das nachstehende Problem wird nun dem Anfänger andeuten, wie dieser Rücklauf (versteht sich immer durch Anwendung des d'Alembertschen Princips) bestimmt werden kann.

Zwischen zweien Massen m und m' wirkt eine Repulsiv-Kraft F_t, um sie von einander zu entfernen. Beide Massen haben entweder keine Geschwindigkeit, oder eine Bewegung ihrer Schwer-Punkte in der Richtung dieser Kraft, so daß die stetig neu hinzutretende Repulsiv-Kraft F nur die Geschwindigkeiten, nicht aber die Richtung der Massen ändert. Man soll die Bewegung dieser Massen m und m' näher bestimmen.

Zu Ende der Zeit t, wo die Kraft F_t auf's Neue wirkt, seyen x und x' die Entfernungen der Schwer-Punkte dieser Massen, von einem Punkte O, in der Richtung OX ihrer Bewegung an gerechnet; und v, v' seyen die Geschwindigkeiten dieser Massen zu derselben Zeit t; — so hat man, weil die in der Zeit t beschriebenen Wege der Schwer-Punkte der Massen, von den Entfernungen x und x' bezüglich nur um (nach t) konstante Werthe verschieden seyn können, ihre Differenzial-Koefficienten (nach t) also bezüglich einander gleich seyn müssen,

$$\partial x = v \quad \text{und} \quad \partial x' = v'.$$

Die Kraft F_t (in die Druck-Einheit ausgedrückt) oder $F_t \cdot dt$ (in die Stoß-Einheit ausgedrückt vgl. §. 10.) giebt nun (nach §. 8. Anmerk. Nr. 1.) dem Schwer-Punkte von m die beschleunigende Kraft $-\frac{F}{m}\cdot dt$, dem Schwer-Punkte von m' dagegen die beschleunigende Kraft $+\frac{F}{m'}\cdot dt$ (§. 9.), alles in der Richtung OX gedacht.

Wirken nun diese beschleunigenden Kräfte in dem nach t unmittelbar folgenden Augenblicke dt, so erhält dadurch die Ge-

schwindigkeit v den Zuwachs $dv (= \partial v_t \cdot dt)$, die Geschwindigkeit v' dagegen den Zuwachs $dv' (= \partial v'_t \cdot dt)$. Die verlorene Kraft von m ist daher in die Druck-Einheit ausgedrückt $= -F - m \cdot \partial v$; — von m' dagegen $= F - m' \cdot \partial v'$. Da nun das System der beiden Massen dasmal ein völlig loses ist, so halten sich diese verlorenen Kräfte nur dann im Gleichgewicht, wenn sie an jeder Masse für sich im Gleichgewichte stehen. Also hat man dasmal die Gleichungen

1) $F + m \cdot \partial v = 0$ und 2) $F - m' \cdot \partial v' = 0$.

Führt man, um zu integriren, einen neuen Veränderlichen r so ein, daß

(☾)... $r = x' - x$, also $\partial r = \partial x' - \partial x = v' - v$

ist, so erhält man aus den beiden Gleichungen (1. und 2.) sogleich

3) $$m \cdot \partial v + m' \cdot \partial v' = 0$$

und

4) $$mv \cdot \partial v + m'v' \cdot \partial v' = F \cdot \partial r.$$

Ist nun die Kraft F eine Funktion der jedesmaligen Entfernung r der beiden Schwer-Punkte von m und m' von einander, so kann man diese beiden Gleichungen sogleich integriren, und man erhält

5) $$mv + m'v' = c$$

und

6) $$mv^2 + m'v'^2 = 2\int F_r \cdot dr + c',$$

wo c und c' zwei noch zu bestimmende Konstanten sind. Denkt man sich das Integral $\int F_r \cdot dr$ mit $r = \alpha$ anfangend (d. h. $= 0$ für $r = \alpha$) und durch $f_{r,\alpha}$ bezeichnet; und sind a und a' die Anfangs-Werthe der Geschwindigkeiten v und v', so hat man, wenn α auch der Anfangs-Werth von r ist, zu gleicher Zeit

$$r = \alpha, \quad f_{r,\alpha} = 0, \quad v = a \quad \text{und} \quad v' = a';$$

also (aus 5. und 6.)

7) $ma + m'a' = c$ und 8) $ma^2 + m'a'^2 = c'$.

Dadurch gehen die Gleichungen (5. und 6.) über in

9) $$mv + m'v' = ma + m'a'$$
und

10) $$mv^2 + m'v'^2 = ma^2 + m'a'^2 + 2\mathfrak{A}_{r,\alpha}.$$

Diese beiden Gleichungen geben v und v' in die jedesmalige Entfernung r ausgedrückt. Um nun r selbst als Funktion von t zu erhalten, hat man die Gleichung (☾), nämlich

$$\partial r = v' - v, \quad \text{oder } \partial t_r = \frac{1}{v' - v},$$

mithin

11) $$t = \int_{r \div \alpha} \frac{1}{v' - v} \cdot dr,$$

welche Integration, da v' und v in r bekannt sind, keine anderen Schwierigkeiten hat als die, welche eben die Quadraturen mit sich führen.

Hat man nun auf diese Weise t in r, also auch r und somit v und v' in t gefunden, so hat man noch

$$x = \int v \cdot dt \quad \text{und} \quad x' = \int v' \cdot dt.$$

Man kann aber auch die Gleichung (9.) so schreiben

$$m \cdot \partial x + m' \cdot \partial x' = ma + m'a'$$

und integriren: dann erhält man

12) $$mx + m'x' = (ma + m'a') \cdot t + C,$$

wo C der Anfangs-Werth von $mx + m'x'$ ist. Diese Gleichung (12.), in Verbindung mit dieser andern (☾)

13) $$x' - x = r$$

giebt dann ebenfalls x' und x in t oder in r ausgedrückt.

Anmerk. 1. Wäre F_r eine Attraktions-Kraft, statt einer Repulsions-Kraft, so würden die vorstehenden Rechnungen doch noch gelten, nur daß man dann F als negativ in Rechnung bringen müßte. Wäre endlich in gewissen Distanzen eine Repulsions-Kraft, in andern dagegen eine Attraktions-Kraft, so müßte man eine solche Funktion F von r nehmen, welche von selbst für die Distanzen r, für welche die Kraft attraktiv wird, ihr Zeichen änderte.

Anmerk. 2. Ist m eine Kanone und ist m' die in ihr be-

findliche Kugel, beide in dem Augenblicke betrachtet, wo die Entzündung des Pulvers vor sich geht, so ist F die Kraft der Elasticität des sich entwickelnden Gases. Um aber über die Kraft F in diesem speciellen Falle eine Hypothese machen zu können, muß man nicht bloß die Eigenschaften des Gases kennen, sondern auch in Rechnung zu bringen wissen. In dieser Beziehung gehört die Betrachtung des Rücklaufes zu den schwierigsten; und es muß daher das Weitere einer Monographie über Ballistik überlassen bleiben.

nwendungen der Mechanik.

Dreizehntes Kapitel.

er Bewegung eines schweren Körpers auf einer Ebene.

§. 160.

kommen nun dahin, zu dem Probleme des (§. 114.) ein Beispiel n. Wir wählen dabei das einfachste, nämlich die Bewegung eines s auf einer gegebenen Ebene, unter der Voraussetzung, daß keine bewegende Kräfte auf ihn wirken, als sein Gewicht.

ir betrachten jedoch hier die Bewegung eines schweren Kör- auf einer gegebenen Ebene nur in dem einfachsten Falle, lchem wir voraussetzen, daß der Körper und die Ebene sich il und zu jeder Zeit nur in einem einzigen Punkte K be- n, während dieser Punkt K jedoch in der Ebene und im er in jedem Augenblicke ein anderer sein kann. — Reibung nicht berücksichtigt werden.

Nach (§. 114.) wird dieses Problem dadurch gelöst, daß an der Stelle, wo der Körper (zu Ende der Zeit t) die e (normal auf sie) drückt, einen eben so großen Gegen- t R·dt oder R zu dem Gewichte Mg des Körpers, dessen e M seyn mag, noch hinzufügt, und dann den Körper als völlig freien behandelt.

I. Da nun bei jeder freien Bewegung eines Körpers der wer-Punkt S desselben sich gerade so bewegt (nach §. 112. A.) wenn die ganze Masse M in ihm concentrirt wäre und wenn

alle bewegenden Kräfte, hier also R, parallel mit sich zu ihm hin fortgerückt gedacht werden; — so darf man nur wieder im Raume feste Koordinaten-Axen OX, OY, OZ einführen, so daß OX, OY horizontal liegen, OZ dagegen vertikal nach oben gerichtet ist; — dann die darauf bezogenen Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes durch x_0, y_0, z_0 bezeichnen, endlich die Winkel, welche R mit diesen drei Axen macht durch λ, μ, ν ausdrücken, und man hat die nachstehenden drei Gleichungen der Bewegung des Schwer-Punktes S, nämlich

$$1)\quad \begin{cases} M\cdot\partial^2 x_0 = R\cdot\cos\lambda, \\ M\cdot\partial^2 y_0 = R\cdot\cos\mu, \\ M\cdot\partial^2 z_0 = R\cdot\cos\nu - Mg. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind λ, μ, ν, da sie die Winkel sind, welche jede Normale an die Ebene mit den drei festen Axen OX, OY, OZ macht, allemal konstant, wenn die Ebene eine absolut feste (unbewegliche) ist; dagegen sind dieselben Winkel λ, μ, ν Funktionen von t, wenn die Ebene selbst noch eine Bewegung hat. Im letzteren Falle setzen wir aber doch, um das Problem nicht zu verwickelt zu machen, voraus, daß diese Bewegung der Ebene gegeben, und von der Bewegung des Körpers auf ihr unabhängig sey.

II. Außer dieser fortschreitenden Bewegung des Schwer-Punktes, findet dann noch eine drehende Bewegung um den Schwer-Punkt statt, genau so, wie wenn solcher absolut fest wäre, dabei aber die bewegenden Kräfte R und Mg gerade so, wie sie es thun, auf den Körper wirkten, (nach §. 112. B.). In so fern aber das Gewicht Mg durch den jetzt als unbeweglich gedachten Schwer-Punkt geht, so trägt solches zur drehenden Bewegung nichts bei, sondern letztere wird bloß durch die Kraft R allein hervorgebracht (oder durch das Gegen-Paar (R, R), welches noch hinzutritt, wenn R parallel mit sich nach dem Schwer-Punkte S fortgerückt gedacht wird).

Um aber die Gleichungen dieser Drehung zu erhalten, muß man die zu dem Schwer-Punkte S gehörigen Haupt-Dreh-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 zu Koordinaten-Axen nehmen; und es mögen

x_1, y_1, z_1 die auf diese Axen bezogenen Koordinaten-Werthe des Punktes K seyn, in welchem der Körper die Ebene berührt, und λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel, welche die Richtung des normalen Gegendruckes R mit denselben Axen macht; so daß x_1, y_1, z_1, λ_1, μ_1, ν_1, Funktionen der Zeit t seyn werden. Dann sind

$$R(y_1 \cdot \cos\lambda_1 - x_1 \cdot \cos\mu_1), \quad R(x_1 \cdot \cos\nu_1 - z_1 \cdot \cos\lambda_1)$$

und

$$R(z_1 \cdot \cos\mu_1 - y_1 \cdot \cos\nu_1)$$

die statischen Momente der Projektionen von R in den drei Koordinaten-Ebenen X_1SY_1, X_1SZ_1, Y_1SZ_1, in Bezug auf S als Centrum der Momente genommen; und die drei Gleichungen der drehenden Bewegung sind daher (nach §. 99. ☾.)

$$2) \quad \begin{cases} \mathfrak{C} \cdot \partial r + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq = R(y_1 \cdot \cos\lambda_1 - x_1 \cdot \cos\mu_1), \\ \mathfrak{B} \cdot \partial q + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})pr = R(x_1 \cdot \cos\nu_1 - z_1 \cdot \cos\lambda_1), \\ \mathfrak{A} \cdot \partial p + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr = R(z_1 \cdot \cos\mu_1 - y_1 \cdot \cos\nu_1), \end{cases}$$

wenn wiederum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die drei, zu den Axen SX_1, SY_1, SZ_1 gehörigen Haupt-Momente der Trägheit, und p, q, r die Winkel-Geschwindigkeiten der Drehung um diese Axen vorstellen. Legt man endlich durch S wiederum Koordinaten-Ebenen, mit denen im Raume fest gedachten parallel, und sind wieder φ, ψ, θ die Winkel, welche die Lage dieser neuen Koordinaten-Ebenen mit den im Körper festen Koordinaten-Ebenen machen, ganz so wie im (§. 98. X.), so hat man natürlich auch noch die drei Gleichungen (des §. 98. X. ⊙), nämlich

$$3) \quad \begin{cases} p = \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \partial\varphi - \cos\psi \cdot \partial\theta, \\ q = \cos\psi \cdot \sin\theta \cdot \partial\varphi + \sin\psi \cdot \partial\theta, \\ r = \cos\theta \cdot \partial\varphi - \partial\psi. \end{cases}$$

III. Indem wir aber ferner voraussetzen, daß α, β, γ die Kosinusse der Winkel sind, welche SX_1 mit OX, OY, OZ macht, und daß α', β', γ' und α'', β'', γ'' ganz analoge Bedeutungen in Bezug auf die andern beiden Haupt-Dreh-Axen SY_1 und SZ_1 haben, so daß alle Gleichungen des (§. 98.) auch hier statt finden, so hat man auch noch

$$4) \quad \begin{cases} \cos\lambda_1 = \alpha \cdot \cos\lambda + \beta \cdot \cos\mu + \gamma \cdot \cos\nu, \\ \cos\mu_1 = \alpha' \cdot \cos\lambda + \beta' \cdot \cos\mu + \gamma' \cdot \cos\nu, \\ \cos\nu_1 = \alpha'' \cdot \cos\lambda + \beta'' \cdot \cos\mu + \gamma'' \cdot \cos\nu. \end{cases}$$

Außerdem hat man noch, wenn

5) $$L_{x_1, y_1, z_1} = 0$$

die Gleichung der Oberfläche des Körpers ist, auf die Koordinaten-Axen SX_1, SY_1, SZ_1 bezogen,

6) $$\cos\lambda_1 = V \cdot \partial L_{x_1}; \quad \cos\mu_1 = V \cdot \partial L_{y_1}$$

und $$\cos\nu_1 = V \cdot \partial L_{z_1},$$

wenn

7) $$V = (\partial L_{x_1}{}^2 + \partial L_{y_1}{}^2 + \partial L_{z_1}{}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird, und wenn x_1, y_1, z_1 dem bestimmten Punkte K angehören.

Zuletzt nehme man noch die Gleichung der Ebene

8) $$x \cdot \cos\lambda + y \cdot \cos\mu + z \cdot \cos\nu = \zeta,$$

wo x, y, z die auf die im Raume festen Axen OX, OY, OZ bezogenen Koordinaten-Werthe der Ebene vorstellen, und wo ζ der senkrechte Abstand des Punktes O von der Ebene ist (I. Th. Geom. §. 11.). Man hat dann, wenn x, y, z dem Punkte K angehören (nach §. 98.)

9) $$\begin{cases} x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1, \\ y = y_0 + \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1, \\ z = z_0 + \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1; \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung der Ebene (8.) substituirt, so erhält man noch mittelst der Gleichungen (4.)

10) $$x_0 \cdot \cos\lambda + y_0 \cdot \cos\mu + z_0 \cdot \cos\nu + x_1 \cdot \cos\lambda_1 + y_1 \cdot \cos\mu_1 + z_1 \cdot \cos\nu_1 = 0.$$

IV. Diese Gleichungen reichen nun aus, um die Unbekannten x_0, y_0, z_0, θ, φ, ψ, p, q, r, R, x_1, y_1, z_1 als Funktionen von t, also die ganze Bewegung zu bestimmen.

Bleibt endlich der Körper immer nur mit einer Spitze auf der Ebene, so sind die Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1 dieser Spitze konstant und gegeben. Dagegen fallen dann die Gleichungen (5. und 6.) als überflüssig heraus.

§. 161.

Betrachten wir jetzt zunächst den besondern Fall der Auf-

gabe, wo die Ebene unbeweglich und horizontal ist, während der auf ihr sich bewegende Körper in jedem andern Augenblicke denselben oder einen andern der Punkte seiner Oberfläche mit der Ebene gemein hat. Man kann letztere dann zur Koordinaten-Ebene XOY nehmen, und man hat dann

11) $\zeta = 0$, $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$ und $\cos\nu = 1$,

wodurch die Formeln (4.) in

12) $\cos\lambda_1 = \gamma$, $\cos\mu_1 = \gamma'$ und $\cos\nu_1 = \gamma''$

übergehen.

Die beiden erstern der Gleichungen (1.) zeigen nun, daß die horizontale Projektion des Schwer-Punktes dasmal sich geradlinig und konstant bewegt, und daß die Geschwindigkeit dieser Bewegung mit der horizontalen Anfangs-Geschwindigkeit zusammenfällt. — Die dritte der Gleichungen (1.) giebt den Druck R, nämlich

13) $$R = M\cdot(\partial^2 z_0 + g),$$

sobald z_0 gefunden seyn wird.

Die Gleichungen (2.) gehen in folgende über, nämlich

14) $$\begin{cases} \mathfrak{C}\cdot\partial r + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq = M(\partial^2 z_0 + g)(\gamma y_1 - \gamma' x_1), \\ \mathfrak{B}\cdot\partial q + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})pr = M(\partial^2 z_0 + g)(\gamma'' x_1 - \gamma z_1), \\ \mathfrak{A}\cdot\partial p + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr = M(\partial^2 z_0 + g)(\gamma' z_1 - \gamma'' y_1), \end{cases}$$

während die Gleichung (10.) nun folgende wird

15) $$z_0 + \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1 = 0.$$

Aus dieser letztern Gleichung kann man aber nun z_0 entnehmen und in die vorhergehenden Gleichungen substituiren. Die Gleichungen (14.) in Verbindung mit den Gleichungen (3.) dienen dann zur Bestimmung von p, q, r, θ, φ, ψ in x_1, y_1, z_1, in so fern γ, γ', γ'' die im (§. 98. X.) bereits gefundenen Funktionen von θ, φ, ψ sind.

Ist nun der Körper stets mit einer und derselben Spitze auf der (horizontalen) Ebene, so daß x_1, y_1, z_1 gegeben und konstant sind, so sind keine weiteren Gleichungen zu Hülfe zu nehmen*).

---

*) Dies ist der Fall bei einem Kreisel, welcher sich auf horizontaler Ebene ohne Reibung bewegt.

— Außerdem aber müssen noch die Gleichungen (5. und 6.) zugezogen werden, die aber jetzt folgende Form annehmen:

16) $L = 0$; $\gamma = V \cdot \partial L_{x_1}$; $\gamma' = V \cdot \partial L_{y_1}$; $\gamma'' = V \cdot \partial L_{z_1}$.

Anmerk. Liegt ein schwerer Körper (z. B. ein Ellipsoid oder eine Kugel, deren Schwer-Punkt nicht mit ihrem Mittel-Punkte zusammenfällt, ꝛc.), auf einer horizontalen Ebene, im stabilen Gleichgewichte; entfernt man ihn dann ein klein wenig von dieser Lage des Gleichgewichts, so wird er hin und her sich bewegen, aber sehr kleine Bewegungen machen. Diese lassen sich, wenn man den Versuch machen will, mittelst der vorstehenden Gleichungen näherungsweise ohne Weiteres bestimmen. — Wir können uns aber hier, wegen Mangels an Raum, auf die Ausführnug solcher Beispiele nicht näher einlassen.

§. 162.

Von den Gleichungen (14.) kann man wiederum sogleich zwei allgemeine Integrale erhalten. Multiplicirt man sie nämlich bezüglich mit γ, γ', γ'', und addirt man sie, so erhält man, wenn man integrirt (wie im §. 101.),

I. $\mathfrak{A}\gamma p + \mathfrak{B}\gamma' q + \mathfrak{C}\gamma'' r = l$,

wo l eine noch zu bestimmende Konstante ist, welche jedoch die Summe der statischen Momente ist aller „Größen der Bewegung" in Bezug auf eine durch den Schwer-Punkt S gehende vertikale Gerade.

Ein zweites allgemeines Integral erhält man, wenn man dieselben Gleichungen (14.) bezüglich mit r, q, p, multiplicirt und diese Resultate dann addirt. Dies giebt nämlich zunächst

$$\mathfrak{C}r \cdot \partial r + \mathfrak{B}q \cdot \partial q + \mathfrak{A}p \cdot \partial p$$
$$= M(\partial^2 z_0 + g)[(\gamma'' q - \gamma r)x_1 + (\gamma r - \gamma'' p)y_1 + (\gamma' p - \gamma q)z_1],$$

oder (wegen §. 98. XI. 30.)

$$\mathfrak{C}r \cdot \partial r + \mathfrak{B}q \cdot \partial q + \mathfrak{A}p \cdot \partial p$$
$$= M(\partial^2 z_0 + g)(x_1 \cdot \partial\gamma + y_1 \cdot \partial\gamma' + z_1 \cdot \partial\gamma'').$$

Auf der andern Seite hat man, wenn die Gleichung (15.) differenziirt wird,

$$\partial z_0 + x_1 \cdot \partial\gamma + y_1 \cdot \partial\gamma' + z_1 \cdot \partial\gamma'' = -(\gamma \cdot \partial x_1 + \gamma' \cdot \partial y_1 + \gamma'' \cdot \partial z_1),$$

während, wegen der Gleichungen (10.) dieser Ausdruck zur Rechten $= V \cdot \partial L$, also $= 0$ ist, es mögen x_1, y_1, z_1 konstant seyn, oder der Gleichung $L = 0$ angehören. Dies giebt daher

$$x_1 \cdot \partial\gamma + y_1 \cdot \partial\gamma' + z_1 \cdot \partial\gamma'' = -\partial z_0,$$

und die obige Gleichung wird dadurch

$$\mathfrak{C}r \cdot \partial r + \mathfrak{B}q \cdot \partial q + \mathfrak{A}p \cdot \partial p + M \cdot \partial z_0 \cdot \partial^2 z_0 + gM \cdot \partial z_0 = 0,$$

und giebt sogleich, wenn man sie integrirt,

$$\text{II.} \quad \mathfrak{C}r^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{A}p^2 + M \cdot \partial z_0{}^2 + 2gMz_0 = h^2,$$

wo h^2 abermals eine aus den Anfangs-Werthen von p, q, r, z_0 und ∂z_0 zu bestimmende Konstante ist.

Diese zwei Integrale reichen zuweilen zur Lösung des Problems völlig aus, z. B. wenn der sich bewegende Körper von einer Umdrehungs-Fläche begrenzt wird, wie etwa solches bei dem Kreisel der Fall ist, in so fern dann die Gleichungen (14.) allemal sogleich und ohne Weiteres ein drittes Integral dazu liefern. Dies mag der nächste (§.) zeigen.

§. 163.

Bewegung des Kreisels auf horizontaler Ebene.

Bei dem Kreisel der eine Spitze K hat, und in welchem SK die Axe der Figur ist, also eine Haupt-Dreh-Axe, zu welcher das Trägheits-Moment $\mathfrak{C}$ gehören mag, hat man

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \quad \text{so wie auch} \quad x_1 = y_1 = 0,$$

während $z_1 = SK$ konstant ist. Außerdem ist noch

$$1) \quad z_0 = -z_1 \cdot \cos\theta, \quad \text{also} \quad \partial z_0 = z_1 \cdot \sin\theta \cdot \partial\theta.$$

Die Integrale I. u. II. (des §. 162.) geben nun sogleich

$$2) \qquad \mathfrak{A}(\gamma p + \gamma' q) + \mathfrak{C}\gamma'' r = 1,$$

und

$$3) \quad \mathfrak{A}(p^2+q^2) + \mathfrak{C}r^2 + M \cdot z_1{}^2 \cdot \sin\theta^2 \cdot \partial\theta^2 - 2Mgz_1 \cdot \cos\theta = h^2.$$

Die erstere der Gleichungen (14. des §. 161.) giebt dagegen augenblicklich das dritte Integral, nämlich

$$4) \qquad r = const. = r',$$

wenn r' der Anfangs-Werth von r ist. — Setzt man aber hier statt γ und γ' ihre Werthe aus (§. 98. X.), desgleichen auch statt p und q ihre Werthe aus (§. 160. Nr. 3.), so erhält man noch

$$5) \quad \gamma p + \gamma' q = \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi \quad \text{und} \quad p^2+q^2 = \sin\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2.$$

Dadurch gehen aber die Integrale (2. und 3.) über in

$$6) \left\{ \begin{array}{l} Cr' \cdot cos\,\theta + \mathfrak{A} \cdot sin\,\theta^2 \cdot \partial\varphi = l, \\ \mathfrak{A}(sin\,\theta^2 \cdot \partial\varphi^2 + \partial\theta^2) + M(z_1{}^2 \cdot sin\,\theta^2 \cdot \partial\theta^2 - 2gz_1 \cdot cos\,\theta) = k, \end{array} \right.$$

wenn die Konstante $h^2 - \mathfrak{C}r'^2$ durch k bezeichnet wird.

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\partial\varphi$, so erhält man $\partial\theta$, also auch ∂t_θ in θ ausgedrückt, und dann t und auch φ in θ, mittelst elliptischer Transcendenten.

§. 164.

Bewegung des Kreisels auf beweglicher Ebene.

Lassen wir alles, wie in der vorigen Aufgabe (des §. 163.); setzen wir aber voraus, daß die Ebene, auf welcher der Kreisel läuft, selbst sich noch bewege, daß also λ, μ, ν und ζ gegebene Funktionen von t sind. Die erste der Gleichungen (2. des §. 160.) giebt noch immer

$$1) \qquad r = constante = r',$$

wo r' die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit um die Axe SK ist. Die beiden andern der eben angeführten Gleichungen werden nun, wenn man die Gleichungen (4. des §. 160.) zu Hülfe nimmt,

$$2) \quad \mathfrak{A} \cdot \partial q + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})r'p = -Rz_1 \cdot (\alpha \cdot cos\,\lambda + \beta \cdot cos\,\mu + \gamma \cdot cos\,\nu);$$

$$3) \quad \mathfrak{A} \cdot \partial p - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})r'q = Rz_1 \cdot (\alpha' \cdot cos\,\lambda + \beta' \cdot cos\,\mu + \gamma' \cdot cos\,\nu).$$

Die Gleichung (10. des §. 160.) wird jetzt

$$4) \quad x_0 \cdot cos\,\lambda + y_0 \cdot cos\,\mu + z_0 \cdot cos\,\nu + z_1 \cdot (\alpha'' \cdot cos\,\lambda + \beta'' \cdot cos\,\mu + \gamma'' \cdot cos\,\nu) = 0.$$

Die Gleichungen (1. u. 3. des §. 160.) nebst den hiesigen Gleichungen (2. — 4.) haben nun die neun Unbekannten p, q, θ, φ, ψ, x_1, y_1, z_1 und R zu bestimmen. Allein die Integrationen werden so verwickelt (selbst dann noch, wenn man nur näherungsweise zu integriren versucht), daß wir hier mit dem Vorliegenden uns begnügen müssen, und nur noch bemerken können, daß das Problem eine einfachere Lösung findet, wenn r' gegen die übrigen Bewegungen sehr groß ist, wenn θ und φ gegen ψ nur sehr langsam sich ändern (eine Voraussetzung die sich im Verlaufe der Rechnungen erst bestätigen muß), und wenn endlich die Axe der Figur wenig von der vertikalen, die Ebene selbst aber nur wenig von der horizontalen Lage abweicht.

Anmerk. 1. Man findet unter diesen zuletzt gemachten Beschränkungen, daß wenn der Körper (der Kreisel) an seinem oberen Ende von einer, auf seiner Axe der Figur senkrechten Ebene begrenzt ist, und diese Anfangs horizontal gehalten wird, solche, wenn nur die Umdrehung r' schnell genug ist, fortwährend ganz nahehin horizontal bleibt. — Man hat dieses Mittel dazu vorgeschlagen, um auf einem Schiffe, trotz der Schwankungen desselben, einen künstlichen und möglichst genauen Horizont sich zu verschaffen.

Anmerk. 2. Da wir hier auf die Einzelnheiten dieser Probleme, wegen des Mangels an Raum, nicht weiter eingehen können, so empfehlen wir noch zur weiteren Uebung das an hierher gehörigen Beispielen reiche Werk: Sur le jeu de billard. Paris. 1832.

Anwendungen der Mechanik.

Vierzehntes Kapitel.

Einiges über die Integrale der Parzial-Differenzial-Gleichungen.

§. 165.

Wir haben (im I. Th. Analysis) eine Uebersicht des Wissenswürdigsten aus der höhern Analysis und namentlich über das Integriren gegebener Differenzial-Gleichungen beigebracht, jedoch nur sogenannte **totale Differenzial-Gleichungen** berücksichtigt, nämlich solche, welche bloß Funktionen eines *einzigen* Veränderlichen zu bestimmen haben, in welchen also auch nur Differenzial-Koefficienten nach diesem einzigen unabhängig gedachten Veränderlichen erscheinen. Das nachstehende Kapitel wird uns jedoch lehren, daß man auch zu Differenzial-Gleichungen kommen könne, in welchen Funktionen zweier oder mehrerer Veränderlichen, also auch die Differenzial-Koefficienten dieser Funktionen nach **jedem** der unabhängig gedachten Veränderlichen vorkommen. Diese letztern Differenzial-Gleichungen nennt man nun **Parzial-Differenzial-Gleichungen.**

So wie jede einmalige Integration einer totalen Differenzial-Gleichung $\varphi_{x, y, \partial y_x, \partial^2 y_x, \text{rc.}} = 0$ allemal eine willkührliche Konstante C einführt, — so führt die Integration einer Parzial-Differenzial-Gleichung allemal eine willkührliche Funktion

 änderlichen ein, welche dann, gerade wie bisher die will- Konstante C, in den verschiedenen Fällen der Anwen- st ihre nähere Bestimmung erfahren muß.

§. 166.

namentlich $F_{t,x,u,\partial u_t,\partial u_x} = 0$ eine beliebig gegebene ng zwischen den beiden unabhängig gedachten Veränder- t und x, zwischen der gesuchten Funktion $u_{t,x}$ oder u, :en beiden Differenzial-Koefficienten ∂u_t und ∂u_x, — so s eine Parzial-Differenzial-Gleichung der er- rdnung zwischen drei Veränderlichen. Ihr In- giebt u in t und x und noch einer willkührlichen n φ_ω, während ω eine ganz bestimmte Funktion von x ist, die natürlich auch noch u selbst in sich aufnehmen

ı der Gleichung

$$u - t \cdot \partial u_t - x \cdot \partial u_x = 0$$

$$u = t \cdot \varphi_\omega, \text{ wo } \omega = \frac{x}{t} \text{ ist}$$

gemeine Integral, sobald nur φ_ω eine ganz willkührliche Funktion ist. —

sgleichen ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$4t^4 \cdot (2u - t \cdot \partial u_t + x \cdot \partial u_x) - x^2 \cdot (2u + t \cdot \partial u_t - x \cdot \partial u_x)^2 = 0,$$

nämlich:

$$u = x^2 \cdot \varphi_\omega + y^2 \cdot \varphi_\omega{}^2, \text{ wo } \omega = tx \text{ ist},$$

nur φ_ω jede willkührliche Funktion von ω vorstellt.

Differenziirt man nämlich die Gleichung (2.) abwech- nach t und nach x, so erhält man eine Gleichung zwi- ∂u_t, t, x, u und $\partial\varphi_\omega$ und noch eine Gleichung zwi- ∂u_x, t, x, u und $\partial\varphi_\omega$. Indem man nun aus den n drei Gleichungen, sowohl φ_ω als auch $\partial\varphi_\omega$, welche ganz ührlich, wenn auch von einander abhängig sind, eliminirt, hält man eine bloße Differenzial-Gleichung zwischen t, x, ∂u_t und ∂u_x, welche die willkührliche Funktion φ nicht mehr

enthält, und welche die gegebene Parzial-Gleichung (1.) seyn wird.

§. 167.

Denkt man sich aber in einem solchen Integral die Funktion u (von t und x) in eine nach Potenzen von t, oder nach Potenzen einer Funktion θ_t, in eine Reihe verwandelt, so haben natürlich die Koefficienten dieser Reihe nicht selbst noch t, sondern können nur Funktionen von x allein enthalten. Aus der willkührlichen Funktion φ_ω, wo ω eine gegebene Funktion von t und x ist, gehen also nun, weil die Entwickelung mittelst des Maclaurinschen Satzes erfolgen kann und muß, die einzelnen Koefficienten der Reihe mit hervor, welche letztere deshalb aus einer willkührlichen Funktion von x allein, aber auch aus deren Differenzial-Koefficienten nach x, zusammengesetzt seyn werden.

Wählt man also diese Form der Darstellung für den allgemeinsten Werth von u, so wird man in den einzelnen Koefficienten der Reihe nur eine willkührliche Funktion von x allein wahrnehmen, jedoch auch noch ihre Differenzial-Koefficienten (nach x).

Man kann aber auch diesen allgemeinsten Werth von u, nach Potenzen von x, oder nach Potenzen einer Funktion θ_x von x, in eine Reihe entwickelt sich denken; dann enthalten die Koefficienten bloß eine willkührliche Funktion von t, und deren Differenzial-Koefficienten (nach t).

§. 168.

Dann aber kann man denselben allgemeinsten Werth von u (mittelst des Maclaurinschen Lehrsatzes für zwei Veränderliche) auch in eine Doppel-Reihe entwickelt sich denken, welche in einer Richtung nach Potenzen von t, in einer andern Richtung nach Potenzen von x, oder in der erstern Richtung nach Potenzen von θ_t, in der andern dagegen nach Potenzen von ϑ_x fortläuft. — In diesem Falle können die Koefficienten dieser Reihe weder t noch x enthalten; sie werden also

eine

eine Reihe willkührlicher Konstanten in sich aufnehmen, die jedoch in den Koefficienten der Reihe auf eine bestimmte Weise in Verbindung treten, so daß man nicht alle Koefficienten der Doppel-Reihe ganz beliebig unbestimmt annehmen kann.

§. 169.

In dem allgemeinen Integral mit der willkührlichen Funktion φ_ω, so wie in allen seinen Umformungen stecken nun alle besonderen Integrale, und letztere gehen aus ersterem hervor, wenn man der willkührlichen Funktion φ_ω eine bestimmte Funktion (mit beliebig vielen konstanten Koefficienten) unterlegt. Unter allen diesen besondern Integralen unterscheidet man dann wieder das ausreichende Integral, welches nur eine einzige willkührliche Konstante in sich aufgenommen hat, und das vollständige, welches zwei oder mehr willkührliche Konstanten enthält. — Dabei giebt es Mittel, wie man aus einem ausreichenden und aus einem vollständigen Integral, das allgemeine (mit der ganz willkührlichen Funkion φ_ω) wiederum finden kann, sobald nur ein allgemeines Integral in endlicher geschlossener Form (algebraisch oder transcendent) existirt. (Vgl. „System der Mathematik" Th. V. §. 288.)

§. 170.

I. Betrachten wir nun eine Parzial-Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung zwischen vier Veränderlichen, nämlich die Gleichung

$$F_{t,x,y,u,\partial u_t,\partial u_x,\partial u_y} = 0.$$

Sie hat ein allgemeines Integral mit einer willkührlichen Funktion $\varphi_{\omega,\omega'}$ zweier Veränderlichen ω und ω', während letztere bestimmte Funktionen von t, x und y sind, die jedoch auch u in sich aufnehmen können.

In Reihen umgeformt wird dasselbe u statt dieser willkührlichen Funktion $\varphi_{\omega,\omega'}$ bloß willkührliche Funktionen von zweien, oder gar nur von einem der unabhängigen Veränderlichen, ja

vielleicht bloß willkührliche konstante Werthe in sich aufnehmen, jedoch auf eine völlig bestimmte Weise, so daß neben der Willkührlichkeit der Koefficienten bereits auch eine bestimmte Beschränkung vorhanden ist.

II. Ferner wird das allgemeine Integral der Gleichung der ersten Ordnung zwischen fünf Veränderlichen, nämlich der Gleichung

$$F_{t,x,y,z,u,\partial u_t,\partial u_x,\partial u_y,\partial u_z} = 0,$$

eine willkührliche Funktion $\varphi_{\omega,\omega',\omega''}$ in sich aufnehmen, während ω, ω', ω'' bestimmte Funktionen sind von t, x, y und z, welche selbst wieder u enthalten können.

U. s. w. f.

§. 171.

Gehen wir nun zu den Parzial-Gleichungen der zweiten Ordnung über. Im Allgemeinen werden ihre allgemeinen Integrale zwei willkührliche Funktionen in sich aufnehmen, jedoch wiederum nicht ganz willkührlich, sondern in vorgeschriebener Form.

I. Es muß nämlich das allgemeine Integral der Gleichung der zweiten Ordnung

$$F_{t,x,u,\partial u_t,\partial u_x,\partial^2 u_t,\partial^{1,1} u_{t,x},\partial^2 u_x} = 0,$$

zwischen den drei Veränderlichen t, x und u, wenn es überhaupt in endlicher (und algebraischer oder transcendenter) Form auszudrücken ist, allemal die Form haben

$$W_{t,x,u,\nu} = 0, \text{ wo } \left\{ \begin{array}{ll} \text{entweder } \nu = \varphi_\omega + \psi_{\omega'} & \\ \text{oder } \quad \nu = \omega' \cdot \varphi_\omega + \psi_\omega & \end{array} \text{ist} \right\},$$

während ω und ω' völlig bestimmte Funktionen von t und x sind, die selbst noch u in sich aufnehmen können, weil nur dann aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(t)} = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0,$$

$$\partial^2 W_{(t)} = 0, \partial^{1,1} W_{(t,x)} = 0, \quad \partial^2 W_{(x)} = 0,$$

die willkührlichen ν, $\partial\varphi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial^2\varphi_\omega$ und $\partial^2\psi_{\omega'}$, oder in dem andern Falle,

$$\nu,\quad \partial\nu_\omega,\quad \partial^2\nu_\omega,\quad \varphi_\omega \text{ und } \partial\varphi_\omega,$$

und somit alles, was von diesen willkührlichen Funktionen herrührt, eliminirt werden kann, so daß eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung sich ergiebt, welche die gegebene $F = 0$ seyn muß*).

II. Das allgemeine Integral der Gleichung

$$F_{t,x,y,u,\partial u_t,\partial u_x,\partial u_y,\partial^2 u_t,\partial^2 u_x,\partial^2 u_y,\partial^{1,1}u_{t,x},\text{ꝛc.}} = 0$$

der zweiten Ordnung zwischen vier Veränderlichen t, x, y und u hat, wenn es überhaupt in endlicher (algebraischer oder transcendenter) Form hergestellt werden kann, die Form

$$W_{t,x,y,u,\nu} = 0, \text{ wo } \left\{\begin{array}{ll}\text{entweder} & \nu = \psi_{\omega,\omega'} + \varphi_{\omega,\omega''} \\ \text{oder} & \nu = \omega''\cdot\psi_{\omega,\omega'} + \varphi_{\omega,\omega'}\end{array} \text{ ist}\right\},$$

wo ferner ω, ω', ω'' völlig bestimmte Funktionen von t, x und y sind, welche auch u selbst in sich aufnehmen können, während ψ, φ ganz willkührliche Funktionen der (unten angehängten) ω, ω' oder ω, ω'' sind.

III. Das allgemeine Integral einer Gleichung der zweiten Ordnung zwischen den fünf Veränderlichen t, x, y, z, u, ist so:

$$W_{t,x,y,z,u,\nu} = 0, \text{ wo } \left\{\begin{array}{ll}\text{entw.} & \nu = \psi_{\omega,\omega',\omega''} + \varphi_{\omega,\omega',\omega'''} \\ \text{oder} & \nu = \omega'''\cdot\psi_{\omega,\omega',\omega''} + \varphi_{\omega,\omega',\omega''}\end{array} \text{ ist}\right\},$$

wo ferner ω, ω', ω'', ω''' bestimmte Funktionen von t, x, y, z und u sind, während dagegen ψ und φ ganz willkührliche Funktionen von ω, ω', ω'' oder ω''' vorstellen, wenn nur überhaupt ein endliches algebraisches oder transcendentes aber allgemeines Integral existirt.

IV. Es ist leicht, die allgemeinen Formen der geschlossenen Integrale der Parzial-Gleichungen zwischen mehr Veränderlichen daraus abzunehmen.

---

*) Wir fügen hier hinzu: 1) Eine Parzial-Gleichung der zweiten Ordnung kann immer ein Ur-Integral haben, aber nicht immer ein erstes Integral (welches selber noch eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung seyn würde). 2) Hat eine Parzial-Gleichung kein erstes Integral, so hat sie auch nie ein Ur-Integral von endlicher geschlossener Form. (Vgl. Syst. d. Math. Th. VII. u. a. Th. VI.)

V. Aus den **allgemeinen** Integralen gehen dann alle **besondern** hervor, wenn den willkührlichen Formen φ, ψ ganz bestimmte aber beliebige untergelegt werden.

§. 172.

In allen den Fällen, wo algebraische oder transcendente geschlossene, endliche Formen des allgemeinen Integrals nicht existiren, kann das allgemeine Integral außer willkührlichen Funktionen auch noch deren Differenzial-Koefficienten enthalten; überhaupt die verschiedensten Formen annehmen.

Es ist daher oft nichts schwieriger, als von einem gefundenen Integral einer gegebenen Parzial-Differenzial-Gleichung die Ueberzeugung zu haben, daß es das **allgemeine** sey, d. h. dasjenige, welches **alle** einzelnen, von einander verschiedenen Integrale, die es noch geben mag, in sich schließt. Und doch muß man, auf der andern Seite, ein allgemeines Integral haben, wenn man in den Anwendungen z. B. auf die Mechanik, die Aufgabe stellen soll können: „unter **allen** Integralen dasjenige zu finden, welches auch noch den Nebenbedingungen der „Aufgabe, die in der Differenzial-Gleichung noch nicht ausgesprochen sind, genügt; namentlich in der Mechanik, denjenigen „welche dem Anfangs-Zustande der gesuchten Bewegung entsprechen."

§. 173.

Dieser so eben angeregten Schwierigkeit geht man aber oft dadurch aus dem Wege, daß man auf ein allgemeines Integral ganz Verzicht leistet, sondern nur ein Integral aufzufinden sich bemüht, welches **allen und jeden** Bedingungen der Aufgabe entspricht. Hat man ein solches gefunden, so hat man eine vollständige Lösung der gegebenen Aufgabe.

Man kann aber hierbei mit Recht den Einwand machen, daß man auf diesem Wege nicht leicht **alle** Auflösungen der Aufgabe finden wird, **wenn letztere mehrere Auflösungen haben sollte**; ja daß man der Auflösung gar nicht ansehen

wird, daß die Aufgabe mehrere Auflösungen zulasse; endlich daß man auf diesem Wege nicht einmal die Anzahl der möglichen Auflösungen erfahren werde.

Auf der andern Seite dagegen sollte man eigentlich (selbst schon in der gemeinen Algebra) nie aus der Auflösung der Aufgabe die Anzahl der möglichen Auflösungen, sondern letztere allemal aus vorher angestellten Betrachtungen entnehmen. Also kann man dasselbe auch hier mit Recht verlangen, und wenn diese vorher angestellten Betrachtungen die Anzahl aller denkbaren Auflösungen der Aufgabe festgestellt haben, — dann darf man nur nach eben so vielen besonderen Integralen suchen, welche allen und jeden Bedingungen der Aufgabe entsprechen, um alle Auflösungen der Aufgabe entschieden hergestellt zu haben.

Da endlich jeder sich bewegende Körper in jedem besonderen Falle nur eine einzige wirkliche Bewegung haben kann, so lassen die meisten Aufgaben der Mechanik in der Regel nur eine einzige Auflösung zu, so daß gerade hier jedes besondere Integral, auf welchem Wege man es erhalten haben mag, sobald es allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, auch allemal das gesuchte seyn wird.

§. 174.

Die Auffindung der allgemeinen und selbst der besonderen Integrale gegebener Parzial-Gleichungen ist meist mit den größten Schwierigkeiten verbunden, so daß von allgemeinen Integrations-Methoden hier fast gar nicht die Rede seyn kann. — Will man jedoch Integrale in Form von unendlichen Reihen haben, die nach Potenzen eines Veränderlichen θ fortlaufen, wo θ eine Funktion ist eines oder mehrerer der in der gegebenen Parzial-Gleichung vorkommenden unabhängigen Veränderlichen, so wird man die „Methode der unbestimmten Koeffizienten und Exponenten“ mit dem besten Erfolge anwenden.

Man setzt zu dem Ende

1) $$u = P \cdot \theta^{\alpha} + Q \cdot \theta^{\beta} + R \cdot \theta^{\gamma} + \cdots,$$

substituirt solchen Werth statt u, und seine Differenzial-Koeffi-

cienten statt δu_t, δu_x, rc. in die gegebene Parzial-Differenzial-Gleichung

2) $\qquad F_{t,x,y\ldots,u,\delta u_t,\delta u_x,\text{rc.}} = 0,$

ordnet die Gleichung nach Potenzen von θ (zu welchem Behufe zuweilen erst die unbestimmt gelassenen Exponenten α, β, γ, rc. zweckmäßig angenommen werden müssen, doch so, daß $\alpha < \beta < \gamma$ rc. bleibt) und setzt dann die Koefficienten dieser Potenzen von θ der Null gleich.

Poisson glaubt (Traité de Mécanique. édit. II. Vol. II. pag. 348.), daß wenn man bei dieser Methode sowohl für die Exponenten α, β, γ, rc. als auch für die Koefficienten P, Q, R, rc. die allgemeinsten Bestimmungen sich verschaffe, dann die so gefundene Reihe allemal das allgemeine Integral der gegebenen Parzial-Gleichung sey, welches alle besonderen in sich schließe. So häufig dies in den Anwendungen der Fall seyn wird, so wenig können wir aber diese Behauptung in dieser Allgemeinheit für wahr halten, und sie wird sich allemal als unwahr ausweisen, so oft die angenommene Form der Reihe (namentlich des θ) für das allgemeine Integral nicht paßt, wohl aber einem besonderen Integrale angemessen seyn sollte. In diesem Falle wird man auf demselben Wege allemal nur dieses besondere Integral erhalten, dann aber um so leichter zu dem unhaltbaren Glauben veranlaßt werden, daß man im Besitze des allgemeinen Integrals sey, wenn diesem besonderen Integral selbst noch eine größere Allgemeinheit zukommen sollte.

Dagegen bleibt dieselbe Behauptung in voller Kraft, so oft man Reihen sucht, die nach ganzen Potenzen von $(\theta - \alpha)$ fortlaufen, wo α unbestimmt konstant ist, weil sich diese Form der Entwikkelung keiner denkbaren Funktion versagt.

§. 175.

Unter denjenigen Parzial-Gleichungen, welche noch am ersten einer allgemeinen Integration fähig sind, stehen die linearen wiederum voran, d. h. diejenigen, in welchen die einzelnen Glieder, sowohl die gesuchte Funktion u, als auch die Differenzial-

Koefficienten von u, bloß in der ersten Dimension und mit Koefficienten multiplicirt enthalten, welche entweder konstant, oder doch nur Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind.

Wir wollen nun dieses Alles an einem Beispiel noch in's besondere nachweisen.

§. 176.

Es sey zu integriren die Parzial-Gleichung der zweiten Ordnung zwischen drei Veränderlichen, nämlich

1) $$\partial u_t = a \cdot \partial^2 u_x,$$

wo a eine gegebene Konstante ist.

I. Man erhält hier sogleich, je nachdem man statt u eine nach ganzen Potenzen von t, oder eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe mit unbestimmten Koefficienten setzt, und jedesmal die Koefficienten bestimmt,

2) $$u = \varphi_x + at \cdot \partial^2 \varphi_x + \frac{a^2 t^2}{2!} \cdot \partial^4 \varphi_x + \frac{a^3 t^3}{3!} \cdot \partial^6 \varphi_x + \cdots$$

und auch

3) $$u = \left.\begin{array}{l} \psi_t + \frac{x^2}{2!a} \cdot \partial \psi_t + \frac{x^4}{4!a^2} \cdot \partial^2 \psi_t + \cdots \\ + x \cdot \chi_t + \frac{x^3}{3!a} \cdot \partial \chi_t + \frac{x^5}{5!a^2} \cdot \partial^2 \chi_t + \cdots \end{array}\right\}$$

In dem erstern dieser Integrale kommt nur eine einzige willkührliche Funktion φ_x vor, welche den Werth von u vorstellt, wenn $t = 0$ ist. In dem andern Integral dagegen kommen zwei willkührliche Funktionen ψ_t und χ_t vor, welche die Werthe von u und ∂u_x vorstellen, für $x = 0$.

Dieselben Resultate bekommt man auch unmittelbar durch den Maclaurinschen Lehrsatz nur in noch allgemeinerer Form, nämlich nach Potenzen von $t-\alpha$, oder nach Potenzen von $x-\beta$ geordnet. Diese letzteren Formen erhält man jedoch auch, wenn man $\theta = t-\alpha$ oder $\theta = x-\beta$ nimmt, dann $u = A_0 + A_1 \cdot \theta + A_2 \cdot \theta^2 + A_3 \cdot \theta^3 + \cdots$ setzt, und die unbestimmten Koefficienten dergestalt bestimmt, daß der gegebenen Differenzial-Gleichung genügt wird.

Die beiden Integrale (2. u. 3.) kann man auch aus einander ableiten, indem man z. B. das erstere, nach Potenzen von t fortlaufende Integral in eine Doppel-Reihe verwandelt (d. h. die Koefficienten selbst wieder in Reihen nach x), dann aber diese Doppel-Reihe (dadurch daß man sie nach x ordnet, und die einzelnen Koefficienten, als Reihen die nach t fortlaufen, summirt) wiederum in eine einfache, nach x fortlaufende Reihe umformt.

II. Wir wollen nun von derselben gegebenen Parzial-Gleichung (1.) neue Formen des Integrals aufsuchen, indem wir $\theta = e^x$ nehmen und $u = P\cdot\theta^\alpha + Q\cdot\theta^\beta + R\cdot\theta^\gamma + \cdots$ setzen, dabei aber P, Q, R, ... und α, β, γ, ꝛc. zu bestimmen suchen. Man hat dann, indem wir P, Q, R, ꝛc. als bloße Funktionen von t voraussetzen,

$$u = P\cdot e^{\alpha x} + Q\cdot e^{\beta x} + R\cdot e^{\gamma x} + \cdots$$

$$\partial u_t = \partial P_t\cdot e^{\alpha x} + \partial Q_t\cdot e^{\beta x} + \partial R_t\cdot e^{\gamma x} + \cdots$$

$$\partial^2 u_x = \alpha^2 P\cdot e^{\alpha x} + \beta^2 Q\cdot e^{\beta x} + \gamma^2 R\cdot e^{\gamma x} + \cdots.$$

Diese Werthe in die gegebene Parzial-Gleichung (1.) substituirt, geben, wenn man die Koefficienten von $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$, ꝛc. einzeln der Null gleich setzt,

$$\partial P_t = a\alpha^2\cdot P,\quad \partial Q_t = a\beta^2\cdot Q,\quad \partial R_t = a\gamma^2\cdot R, \text{ ꝛc.};$$

folglich wenn man diese Gleichungen, in sofern sie zu den linearen totalen Differenzial-Gleichungen (d. I. Th. Analys. §. 50.) gehören, integrirt

$$P = A\cdot e^{a\alpha^2\cdot t},\quad Q = B\cdot e^{a\beta^2\cdot t},\quad R = C\cdot e^{a\gamma^2\cdot t}, \text{ ꝛc.},$$

wo A, B, C, ꝛc. willkührliche Konstanten sind, während α, β, γ, ꝛc. ebenfalls ganz unbestimmt bleiben, jedoch konstant, wie sie vorausgesetzt worden sind. Man hat zuletzt

$$4)\quad u = A\cdot e^{a\alpha^2 t}\cdot e^{\alpha x} + B\cdot e^{a\beta^2 t}\cdot e^{\beta x} + C\cdot e^{a\gamma^2 t}\cdot e^{\gamma x} + \cdots,$$

wo A, B, C, ꝛc., α, β, γ, ꝛc. ganz willkührliche Konstanten sind.

Entwikkelt man hier wieder die Koefficienten von $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$, ꝛc. nach Potenzen von t, und faßt man die Summe

$A \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{\gamma x} + \cdots$ in den Ausdruck φ_x zusammen, so hat man wieder das Integral (2.) — Auf ähnliche Weise kann man sich aus dem Integral (4.) auch wieder das Integral (3.) verschaffen.

Diese letzteren Umformungen zeigen aber, daß das Integral (4.) nur unter der Voraussetzung eben so allgemein ist, als die Integrale (2. und 3.), daß jede willkührliche Funktion φ_x auf die Form $A \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{\gamma x} + \cdots$ gebracht werden kann.

III. Man kann auch das Integral der Gleichung (1.) durch ein bestimmtes Integral ausdrücken und zwar scheinbar in endlicher Form.

Es ist nämlich, wenn $2n - 1$ eine ungerade Zahl vorstellt, und wenn man

$$5) \qquad \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot d\omega = k$$

setzt, allemal

$$6) \qquad \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot \omega^{2n} \cdot d\omega = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot k \; {}^{*}).$$

Auf der andern Seite ist offenbar

$$7) \qquad \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot \omega^{2n-1} \cdot d\omega = 0,$$

weil der Repräsentant $e^{-\omega^2} \cdot \omega^{2n-1} \cdot d\omega$ der Elemente, deren Summe durch das bestimmte Integral vorgestellt ist, für zwei gleiche, übrigens positive und negative Werthe von ω, selber gleiche, aber mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehene

*) Man erhält dies, wenn man in (5.) $\omega = \omega' \cdot \sqrt{g}$ nimmt, so daß man zunächst hat:

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-g\omega'^2} \cdot d\omega' = \frac{k}{\sqrt{g}};$$

dann aber diese Gleichung $n$mal hinter einander nach g differenziirt und zuletzt $\sqrt{g} = 1$ nimmt, während man natürlich auch wieder ω statt ω' schreiben, ja gleich Anfangs $\omega \cdot \sqrt{g}$ statt ω, und $d\omega \cdot \sqrt{g}$ statt $d\omega$ setzen kann.

Werthe hat, deren Summe also paarweise der Null gleich ist. (Vgl. I. Th. Analys. §. 40. Nr. 3.).

Vermöge des Resultates (6.) hat man

$$8) \qquad \frac{1}{n!} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot \omega^{2n} \cdot d\omega,$$

und setzt man diesen Werth von $\frac{1}{n!}$ in das Integral (2.) so nimmt solches die Form an:

$$9) \; u = \frac{1}{k} \cdot \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \left(\varphi_x + \partial^2 \varphi_x \cdot \frac{(2\omega \cdot \sqrt{at})^2}{2!} + \partial^4 \varphi_x \cdot \frac{(2\omega \cdot \sqrt{at})^4}{4!} + \cdots \right) \cdot d\omega.$$

Nach (7.) hat man dagegen:

$$10) \; 0 = \frac{1}{k} \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \left(\partial \varphi_x \cdot (2\omega \cdot \sqrt{at}) + \partial^3 \varphi_x \cdot \frac{(2\omega \cdot \sqrt{at})^3}{3!} + \cdots \right) \cdot d\omega.$$

Addirt man nun diese beiden letztern Gleichungen (9. u. 10.), so erhält man auf der rechten Seite alle geraden und alle ungeraden Potenzen von $2\omega \cdot \sqrt{at}$; und setzt man $e^{-\omega^2} \cdot d\omega$ als einen gemeinschaftlichen Faktor heraus, so läßt sich die Reihe, welche den andern Faktor bildet, sogleich (nach dem Taylorschen Lehrsatze) in $\varphi_{x+2\omega \cdot \sqrt{at}}$ verwandeln, so daß man erhält:

$$11) \qquad u = \frac{1}{k} \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot \varphi_{x+2\omega\sqrt{at}} \cdot d\omega \; {}^{*}),$$

---

*) Es ist nicht schwer, dasselbe Resultat auch aus dem Integral (4.) zu ziehen. Setzt man nämlich in (5.) $\omega + \alpha \cdot \sqrt{at} = \omega'$, so erhält man, wenn zuletzt wieder ω statt ω' gesetzt wird:

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2 + 2\omega\alpha \cdot \sqrt{at}} \cdot d\omega = k \cdot e^{\alpha^2 at},$$

wodurch man $e^{\alpha^2 at}$, und dann auf dieselbe Weise auch $e^{\beta^2 at}$, $e^{\gamma^2 at}$, ꝛc. in bestimmte Integrale ausdrückt. Substituirt man dann diese letztern statt der Potenzen in das Integral (4.) und setzt man wieder wie oben

$$A \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{\gamma x} + \cdots = \varphi_x,$$

so erhält man sogleich das Resultat (11.) noch einmal.

wo k den aus (5.) zu findenden Werth hat, welcher (nach I. Th. pag. 103. Nr. 12.) $= \sqrt{\pi}$ ist*).

---

*) Man kann, um k zu finden, so verfahren:
Es werde

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-x^2} \cdot dx = k$$

gesetzt, so ist auch

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-y^2} \cdot dy = k;$$

folglich wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-x^2} \cdot dx \times \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-y^2} \cdot dy = k^2,$$

oder

$$\int_{\infty \div (-\infty)} \left(\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \right) \cdot dy = k^2.$$

Setzt man nun

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad e^{-(x^2+y^2)} = z,$$

so wird

$$k^2 = \int_{\infty \div (-\infty)} \left(\int_{\infty \div (-\infty)} z \cdot dx \right) \cdot dy.$$

Denkt man sich nun x, y, z als rechtwinkliche Koordinaten-Werthe der durch die Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ gegebenen Fläche (welche um OZ herum nach allen Seiten hin sich in's Unendliche ausbreitet, dabei aber der Ebene XOY rings herum in unendlicher Entfernung von OZ unendlich nahe kommt), so stellt k^2 offenbar den Inhalt des von dieser Oberfläche und der Ebene XOY gebildeten Körpers vor. Und da sich derselbe Inhalt auch noch dadurch findet, daß man um OZ herum als gemeinschaftliche Axe, unendlich viele Cylinder-Flächen sich denkt, deren Grundflächen den Radius r haben, der nach und nach von 0 an bis in's Unendliche um das unendlich kleine dr wächst, — und zuletzt die Inhalte aller dieser unendlich dünnen Hohl-Cylinder addirt, — so findet sich dasselbe k^2 noch so:

$$k^2 = 2\pi \int_{\infty \div 0} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr.$$

Nun ergiebt sich aber, wenn $r^2 = u$ gesetzt wird

$$\int e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \int \tfrac{1}{2} e^{-u} \cdot du = -\tfrac{1}{2} e^{-u},$$

folglich $\int_{\infty \div 0} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2}$, also $k^2 = \pi$ und $k = \sqrt{\pi}$.

Setzt man hier t = 0, und ist $\mathfrak{u}$ die Funktion von x, welche aus u für t = 0 hervorgeht, so giebt diese Gleichung noch

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{k} \cdot \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot \varphi_x \cdot d\omega = \varphi_x \cdot \frac{1}{k} \int_{\infty \div (-\infty)} e^{-\omega^2} \cdot d\omega,$$

d. h.

12) $$\mathfrak{u} = \varphi_x.$$

Weil aber jedes bestimmte Integral nichts anders ist, als eine Summe von unendlich vielen Elementen, so müssen die Faktoren von $d\omega$ in diesen Elementen weder für $\omega, = +\infty$ noch für $\omega, = -\infty$ und auch nicht für Zwischen-Werthe von ω, den Werth ∞ oder die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, wenn nicht der Werth eines solchen bestimmten Integrals illusorisch seyn soll.

Eben so könnte man auch aus dem Integral (3.) eine neue Form desselben herleiten, so nämlich, daß u durch ein bestimmtes Integral und anscheinlich in endlicher Form ausgedrückt wäre. Diese letztere Form würde aber nicht so einfach werden, als die in (8.) gefundene.

§. 177.

Die meisten linearen Parzial-Gleichungen, zu welchen die Physik und namentlich die Mechanik führt, sind Gleichungen zwischen der Zeit t, den Koordinaten-Werthen x, y, z (oder bloß x und y, manchmal bloß x) und noch der gesuchten Funktion u, nebst deren Ableitungen nach t, x, y und z (oder bloß nach t, x und y, oder auch bloß nach t und x). — Sie lassen sich gewöhnlich am bequemsten, obgleich in Form von unendlichen Reihen, dadurch integriren, daß man

1) $$u = P_0 \cdot e^{\alpha_0 t} + P_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + P_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \cdots,$$

oder

$$u = S\left[P_b \cdot e^{\alpha_b t}\right]$$

setzt (wo unter $\mathfrak{b}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. und jede positive ganze Zahl verstanden wird, und wo S die Summe aller der dadurch entstehenden Glieder andeutet), während man α_0, α_1, α_2, ꝛc. als konstant, P_0, P_1, P_2, ꝛc. als Funktionen von x, y, z ansieht; — diesen Werth nebst seinen Ableitungen in die gegebene Parzial-Gleichung substituirt, und letztere dann in lauter einzelne Gleichungen von der Form

$$(☾)\cdots \qquad M_\mathfrak{b}\cdot\alpha_\mathfrak{b}^2 + N_\mathfrak{b}\cdot\alpha_\mathfrak{b} + O_\mathfrak{b} = 0$$

zerfällt, wo jede bloß den einzigen Koefficjenten $P_\mathfrak{b}$ enthält, so daß jede solche Gleichung (welche aus der (☾) für $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{b} = 1$, $\mathfrak{b} = 2$, $\mathfrak{b} = 3$, ꝛc. hervorgeht) einen der Koefficienten P_0, P_1, P_2, ꝛc. (nämlich den, den sie gerade enthält) bestimmt.

Da bei diesem Verfahren α_0, α_1, α_2, ꝛc. als völlig willkührliche Konstanten eingehen, so müssen sie aus den Nebenbedingungen der Aufgabe (also in Problemen der Mechanik aus dem Anfangs-Zustande, so wie überhaupt aus den für bestimmte Werthe der Veränderlichen vorhandenen Bedingungen) ihre Bestimmung erhalten. Sie zeigen sich zuweilen imaginär, und in diesem Falle müssen die Exponential-Ausdrücke im Integral, wenn bequeme Ziffern-Rechnungen möglich werden sollen, in Sinus- und Kosinus-Ausdrücke verwandelt werden. In demselben Falle wird man daher überhaupt besser thun, gleich vom Anfange an, statt die Form (1.) für u zu wählen, lieber

$$2) \quad u = \begin{cases} p_0\cdot\cos\lambda_0 t + p_1\cdot\cos\lambda_1 t + p_2\cdot\cos\lambda_2 t + \cdots \\ + q_0\cdot\sin\lambda_0 t + q_1\cdot\sin\lambda_1 t + q_2\cdot\sin\lambda_2 t + \cdots \end{cases}$$

oder

$$u = S\left[p_\mathfrak{b}\cdot\cos\lambda_\mathfrak{b} t\right] + S\left[q_\mathfrak{b}\cdot\sin\lambda_\mathfrak{b} t\right]$$

zu setzen, in dieser Reihe die Werthe von λ_0, λ_1, λ_2, ꝛc. als konstant, dagegen p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ꝛc. als Funktionen von x, y, z sich zu denken, und das vorbeschriebene Verfahren, zur Bestimmung der Koefficienten, zu wiederholen. Der Anfangs-Zustand der Aufgabe und überhaupt die zu erfüllenden Nebenbedingungen werden dann die Werthe der Koefficienten

λ_0, λ_1, λ_2, ꝛc. sowohl, als auch der durch die Integration noch eingehenden Konstanten bestimmen; und diese werden dann als reell sich ausweisen.

Schluß-Anmerkung.

Man mag schließlich noch nachstehende Wahrheit beherzigen, welche den Zusammenhang der verschiedenen Parzial-Gleichungen unter sich und mit den totalen Differenzial-Gleichungen näher bezeichnet.

Eine Parzial-Gleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen t und x und der gesuchten Funktion $u_{t,x}$ oder u und deren Ableitungen, ist nämlich einer unendlich großen Anzahl von totalen Differenzial-Gleichungen bloß zwischen x und u und ∂u_x, $\partial^2 u_x$, ꝛc. gleich zu achten, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man sich in ihr nach und nach unendlich viele und alle Werthe gesetzt denkt, welche t nur immer haben kann. Jede dieser unendlich vielen totalen Gleichungen, wenn sie integrirt wird, liefert dann für dieses bestimmte t den zugehörigen Werth u in x ausgedrückt, während statt ∂u_t, $\partial^2 u_t$, ꝛc., weil sie ebenfalls Funktionen von u und t sind, für jeden bestimmten Werth von t bloß Funktionen von x zu stehen kommen.

Auf dieselbe Weise ist eine Parzial-Gleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen t, x und y, als ein Aggregat von einer unendlichen Anzahl von Parzial-Gleichungen mit den beiden unabhängigen Veränderlichen x und y anzusehen, welche letztere aus ersterer dadurch hervorgehen, daß man statt t nach und nach alle seine Werthe gesetzt denkt.

U. s. w. f.

Anwendungen der Mechanik.

Fünfzehntes Kapitel.

Von den Schwingungen einer gespannten Saite, als Beispiel der Bewegung elastischer Körper.

§. 178.

Eine zwischen den festen Punkten A und B (Fig. 31.) mittelst der (in Pfunden ausgedrückten) Kraft Π ausgespannte, sehr wenig ausdehnbare, homogene und überall gleich dicke Saite, deren Länge im Zustande des Gleichgewichts $= a$ ist, und deren Gewicht p gegen das Gewicht Π so klein seyn mag, daß sie im Zustande des Gleichgewichts ganz nahehin eine gerade Linie AMB bildet, — werde zu Anfang durch irgend eine von außen eingreifende Ursache ein wenig aus der Lage des Gleichgewichts gebracht, und dann den Anfangs-Geschwindigkeiten, so wie den etwa noch wirkenden beschleunigenden Kräften überlassen. Man soll die Schwingungen bestimmen, welche sie ausführen wird.

I. Man denke sich die Saite im Zustande des Gleichgewichts in unendlich viele gleiche Stückchen zertheilt, und das dicht an M liegende Stück MN habe, wie die übrigen alle, die Länge dx, während AM $= x$ seyn mag. Das Gewicht dieses Stückchens MN berechnet sich dann $= p \cdot \frac{dx}{a}$, und seine Masse $= \frac{p}{g} \cdot \frac{dx}{a}$.

Sind nun M' und N' zu Ende der Zeit t die den Punkten M und N dergestalt entsprechenden Punkte, daß $M'N'$ mit MN, also auch AM' mit AM einerlei Masse hat; wird $AM' = s$, $M'N' = ds$ gesetzt, und stellt ε den Querschnitt bei M' mit der jetzigen Dichtigkeit (bei M') multiplicirt vor, so ist $\varepsilon \cdot ds$ dieselbe Masse $\frac{p}{g} \cdot \frac{dx}{a}$, und man hat daher die Gleichung

$$1) \qquad \varepsilon \cdot ds = \frac{p}{g} \cdot \frac{dx}{a}.$$

Legt man nun durch A drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen AU, AY, AZ, von denen die erstere mit der Richtung AMB zusammenfallen mag; und nennt man $x+u$, y, z die drei Koordinaten-Werthe des Punktes M', so sind u, y, z fortwährend sehr kleine Funktionen von x und t, in so fern ihre Anfangs-Werthe u', y', z' (für $t=0$) für jedes x, schon sehr klein angenommen worden sind; und diese Funktionen u, y, z zu bestimmen, das ist der Gegenstand unserer Aufgabe.

Auch der Bogen $AM' = s$ ist eine Funktion von x und t, aber $M'N' = ds$ stellt den Zuwachs vor, den dieser Bogen s dadurch erleidet, daß x allein um dx wächst, während t selbst sich nicht verändert. Bezeichnet man die, diesem Zuwachs dx entsprechenden Zuwachse von u, y, z, durch du, dy, dz, so hat man

$$du = \partial u_x \cdot dx, \quad dy = \partial y_x \cdot dx, \quad dz = \partial z_x \cdot dx, \quad ds = \partial s_x \cdot dx.$$

In so fern aber $x+u$, y, z die Abscissen-Werthe von M' sind, hat man

$$ds^2 = [d(x+u)]^2 + dy^2 + dz^2,$$

oder

$$2) \qquad 1 = \frac{(dx+du)^2}{ds^2} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Weil jedoch $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ die Kosinusse der Winkel sind, welche die Tangente an M' oder das verlängerte Element $M'N'$ mit den Koordinaten-Axen AY und AZ machen, letztere Winkel

aber

aber wegen der geringen Ausdehnbarkeit der Saite an allen Stellen der Kurve nahehin rechte Winkel werden, so kann man die Quadrate dieser Kosinusse außer Acht lassen, und die Gleichung (2.) liefert daher

3.) $ds = dx + du$, oder $\partial s_x = 1 + \partial u_x$.

II. Werden nun die parallel mit den Axen zu Ende der Zeit t an das Element M'N' neu hinzutretenden bewegenden Kräfte bezüglich durch

$$X\varepsilon \cdot ds, \quad Y\varepsilon \cdot ds, \quad Z\varepsilon \cdot ds$$

bezeichnet, so daß X, Y, Z die beschleunigenden Kräfte sind (welche an den einzelnen Atomen oder den Massen-Einheiten hinzutreten), so sind (nach §. 18.)

$$(X - \partial^2 u_t)\varepsilon \cdot ds, \quad (Y - \partial^2 y_t)\varepsilon \cdot ds, \quad (Z - \partial^2 z_t)\varepsilon \cdot ds$$

die verlorenen Kräfte, welche sich an der Saite im Gleichgewicht halten müssen, dem d'Alembertschen Principe zufolge.

Setzt man daher in den Gleichungen des Gleichgewichts einer Seil-Kurve, wie solche (im II. Th. pag. 365.) gefunden worden sind, statt der dortigen Kräfte X, Y, Z bezüglich

$$X - \partial^2 u_t, \quad Y - \partial^2 y_t, \quad Z - \partial^2 z_t,$$

so erhält man die hier verlangten Gleichungen der Bewegung.

III. Weil aber in unserer Aufgabe gar keine beschleunigenden Kräfte wirken sollen, und selbst die Schwere der einzelnen Atome hier nicht in Betracht kommt, so ist hier $X = Y = Z = 0$, also bloß $-\partial^2 u_t$, $-\partial^2 y_t$, $-\partial^2 z_t$ statt jener X, Y, Z in den Formeln (I.—III. des II. Th. pag. 365.) zu setzen. Man erhält daher hier, wenn man nicht übersieht, daß die Abscisse, welche dort durch x vorgestellt ist, hier durch $x + u$ ausgedrückt worden, und wenn man statt ε seinen Werth (aus 1.) substituirt

$$4) \quad \begin{cases} \partial\left(T \cdot \frac{d(x+u)}{ds}\right)_x = \frac{p}{ga} \cdot \partial^2 u_t, \\ \partial\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right)_x = \frac{p}{ga} \cdot \partial^2 y_t, \\ \partial\left(T \cdot \frac{dz}{ds}\right)_x = \frac{p}{ga} \cdot \partial^2 z_t, \end{cases}$$

wo T die Spannung des Elementes $\varepsilon \cdot ds$ vorstellt, wie solche in diesem Augenblicke der Bewegung gerade statt hat.

Diese Gleichungen kann man nun, wegen des Umstandes, daß u, y, z anfangs sehr klein gedacht sind und fortwährend sehr klein bleiben, auf die lineäre Form bringen, und dadurch wird es dann möglich, sie zu integriren.

IV. Der Unterschied $T - \Pi$ der Spannungen muß sich zum Unterschiede der Längen $ds - dx$ verhalten, wie ein konstanter Werth q zu der konstanten Länge dx (nach II. Th. §§. 145. 146. und pag. 403. Note), wo q ein gegebenes Gewicht ist, welches von der Materie und Dicke der Saite abhängt. Also hat man, weil (nach 3.) $dx + du$ statt ds gesetzt werden kann,

$$5) \qquad T = \Pi + q \cdot \frac{du}{dx}.$$

Substituirt man diesen Werth statt T, und $dx + du$ statt ds in die Gleichungen (4.), und setzt man noch der Kürze wegen

$$6) \qquad \frac{gaq}{p} = b^2 \quad \text{und} \quad \frac{ga\Pi}{p} = c^2,$$

so gehen die Gleichungen der Bewegung (in 4.) über in

$$7) \quad \partial^2 u_t = b^2 \cdot \partial^2 u_x, \quad \partial^2 y_t = c^2 \cdot \partial^2 y_x \quad \text{und} \quad \partial^2 z_t = c^2 \cdot \partial^2 z_x.$$

V. Diese Gleichungen (7.) sind sogenannte Parzial-Differenzial-Gleichungen und müssen nun integrirt werden. Ihre unmittelbare Betrachtung führt aber sogleich zu folgenden Wahrheiten:

1) Die zweite und dritte sind genau dieselben, so daß im Allgemeinen y und z durch dieselben Integrale ausgedrückt seyn, und nur durch verschiedene Bestimmungen der (eingehenden Konstanten oder vielmehr) willkührlichen Funktionen sich von einander unterscheiden werden. Die erstere der Gleichungen (7.) unterscheidet sich von den beiden andern nur dadurch, daß b^2 statt c^2 zu stehen kommt.

2) Da in allen drei Gleichungen (7.) die Veränderlichen u, y, z von einander völlig getrennt erscheinen, so sind diese Funktionen genau eben so, wie wenn jede isolirt statt hätte, und

die beiden andern Null wären. Dies giebt Veranlassung, die Schwingungen von einander abzusondern und Längen-Schwingungen von Transversal-Schwingungen zu unterscheiden. Unter ersteren versteht man nämlich die durch u bestimmten Bewegungen parallel mit AU; unter den letzteren versteht man dagegen die durch y und z bestimmten Bewegungen parallel mit AY und AZ.

§. 179.

Integration der Gleichung $\partial^2 y_t = c^2 \cdot \partial^2 y_x$, so daß das Integral allen Nebenbedingungen genügt.

I. Um die Gleichung

$$1) \qquad \partial^2 y_t = c^2 \cdot \partial^2 y_x$$

zu integriren, wende man nun die Methode des (§. 177.) und zwar die zweite Form des gesuchten Integrals an, weil sich in diesem Problem periodische Wiederkehr voraussetzen läßt, diese aber durch Exponential-Ausdrücke mit reellen Exponenten nicht darstellbar sind.

Man setze also

$$2) \qquad y = S[P_b \cdot \cos \lambda_b t] + S[Q_b \cdot \sin \lambda_b t],$$

indem man sich P_0, Q_0, P_1, Q_1, P_2, Q_2, ꝛc. als bloße Funktionen von x denkt. Diese Annahme giebt

$$\partial^2 y_x = S[\partial^2(P_b)_x \cdot \cos \lambda_b t] + S[\partial^2(Q_b)_x \cdot \sin \lambda_b t]$$

und

$$\partial^2 y_t = -S[P_b \cdot \lambda_b^2 \cdot \cos \lambda_b t] - S[Q_b \cdot \lambda_b^2 \cdot \sin \lambda_b t].$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung (1.), so erhält man, wenn die Gleichung auf Null gebracht wird, und wenn man ihr für jedes beliebige λ_0, λ_1, ꝛc. genügt, die Gleichungen

$$P_b \cdot \lambda_b^2 + c^2 \cdot \partial^2(P_b)_x = 0$$

und

$$Q_b \cdot \lambda_b^2 + c^2 \cdot \partial^2(Q_b)_x = 0,$$

welche beide Gleichungen die Repräsentanten sind von unendlich vielen Gleichungen, die alle aus ihnen hervorgehen, wenn statt

b nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. und jede ganze positive Zahl gesetzt wird.

Die lineäre Gleichung

$$P_b \cdot \lambda_b + c^2 \cdot \partial^2_x(P_b)_x = 0$$

wird nun (nach §. 50. Analys. d. I. Th.) integrirt, und giebt

$$P_b = A_b \cdot \cos\frac{\lambda_b}{c}x + A'_b \cdot \sin\frac{\lambda_b}{c}x.$$

Eben so findet sich aber auch

$$Q_b = B_b \cdot \cos\frac{\lambda_b}{c}x + B'_b \cdot \sin\frac{\lambda_b}{c}x;$$

wo jede dieser beiden letztern Gleichungen wiederum unendlich viele Gleichungen repräsentirt, die alle aus ihr hervorgehen, wenn 0, 1, 2, 3, ꝛc. nach und nach statt b gesetzt werden.

II. Das Integral (2.) nimmt also jetzt die Form an:

$$3)\quad y = S\left[\left(A_b \cdot \cos\frac{\lambda_b}{c}x + A'_b \cdot \sin\frac{\lambda_b}{c}x\right) \cdot \cos\lambda_b t\right]$$
$$+ S\left[\left(B_b \cdot \cos\frac{\lambda_b}{c}x + B'_b \cdot \sin\frac{\lambda_b}{c}x\right) \cdot \sin\lambda_b t\right],$$

und die gesuchte Funktion y ist nun die Summe aus unendlich oder endlich vielen solcher Glieder, je nachdem die Konstanten A_b, A'_b, B_b und B'_b diesen oder jenen Bedingungen und in's Besondere diesen oder jenen Anfangs-Zuständen zu genügen haben.

III. Setzen wir nun voraus, daß zu Anfange, wo $t = 0$ ist,

$$4)\quad y = Y_x \quad \text{und} \quad \partial y_t = U_x$$

seyn soll, wo Y_x die Anfangs-Ordinate, U_x aber die Anfangs-Seiten-Geschwindigkeit (parallel mit AY) vorstellt, wie sie für jedes durch x gegebene Element bekannt seyn müssen, so muß man vor allen Dingen statt Y_x und U_x Funktionen-Ausdrücke aufsuchen, welche für $x = 0$ und für $x = a$, aber auch für $x < 0$ und $x > a$ der Null gleich werden, und nur für Werthe von x, welche zwischen 0 und a liegen, mit Y_x und U_x zusammenfallen.

Dieses, für die vorliegende und alle ähnlichen Aufgaben, so

höchst wichtige Problem hat Fourier zuerst gelöst (wie wir im II. Th. Anhang. II. Kap. ausführlich gezeigt haben). Nach der angeführten Stelle ist aber

$$5)\quad Y_x = \frac{2}{a}\cdot S\left[sin\frac{(b+1)\pi x}{a}\cdot\int_{a\div 0} Y_X\cdot sin\frac{(b+1)\pi X}{a}\cdot dX\right]$$

und eben so

$$6)\quad U_x = \frac{2}{a}\cdot S\left[sin\frac{(b+1)\pi x}{a}\cdot\int_{a\div 0} U_X\cdot sin\frac{(b+1)\pi X}{a}\cdot dX\right],$$

wo statt b nach und nach Null und jede ganze Zahl gesetzt wird, während das vorgesetzte S die Summe aller dieser Glieder vorstellt.

IV. Da nun aus dem Integrale (3.), wenn man solches nach allem t differenziirt, noch

$$7)\quad \partial y_t = -S\left[\left(A_b\cdot cos\frac{\lambda_b}{c}x + A'_b\cdot sin\frac{\lambda_b}{c}x\right)\cdot\lambda_b\cdot sin\,\lambda_b t\right]$$
$$+S\left[\left(B_b\cdot cos\frac{\lambda_b}{c}x + B'_b\cdot sin\frac{\lambda_b}{c}x\right)\cdot\lambda_b\cdot cos\,\lambda_b t\right]$$

folgert, während ∂y_t die Geschwindigkeit ausdrückt, zu jeder Zeit t; und da die (3.) und die (7.) für $t = 0$ bezüglich in

$$y = S\left[A_b\cdot cos\frac{\lambda_b}{c}x + A'_b\cdot sin\frac{\lambda_b}{c}x\right]$$

und

$$\partial y_t = S\left[\lambda_b\cdot\left(B_b\cdot cos\frac{\lambda_b}{c}x + B'_b\cdot sin\frac{\lambda_b}{c}x\right)\right]$$

übergehen, so folgt, wenn man diese Resultate mit (4. 5. u. 6.) vergleicht,

$$A_b = 0,\quad B_b = 0,\quad \frac{\lambda_b}{c} = \frac{(b+1)\pi}{a},\ \text{folglich}\ \lambda_b = \frac{(b+1)c\pi}{a};$$

ferner

$$A'_b = \frac{2}{a}\cdot\int_{a\div 0} Y_X\cdot sin\frac{(b+1)\pi X}{a}\cdot dX$$

und

$$B'_b = \frac{2}{a}\cdot\int_{a\div 0}\frac{1}{\lambda_b}U_X\cdot sin\frac{(b+1)\pi X}{a}\cdot dX.$$

Ist nun die Saite in ihren End-Punkten A und B mit einer dem Gewichte Π gleich kommenden Kraft ausgespannt, so wird durch sie die Ecke f nach F mit der Kraft $\Pi \cdot \sin \text{efg}$ gedrückt. Werden nun Ee, Ff, Gg, ꝛc. durch y_1, y_2, y_3, ꝛc. bezeichnet, und macht man AE = EF = FG = ꝛc. = r, so findet sich

$$\sin \text{efg} = -\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r}.$$

Die beschleunigende Kraft, mit welcher die Ecke f gegen F bewegt wird ist daher, wenn M wie Π in Pfunden ausgedrückt und durch g die Schwere bezeichnet wird,

$$= g\frac{\Pi}{M}\cdot \sin \text{efg} = -g\frac{\Pi}{M}\cdot\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r}.$$

Die Gleichung der Bewegung des Punktes f gegen F wird daher

$$\partial^2(y_2)_t = g\frac{\Pi}{M}\cdot\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r},$$

und allgemein für die μte Ecke

$$1)\quad \partial^2(y_\mu)_t = g\frac{\Pi}{M}\cdot\frac{y_{\mu+1} - 2y_\mu + y_{\mu-1}}{r},$$

welche Gleichung m — 1 verschiedene Gleichungen vorstellt *),

---

gänzlich außer Acht lassen, und wie zweitens nur der besondere Fall der Transversal-Schwingungen betrachtet wird, in welchem man voraussetzt, daß zu Anfange und während der Dauer der Schwingungen die Saite nicht aus einer und derselben Ebene heraustritt.

*) Man kann hier sogleich bemerken, daß die m — 1 Gleichungen, da nachher m unendlich groß gedacht wird, eigentlich unendlich viele totale Differenzial-Gleichungen sind, und wenn man Vergleichungen anstellen will, so wird man finden, daß dies die Gleichungen sind, welche aus der Parzial-Gleichung

$$\partial^2 y_t = \frac{g\Pi}{Mr}\cdot\partial^2 y_x,$$

die man auf dem anderen Wege erhält, hervorgehen, wenn man in letzterer der Abscisse x nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe gegeben denkt. (Vgl. Anmerk. zu §. 177.)

Es ist nämlich $y_{\mu+1} - 2y_\mu + y_{\mu-1}$ dadurch entstanden, daß man von der Differenz $y_{\mu+1} - y_\mu$ subtrahirte die andere Differenz $y_\mu - y_{\mu-1}$. Diese zweite Differenz geht aber in $\partial^2 y_x$ über, sobald man sich die drei Werthe von y dicht neben einander denkt.

je nachdem $\mu = 1, 2, 3, \cdots m-1$ gedacht wird, während man nicht übersehen darf, daß für jedes t

2) $$y_0 = y_m = 0$$

werden muß.

II. Um nun diese $m-1$ totalen Differenzial-Gleichungen (1.) zu integriren, wendet Lagrange die d'Alembertsche Methode an. Man führe also $m-1$ neue Veränderliche u_1, u_2, u_3, $\cdots u_{m-1}$ dergestalt ein, daß man statt der $m-1$ Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung zweimal $m-1$ Gleichungen der ersten Ordnung erhält, welche gleichzeitig (d. h. ohne daß man vorher die sonst nöthige Elimination der Unbekannten eintreten läßt) integrirt werden können.

III. Zu dem Ende nimmt man die $m-1$ Gleichungen

3) $$\partial(y_\mu) = u_\mu$$

(für $\mu = 1, 2, 3, \cdots m-1$) an, und reducirt dadurch die $m-1$ Gleichungen (1.) sogleich auf

4) $$\partial(u_\mu) = c^2 \cdot (y_{\mu+1} - 2y_\mu + y_{\mu-1}),$$

wenn der Kürze wegen

5) $$\frac{g}{r} \cdot \frac{\Pi}{M} = c^2$$

gesetzt wird, während alle ∂ sich auf die Zeit t beziehen. Diese zweimal $m-1$ Gleichungen (3. und 4.) der ersten Ordnung müssen nun gleichzeitig integrirt werden, um die zweimal $m-1$ Unbekannten y_1, y_2, y_3, $\cdots y_{m-1}$ und u_1, u_2, u_3, u_{m-1} gefunden zu haben, während nach der Annahme (3.) die letzteren Veränderlichen die Geschwindigkeiten der Ecken e, f, g, h, ꝛc. ausdrücken, in der auf AB senkrechten Richtung gedacht.

Man multiplicirt zu dem Ende die letztern $m-1$ Gleichungen (4.) bezüglich mit den unbestimmt gelassenen Faktoren M_1, M_2, M_3, $\cdots M_{m-1}$, die erstern $m-1$ Gleichungen (3.) dagegen bezüglich mit ähnlichen noch unbestimmten Faktoren N_1, N_2, N_3, $\cdots N_{m-1}$, addirt alle zweimal $m-1$ Resultate, und sucht dann die unbestimmt gelassenen Faktoren M und N dergestalt zu bestimmen, daß in der neuen Gleichung

6) $S[M_\mu \cdot \partial u_\mu + N_\mu \cdot \partial y_\mu] = S[N_\mu \cdot u_\mu + M_\mu \cdot c^2 \cdot (y_{\mu+1} - 2y_\mu + y_{\mu-1})]$

(wo S die Summe aller der Glieder vorstellt, welche für $\mu = 1, 2, 3, \cdots m-1$ hervorgehen) der Ausdruck zur Linken der vollständige Differenzial-Koefficient des Ausdrucks zur Rechten wird, so daß, in so fern ∂y_μ statt u_μ geschrieben wird, das erste und das zweite Integral dieser Gleichung sogleich hingeschrieben werden kann. Gelingt es dann die Bestimmung dieser Faktoren M_1, M_2, M_3, rc. und N_1, N_2, N_3, auf $m-1$ verschiedene Arten, aber immer mit gleichem Erfolge statt finden zu lassen, so bekommt man $m-1$ solche Integrale, aus denen dann die $m-1$ Unbekannten y_1, y_2, $\cdots$ y_{m-1} gefunden werden können.

Ordnet man aber rechts (in 6.) nach den verschiedenen y, so geht die Gleichung (6.) sogleich über in

7) $S[M_\mu \cdot \partial u_\mu + N_\mu \cdot \partial y_\mu] = S[N_\mu \cdot u_\mu + c^2 y_\mu (M_{\mu+1} - 2M_\mu + M_{\mu-1})]$,

wo die Summe zur Rechten dieselben Glieder giebt, wie sie die Summe zur Rechten in (6.) ausdrückt.

Nun sieht man aber sogleich, daß wenn man, für jedes $\mu = 1, 2, 3, \cdots m-1$,

8) $$N_\mu = R \cdot M_\mu$$

und

9) $$R \cdot N_\mu = c^2 \cdot (M_{\mu+1} - 2M_\mu + M_{\mu-1})$$

nimmt, wo R noch ganz unbestimmt gelassen ist, — dann die Gleichung (7.) in

10) $$S[M_\mu \cdot (\partial u_\mu + R \cdot \partial y_\mu)] = R \cdot S[M_\mu (u_\mu + R \cdot y_\mu)]$$

übergeht. Wird dann R wie M_μ konstant gedacht, so läßt sich die Gleichung (10.) ohne Weiteres integriren und giebt, weil sie die Form $\partial z = Rz$ hat, sogleich, wenn man im Integral noch ∂y_μ statt u_μ setzt,

11) $$S[M_\mu \cdot (\partial y_\mu + R y_\mu)] = F \cdot e^{Rt},$$

wo F eine willkührliche Konstante ist.

Diese Gleichung (11.) läßt sich aber sogleich noch einmal integriren, wenn man sie mit dem integrirenden Faktor e^{Rt} multiplicirt und dann links und rechts die Integrale nimmt. Man erhält dann

$$12) \quad S[M_\mu \cdot y_\mu] = \frac{F}{2R} \cdot e^{Rt} + G \cdot e^{-Rt},$$

wo G eine zweite willkührliche Konstante ist.

Sucht man nun den Gleichungen (8. und 9.) auf $m-1$ verschiedene Arten zu genügen, so erhält man für diese $m-1$ verschiedenen aber zusammengehörigen Werthe von R, $M_1, M_2, M_3, \cdots M_{m-1}$ (aus 12.) $m-1$ verschiedene Integrale, in welchen man jedoch die Konstanten F und G durch eben so viele verschiedene Buchstaben oder Abzeichen von einander unterscheiden muß, weil sie in jedem dieser Integrale anders seyn können.

Diese $m-1$ verschiedenen Integrale löst man dann, in so fern sie sogenannte einfache algebraische Gleichungen sind, nach den $m-1$ Unbekannten $y_1, y_2, \cdots y_{m-1}$ algebraisch auf, um letztere mit $2(m-1)$ willkührlichen Konstanten gefunden zu haben, während diese Konstanten noch aus den Anfangs-Werthen von $y_1, y_2, \cdots y_{m-1}$ und den Anfangs-Werthen der Geschwindigkeiten $u_1, u_2, \cdots u_{m-1}$ ihre Bestimmung finden werden.

IV. Um nun dieses auszuführen, eliminire man zunächst aus den Gleichungen (8. und 9.) die N_μ, und man erhält

$$13) \quad R^2 \cdot M_\mu = c^2 \cdot (M_{\mu+1} - 2M_\mu + M_{\mu-1}),$$

oder, wenn man

$$14) \quad \frac{R^2}{c^2} + 2 = K$$

setzt, und auch $\mu - 1$ statt μ schreibt,

$$15) \quad M_\mu - K \cdot M_{\mu-1} + M_{\mu-2} = 0.$$

Diese Gleichung (15.) ist der Repräsentant von $m-1$ Gleichungen (für $\mu = 2, 3, \cdots m$). In derselben Gleichung (15.) erscheint aber das dritte Glied zur Linken gar nicht, wenn $\mu = 2$,

und das erste gar nicht, wenn $\mu = m$ ist, weshalb man, damit die Gleichung (15.) eine allgemein gültige Form habe,

16) $$M_0 = 0 \text{ und } M_m = 0$$

voraussetzen muß. Einer der übrigen Koefficienten M_1, M_2, ... M_{m-1} bleibt endlich unbestimmt, weshalb wir noch

17) $$M_1 = 1$$

nehmen wollen. — Die Konstante K (oder R) kann dabei noch immer ganz beliebig genommen werden.

Der Gleichung (15.) kann man nun durch

$$M_\mu = A \cdot z^\mu, \text{ also } M_{\mu-1} = A \cdot z^{\mu-1} \text{ und } M_{\mu-2} = A \cdot z^{\mu-2}$$

zu genügen suchen. Substituirt man aber diese Werthe in die (15.), so geht solche über in

18) $$z^2 - Kz + 1 = 0;$$

und man erhält für z zwei konstante Werthe, welche wir durch z_1 und z_2 bezeichnen wollen. Der Gleichung (15.) genügt also auch die allgemeinere Form

$$M_\mu = A \cdot z_1^\mu + B \cdot z_2^\mu,$$

wenn A und B zwei willkührliche Konstanten, z_1 und z_2 aber die beiden Werthe von z (aus 18.) sind.

Nimmt man nun die Konstanten A und B den Bedingungen gemäß an, daß $M_0 = 0$ und $M_1 = 1$ werden soll, so erhält man zu ihrer Bestimmung (aus der letzten Gleichung):

$$0 = A + B \quad \text{und} \quad 1 = A \cdot z_1 + B \cdot z_2,$$

woraus

$$A = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{z_1 - z_2}$$

hervorgeht, so daß man

19) $$M_\mu = \frac{z_1^\mu - z_2^\mu}{z_1 - z_2}$$

nehmen kann, während K oder R, wovon die Werthe von z_1 und z_2 abhängen, noch immer ganz unbestimmt bleiben. Weil aber $M_m = 0$ werden muß (nach 16.), so hat man noch

$$20) \qquad M_m = \frac{z_1^m - z_2^m}{z_1 - z_2} = 0,$$

wodurch K, also auch (aus 18.) z_1 und z_2 bestimmt sind.

Weil jedoch $\frac{z_1^m - z_2^m}{z_1 - z_2}$ als eine ganze Funktion von z_1 gedacht, sich in $m-1$ einfache Faktoren zerlegen läßt, so kann man der Gleichung (20.) auf $m-1$ verschiedene Arten genügen; also hat K, demnach haben auch z_1 und z_2, folglich auch M_μ (aus 19.) $m-1$ verschiedene Werthe, gerade wie man es wünschen mußte, damit das Integral (12.) $m-1$ verschiedene Integrale liefere.

Lagrange zerlegt nun $z_1^m - z_2^m$ vermöge des Theorems des Cotes in seine Faktoren, was wir in der neuern Zeit so machen, daß wir $z_1^m - z_2^m = 0$ setzen, daraus alle Werthe von z_1, nämlich $z_2 \cdot \sqrt[m]{1}$ finden, welche dieser Gleichung genügen, zuletzt aber diese Werthe selbst wieder von z_1 subtrahiren. Die gesuchten Faktoren von $z_1^m - z_2^m$ sind daher alle enthalten in der Formel

$$z_1 - z_2 \cdot \sqrt[m]{1},$$

sobald wir nur statt $\sqrt[m]{1}$ alle ihre m Werthe setzen, welche aus der Formel

$$\cos \frac{2b\pi}{m} + i \cdot \sin \frac{2b\pi}{m}$$

dadurch hervorgehen, daß man statt b nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, ꝛc. setzt, sobald man nur unter i die $\sqrt{-1}$ versteht. Man findet also aus (20.), wenn man $z_1 = z_2$ wegläßt, weil die Gleichung (20.) den Divisor $z_1 - z_2$ hat,

$$z_1 = z_2 \cdot \left(\cos \frac{2\nu\pi}{m} + i \cdot \sin \frac{2\nu\pi}{m}\right),$$

wo statt ν nach und nach 1, 2, 3, ... $m-1$ gesetzt werden muß. Verbindet man mit dieser Gleichung die beiden andern (aus 18. hervorgehenden), nämlich

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \quad \text{und} \quad z_1 + z_2 = K,$$

so erhält man

$$21)\quad \begin{cases} z_1 = \cos\frac{\nu\pi}{m} + i\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}, \\ z_2 = \cos\frac{\nu\pi}{m} - i\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}; \end{cases}$$

folglich

$$22)\qquad K = 2\cos\frac{\nu\pi}{m},$$

woraus (vermöge der 14.)

$$23)\qquad R = 2c\cdot i\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}$$

hervorgeht. Aus (21.) folgt dann noch

$$z_1^{\mu} = \cos\frac{\mu\nu\pi}{m} + i\cdot\sin\frac{\mu\nu\pi}{m},$$

$$z_2^{\mu} = \cos\frac{\mu\nu\pi}{m} - i\cdot\sin\frac{\mu\nu\mu}{m},$$

so daß die (19.) liefert

$$24)\qquad M_{\mu} = \frac{\sin\frac{\mu\nu\pi}{m}}{\sin\frac{\nu\pi}{m}},$$

welche Gleichung für jeden Werth von μ (der jedesmal einer der m—1 Werthe 1, 2, 3, ... m—1 seyn kann) m—1 verschiedene Werthe liefert, je nachdem man statt ν entweder 1, oder 2, 3, bis m—1 setzt*).

---

*) Dachte man, nachdem die Gleichung (15.) entwickelt war, an die bekannten Formeln

$$\cos\mu\varphi = 2\cos\varphi\cdot\cos(\mu-1)\varphi - \cos(\mu-2)\varphi,$$
$$\sin\mu\varphi = 2\cos\varphi\cdot\sin(\mu-1)\varphi - \sin(\mu-2)\varphi,$$

so konnte man sogleich

$$K = 2\cos\varphi \text{ und } M_{\mu} = A\cdot\cos\mu\varphi + B\cdot\sin\mu\varphi$$

nehmen, und φ, so wie A und B, noch den übrigen Zwecken gemäß, näher zu bestimmen suchen. Weil aber $M_0 = 0$ ist und $M_1 = 1$ genommen worden, so hatte man $A = 0$ und $B = \frac{1}{\sin\varphi}$, also

$$M_{\mu} = \frac{\sin\mu\varphi}{\sin\varphi}.$$

Setzen wir diesen Werth statt M_μ in das Integral (12.), so erhalten wir, wenn man noch mit $\sin\frac{\nu\pi}{m}$ wegmultiplicirt, und wenn man bemerkt, daß

$$e^{\pm Rt} = \cos\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right) \pm i\cdot\sin\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)$$

wird,

25) $$S\left[y_\mu\cdot\sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] =$$

$$\frac{F_\nu\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}}{4c\cdot i\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}}\cdot\left[\cos\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)+i\cdot\sin\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)\right]$$

$$+G_\nu\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}\cdot\left[\cos\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)-i\cdot\sin\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)\right],$$

wo links das Summen-Zeichen S sich auf alle, für $\mu = 1, 2, 3, \cdots m-1$ hervorgehenden Glieder bezieht.

Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man noch zwischen den Geschwindigkeiten $u_1, u_2, \cdots u_{m-1}$ diese neue Gleichung

26) $$S\left[u_\mu\cdot\sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] =$$

$$\frac{F_\nu\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}}{2}\cdot\left[\cos\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)+i\cdot\sin\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)\right]$$

$$+\frac{G_\nu\cdot 2c\sin\frac{\nu\pi}{2m}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{m}}{i}\cdot\left[\cos\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)-i\cdot\sin\left(2ct\cdot\sin\frac{\nu\pi}{2m}\right)\right].$$

Sollte zuletzt auch noch $M_m = 0$ werden, so hatte man noch $\sin m\varphi = 0$, d. h.

$$m\varphi = \nu\pi,$$

also

$$\varphi = \frac{\nu\pi}{m},$$

wo ν Null und jede ganze Zahl vorstellt, wo man aber bloß $\nu = 1, 2, 3,$ bis $m-1$ zu nehmen braucht, weil M_μ nur $m-1$ Werthe haben soll, und φ nicht Null werden kann, weil sonst der Nenner von M_μ der Null gleich seyn würde.

Bezeichnet man die für $t = 0$ hervorgehenden konstanten Werthe dieser Ausdrücke (in 25. und 26.) zur Linken (oder zur Rechten) bezüglich durch P_ν und Q_ν, so hat man

$$\frac{F_\nu \cdot \sin\frac{\nu\pi}{m}}{4c \cdot i \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}} + G_\nu \cdot \sin\frac{\nu\pi}{m} = P_\nu$$

und

$$\tfrac{1}{2}F_\nu \cdot \sin\frac{\nu\pi}{m} - 2i \cdot G_\nu \cdot c \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m} \cdot \sin\frac{\nu\pi}{m} = Q_\nu;$$

und daraus, wenn man die erstere dieser Gleichungen mit $2ci \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}$ multiplicirt, und dann beide Gleichungen zu einander addirt oder von einander subtrahirt,

$$F_\nu = \frac{Q_\nu + 2i \cdot P_\nu \cdot c \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}}{\sin\frac{\nu\pi}{m}}$$

und

$$G_\nu = \frac{P_\nu}{\sin\frac{\nu\pi}{m}} - \frac{Q_\nu}{2i \cdot c \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m} \cdot \sin\frac{\nu\pi}{m}},$$

Setzt man aber diese Werthe von F_ν und G_ν (in 25.) und ordnet man das Ganze rechts noch etwas anders, so erhält man

$$27)\quad S\left[y_\mu \cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] = P_\nu \cdot \cos\left(2ct \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}\right) + \frac{Q_\nu}{2c \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}} \cdot \sin\left(2ct \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}\right),$$

wo P_ν und Q_ν die konstanten Werthe sind, welche bezüglich die Summe

$$S\left[y_\mu \cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] \quad \text{und} \quad S\left[u_\mu \cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right]$$

annehmen, so oft in ihnen Null statt t gesetzt wird.

V.

V. Diese Gleichung (27.), in welcher das Summen-Zeichen S auf die für $\mu = 1, 2, 3, \cdots m-1$ hervorgehenden Glieder sich bezieht, ist übrigens der Repräsentant von $m-1$ solchen Gleichungen, welche man erhält, wenn man in ihr statt ν links und rechts nach und nach die Werthe $1, 2, 3, \ldots m-1$ substituirt. Bezeichnet man nämlich den Ausdruck zur Rechten in (27.) der Kürze wegen durch S_ν, so daß man hat

$$28)\quad P_\nu \cdot \cos\left(2ct \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}\right) + \frac{Q_\nu}{2c \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}} \cdot \sin\left(2ct \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2m}\right) = S_\nu,$$

so sind diese $m-1$ Gleichungen die nachstehenden:

$$\begin{cases} S\left[y_\mu \cdot \sin\frac{\mu\pi}{m}\right] = S_1, \\ S\left[y_\mu \cdot \sin\frac{2\mu\pi}{m}\right] = S_2, \\ S\left[y_\mu \cdot \sin\frac{3\mu\pi}{m}\right] = S_3, \\ \vdots \\ S\left[y_\mu \cdot \sin\frac{(m-1)\mu\pi}{m}\right] = S_{m-1}. \end{cases}$$

Um nun diese $m-1$ Gleichungen algebraisch aufzulösen, bedient sich Lagrange wiederum der sogenannten Bezoutschen oder französischen Eliminations-Methode. Man multiplicirt nämlich jede der $m-1$ Gleichungen bezüglich mit den unbestimmten Faktoren $D_1, D_2, D_3, \cdots D_{m-1}$ (wo $D_1 = 1$ gedacht werden kann), addirt die $m-1$ erhaltenen Gleichungen, setzt dann in dem End-Resultate je $m-2$ der Koefficienten von $y_1, y_2, \cdots y_{m-1}$ der Null gleich, woraus sich jedesmal $D_2, D_3, \cdots D_{m-1}$ bestimmen, und erhält denjenigen der Unbekannten $y_1, y_2, y_3, \cdots y_{m-1}$, dessen Koefficient nicht = Null gesetzt worden ist; also nach und nach einen nach dem andern.

Führt man aber die Multiplication und die Addition wirklich aus, so erhält man

$$29) \qquad S\left[D_\alpha \cdot y_\mu \cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right] = S\left[D_\alpha \cdot S_\alpha\right],$$

wo links dem μ nach und nach alle Werthe beigelegt werden, welche μ haben kann, nämlich 1, 2, 3, ⋯ bis $m-1$, während für jeden bestimmten Werth von μ, wiederum dem α alle Werthe gegeben werden müssen, welche 1, 2, 3, ⋯ $m-1$ sind, so daß man $m-1$ Glieder hat, während der Koefficient in jedem Gliede wiederum aus $m-1$ Gliedern besteht. Das Summen-Zeichen S zur Rechten bezieht sich auf alle für $\alpha = 1$, 2, 3, ⋯ $m-1$ hervorgehenden Glieder.

Setzt man nun zur Bestimmung der $m-2$ unbestimmten Koefficienten D_2, D_3, ⋯ D_{m-1} eine Anzahl $m-2$ dieser Koefficienten von y_μ der Null gleich, nämlich:

$$30) \qquad S\left[D_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\lambda\pi}{m}\right] = 0,$$

für jeden Werth 1, 2, 3, ⋯ $m-1$ von λ, der nicht gerade ein bestimmter Werth μ ist (wobei sich das Summenzeichen S zur Linken, auf alle für $\alpha = 1$, 2, 3, ⋯ $m-1$ hervorgehenden Glieder bezieht), so hat man (aus 29.), weil nun zur Linken bloß das mit y_μ afficirte Glied übrig bleibt, wo μ irgend einen bestimmten seiner Werthe hat,

$$31) \qquad y_\mu = \frac{S\left[D_\alpha \cdot S_\alpha\right]}{S\left[D_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right]},$$

wo rechts die Summen-Zeichen S sich auf alle Glieder beziehen, welche für $\alpha = 1$, 2, 3, ⋯ $m-1$ hervorgehen; während μ nach und nach jeder der Werthe 1, 2, 3, ⋯ $m-1$ seyn kann, so daß die Gleichung (31.) alle y_1, y_2, y_3, ⋯ y_{m-1} liefert. Man darf nur dabei nicht übersehen, daß die eine der $m-2$ Gleichungen (30.) eine andere wird, als vorher, so oft man statt μ einen andern Werth setzt, daß also auch für jeden anders gedachten Werth von μ die Werthe der $m-2$ Koefficienten D_2, D_3, ⋯ D_{m-1} sich ändern.

VI. Alles kommt nun darauf an, aus den $m-2$ (in 30. enthaltenen) Gleichungen, für je $m-2$ der Werthe, die λ haben kann, die $m-2$ Unbekannten, D_2, D_3, D_{m-1} wirklich zu finden. — Lagrange macht bei dieser Gelegenheit bemerkenswerthe Schlüsse, um diesen Zweck zu erreichen. Er denkt sich nämlich jeden Sinus der vielfachen Bogen in eine nach Potenzen des Kosinus des einfachen Bogen fortlaufende (endliche) Reihe entwikkelt (bei welcher Reihe jedoch alle Glieder mit $sin\frac{\lambda\pi}{m}$ noch multiplicirt erscheinen). Dadurch formt er jede der Gleichungen (30.) so um, daß, wenn man sie noch durch den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor $sin\frac{\lambda\pi}{m}$ dividirt, solche lauter nach Potenzen von $cos\frac{\lambda\pi}{m}$ geordnete Glieder enthält, deren Koefficienten aus D_2, D_3, ... D_{m-1} zusammengesetzt seyn, aber kein λ enthalten können, während die höchste dieser Potenzen die $(m-2)$te ist.

Setzt man daher in jeder dieser $m-2$ Gleichungen (für die $m-2$ Werthe, welche λ haben kann) allemal einen ganz fremden Buchstaben z statt $cos\frac{\lambda\pi}{m}$ (d. h. in der erstern statt $cos\frac{\pi}{m}$, in der zweiten statt $cos\frac{2\pi}{m}$, u. s. w. f.), so erhält man in jeder Gleichung auf der einen Seite eine und dieselbe ganze Funktion von z vom $m-2$ten Grade, welche wir durch

$$32)\quad L\cdot z^{m-2}+L_1\cdot z^{m-3}+\cdots L_{m-3}\cdot z+L_{m-2} \quad \cdots (Z)$$

bezeichnen wollen, und welche Null wird, so oft man statt z einen der $m-2$ Werthe von $cos\frac{\lambda\pi}{m}$ setzt, für die $m-2$ Werthe, die λ haben soll. Diese ganze Funktion (Z) läßt sich daher in die $(m-2)$ Faktoren $z-cos\frac{\pi}{m}$, $z-cos\frac{2\pi}{m}$, $z-cos\frac{3\pi}{m}$, ... $z-cos\frac{(m-1)\pi}{m}$, mit Ausnahme des Faktors $z-cos\frac{\mu\pi}{m}$ zerle-

gen. Multiplicirt man solche aber noch mit $z - \cos\frac{\mu\pi}{m}$, so erhält man eine andere ganze Funktion von z vom (m — 1)ten Grade, welche $= Z\cdot\left(z - \cos\frac{\mu\pi}{m}\right)$ ist. Letztere hat dann alle eben gedachten Faktoren, so daß man die (nach z) identische Gleichung hat,

$$33)\quad Z\cdot\left(z - \cos\frac{\mu\pi}{m}\right) =$$

$$L\left(z - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(z - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(z - \cos\frac{3\pi}{m}\right)\cdots\left(z - \cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right),$$

welche gilt, man mag statt z setzen was man nur immer will, sobald nur die links in Z vorkommenden D_2, D_3, D_{m-1} die von uns gesuchten Werthe haben. Dabei ist aber Z das, was aus $\frac{S\left[D_\alpha\cdot\sin\frac{\alpha\lambda\pi}{m}\right]}{\sin\frac{\lambda\pi}{m}}$ hervorgeht, wenn man diesen Quotienten nach Potenzen von $\cos\frac{\lambda\pi}{m}$ entwickelt und zuletzt z statt $\cos\frac{\lambda\pi}{m}$ schreibt; also ist auch Z das, was aus

$$\frac{S\left[D_\alpha\cdot\sin\frac{\alpha s\pi}{m}\right]}{\sin\frac{s\pi}{m}}$$

wird, wenn man denselben Ausdruck nach Potenzen von $\cos\frac{s\pi}{m}$ entwickelt und zuletzt z statt $\cos\frac{s\pi}{m}$ setzt, wo s ganz unbestimmt und allgemein gedacht ist. Setzt man daher in der identischen Gleichung (33.) links und rechts statt z jetzt $\cos\frac{s\pi}{m}$, wo s ganz allgemein, also ganz beliebig gedacht ist, so erhält man die identische Gleichung

$$34)\quad S\left[D_\alpha\cdot sin\frac{\alpha s\pi}{m}\right]\cdot\frac{cos\frac{s\pi}{m}-cos\frac{\mu\pi}{m}}{sin\frac{s\pi}{m}} =$$

$$L\left(cos\frac{s\pi}{m}-cos\frac{\pi}{m}\right)\cdot\left(cos\frac{s\pi}{m}-cos\frac{2\pi}{m}\right)\cdots\left(cos\frac{s\pi}{m}-cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right),$$

welche zur Rechten $m-1$ Faktoren hat, und welche gilt, man mag statt s setzen, was man nur immer will, unter der Voraussetzung jedoch, daß D_2, D_3, ⋯ D_{m-1}, die aus den $m-2$ Gleichungen (30.) gesuchten Werthe haben. Das Summen-Zeichen S zur Linken, bezieht sich dabei auf alle für $\alpha = 1, 2, 3, \cdots m-1$ hervorgehenden Glieder.

Formt man nun das Produkt rechts wiederum in eine ganze Funktion von $cos\frac{s\pi}{m}$ um, so muß herauskommen was links steht, und diese Vergleichung wird uns die einfachen Gleichungen liefern, aus welchen dann die D_2, D_3, ⋯ D_{m-1} sich leicht ergeben.

Daß Produkt aller eben gedachten $m-1$ Faktoren (in 34. zur Rechten) findet man aber aus dem Lehrsatze des Cotes, d. h. aus der Gleichung

$$\frac{p^{2m}-q^{2m}}{p^2-q^2} = \left(p^2-2pq\cdot cos\frac{\pi}{m}+q^2\right)\left(p^2-2pq\cdot cos\frac{2\pi}{m}+q^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(p^2-2pq\cdot cos\frac{(m-1)\pi}{m}+q^2\right),$$

wenn man in dieser Gleichung

$$p^2+q^2 = cos\frac{s\pi}{m} \qquad \text{und} \qquad 2pq = 1$$

setzt, in so fern dann das Produkt rechts gerade unser umzuformendes Produkt ist. Diese letzteren beiden Gleichungen geben aber sogleich

$$p = \frac{cos\frac{s\pi}{2m}+i\cdot sin\frac{s\pi}{2m}}{\sqrt{2}} \text{ und } q = \frac{cos\frac{s\pi}{2m}-i\cdot sin\frac{s\pi}{2m}}{\sqrt{2}},$$

so daß

$$p^2 = \tfrac{1}{2}\left(cos\frac{s\pi}{m} + i \cdot sin\frac{s\pi}{m}\right)$$

und

$$q^2 = \tfrac{1}{2}\left(cos\frac{s\pi}{m} - i \cdot sin\frac{s\pi}{m}\right),$$

auch

$$p^{2m} = \frac{cos\, s\pi + i \cdot sin\, s\pi}{2^m} \text{ und } q^{2m} = \frac{cos\, s\pi - i \cdot sin\, s\pi}{2^m},$$

also zuletzt

$$\frac{p^{2m} - q^{2m}}{p^2 - q^2} = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{sin\, s\pi}{sin\frac{s\pi}{m}}$$

sich findet. Die Gleichung (34.) geht aber dadurch über, wenn man noch mit $sin\frac{s\pi}{m}$ wegmultiplicirt, in

$$35) \quad \left(cos\frac{s\pi}{m} - cos\frac{\mu\pi}{m}\right) \cdot S\left[D_\alpha \cdot sin\frac{\alpha s\pi}{m}\right] = \frac{L}{2^{m-1}} \cdot sin\, s\pi;$$

und diese gilt, man mag statt s setzen was man nur immer will, wenn nur unter D_2, D_3, D_{m-1} die aus den $m-2$ Gleichungen (30.) gesuchten Werthe verstanden werden. Das Summen-Zeichen S zur Linken bezieht sich dabei auf alle für $\alpha = 1, 2, 3, \cdots m-1$ hervorgehenden Glieder.

Lagrange multiplicirt nun links (in 35.) wirklich mit dem Faktor $cos\frac{s\pi}{m} - cos\frac{\mu\pi}{m}$, verwandelt die Produkte aus Sinus und Kosinus, in lauter Sinus, ordnet alle Resultate nach Sinus der vielfachen Bogen, multiplicirt die Gleichung mit 2 und erhält eine Gleichung von der Form

$$36) \quad K_1 \cdot sin\frac{s\pi}{m} + K_2 \cdot sin\frac{2s\pi}{m} + K_3 \cdot sin\frac{3s\pi}{m} + \cdots$$
$$+ K_{m-1} \cdot sin\frac{(m-1)s\pi}{m} + K_m \cdot sin\, s\pi = \frac{L}{2^{m-2}} \cdot sin\, s\pi,$$

während, wenn man unter D_0 und D_m die Null sich denkt, für jede ganze Zahl γ, welche nicht größer als $m-1$ ist,

$$K_\gamma = D_{\gamma+1} - 2D_\gamma \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_{\gamma-1}$$

sich ausrechnet, und $K_m = D_{m-1}$ sich findet. Lagrange schließt nun weiter: Weil die Gleichung (36.) für jedes beliebige s identisch werden muß, so müssen auch die einzelnen Koefficienten K_1, K_2, bis K_{m-1} der Null gleich werden, und zuletzt muß der letzte K_m dem $\frac{L}{2^{m-1}}$ auf der rechten Seite gleich seyn, weil beide mit demselben $\sin s\pi$ afficirt sind. So erhält man die m Gleichungen

$$37)\quad \left\{\begin{aligned} D_2 - 2D_1 \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_0 &= 0,\\ D_3 - 2D_2 \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_1 &= 0,\\ D_4 - 2D_3 \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_2 &= 0,\\ &\vdots\\ D_{m-1} - 2D_{m-2} \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_{m-3} &= 0,\\ D_m - 2D_{m-1} \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_{m-2} &= 0,\\ D_{m-1} &= \frac{L}{2^{m-2}}; \end{aligned}\right.$$

sobald nur D_0 und D_m der Null gleich gedacht werden, in so fern nämlich in der Rechnung diese Glieder gar nicht erscheinen.

Und weil $D_1 = 1$ vorausgesetzt worden ist, so geben die erstern m — 2 dieser Gleichungen die m — 2 Unbekannten D_2, D_3, ... D_{m-1}, während die mte Gleichung L liefert, die m—1te aber, nämlich

$$-2D_{m-1} \cdot \cos\frac{\mu\pi}{m} + D_{m-2} = 0,$$

durch die gefundenen Werthe bereits identisch werden muß, wenn solche keinen Widerspruch enthalten soll.

Die erstern m — 1 der Gleichungen (37.) haben aber alle die Form

$$38) \qquad D_\gamma - 2D_{\gamma-1}\cdot cos\frac{\mu\pi}{m} + D_{\gamma-2} = 0.$$

Weil dies eine mit der Gleichung (15.) ganz analoge ist, ja weil sogar hier auch

$$D_0 = 0, \quad D_m = 0 \quad \text{und} \quad D_1 = 1,$$

(wie dort $M_0 = 0$, $M_m = 0$ und $M_1 = 1$ gewesen ist) so findet man hier sogleich (aus 38.) auf jenem Wege

$$39) \qquad D_\gamma = \frac{sin\frac{\gamma\mu\pi}{m}}{sin\frac{\mu\pi}{m}} \; ^*).$$

Dieser Werth von D_γ genügt wirklich auch der nächsten (m—1ten) der Gleichungen (37.) und die letzte (mte) derselben Gleichungen giebt zuletzt noch, weil $\frac{(m-1)\mu\pi}{m} = \mu\pi - \frac{\mu\pi}{m}$ ist, so daß $sin\frac{(m-1)\mu\pi}{m} = (-1)^{\mu+1}\cdot sin\frac{\mu\pi}{m}$ wird,

$$\frac{sin\frac{(m-1)\mu\pi}{m}}{sin\frac{\mu\pi}{m}} = \frac{L}{2^{m-2}}, \text{ d. h. } (-1)^{\mu+1} = \frac{L}{2^{m-2}},$$

also

$$40) \qquad L = (-1)^{\mu+1}\cdot 2^{m-2}.$$

VII. Hat man aber nun (in 39.) die Werthe D_2, D_3, ... D_{m-1}, (aus den Gleichungen 30.) gefunden, so giebt die Gleichung (31.) sogleich y_μ dazu. Um jedoch diesen Werth von y_μ einfacher ausdrücken zu können, entwickelt Lagrange aus der Gleichung (35.) noch mehrere trigonometrische Relationen. Er

---

*) Man setzt wieder $D_\gamma = A\cdot cos\gamma\varphi + B\cdot sin\gamma\varphi$, hat für $s = 0$ und $s = 1$, $D_0 = 0 = A$, $D_1 = 1 = B\cdot sin\varphi$, also $B = \frac{1}{sin\varphi}$; endlich wegen $D_m = 0$ noch $0 = B\cdot sin m\varphi$, also $sin m\varphi = 0$, d. h. $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$, wo μ das in der Gleichung (38.) vorkommende μ seyn muß, weil sonst der Gleichung (38.) nicht genügt würde.

setzt nämlich (in 35.) statt D_α seinen Werth (aus 39.) und hat sogleich, wenn mit $\cos\frac{s\pi}{m} - \cos\frac{\mu\pi}{m}$ dividirt wird,

$$41)\quad S\left[\sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\cdot\sin\frac{\alpha s\pi}{m}\right] = (-1)^{\mu+1}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin s\pi\cdot\sin\frac{\mu\pi}{m}}{\cos\frac{s\pi}{m} - \cos\frac{\mu\pi}{m}},$$

wo statt s alles denkbare gesetzt werden kann. Setzt man aber $s = \mu$, so erhält man rechts $\frac{0}{0}$; und diesen Werth von $\frac{0}{0}$ findet man auf dem gewöhnlichen Wege, $= m\cdot(-1)^{\mu+1}$ (dadurch daß man Zähler und Nenner des Ausdrucks zur Rechten in 14. nach s differenziirt, dann aber wiederum μ statt s setzt, und in so fern zuletzt

$$\cos\mu\pi = (-1)^\mu$$

genommen werden muß), so daß man erhält

$$42)\quad S\left[\sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\cdot\sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right] = \frac{m}{2},$$

wo sich überall das Summen-Zeichen S auf alle für $\alpha = 1, 2, 3, \cdots m-1$ hervorgehenden Glieder bezieht.

Die Gleichung (31.) geht daher mittelst der Werthe von $D_2, D_3, \cdots$ (aus 39.) und mittelst der Relation (42.) über in

$$43)\quad y_\mu = \frac{2}{m}\times S\left[S_\alpha\cdot\sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right],$$

oder, wenn statt S_α dessen Bedeutung gesetzt wird (aus 28.),

$$44)\quad y_\mu = \frac{2}{m}\cdot S\left[P_\alpha\cdot\cos\left(2ct\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{2m}\right)\times\sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right]$$
$$+\frac{1}{cm}\cdot S\left[\frac{Q_\alpha\cdot\sin\left(2ct\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{2m}\right)\times\sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}}{\sin\frac{\alpha\pi}{2m}}\right],$$

wo sich die Summen-Zeichen S auf alle m — 1 für $\alpha = 1, 2, 3, 4, \cdots m-1$ hervorgehenden Glieder beziehen.

VIII. Hat man aber nun y_μ gefunden für jeden der Werthe $1, 2, 3, \cdots m-1$, den man statt μ immer setzen mag, so

hat man den Abstand der Ecken von der Geraden AB, wie solcher zu Ende einer jeden Zeit t seyn wird, sobald die 2(m—1) Konstanten P_1, P_2, ꝛc. Q_1, Q_2, ꝛc. bestimmt seyn werden.

Differenziirt man aber die Formel (44.) nach allem t, so erhält man die Geschwindigkeit ∂y_μ oder u_μ einer jeden Ecke, nämlich:

$$45)\quad u_\mu = -\frac{4c}{m}\cdot S\left[P_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\pi}{2m}\cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\cdot \sin\left(2ct\cdot \sin\frac{\alpha\pi}{2m}\right)\right] + \frac{2}{m}\cdot S\left[Q_\alpha\cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\cdot \cos\left(2ct\cdot \sin\frac{\alpha\pi}{2m}\right)\right].$$

Setzt man aber in (44.) und (45.) t = 0, und zu gleicher Zeit 1, 2, 3, ⋯ m—1 statt μ, so hat man 2(m—1) Gleichungen, in welchen links die m—1 Anfangs-Ordinaten und die m—1 Anfangs-Geschwindigkeiten der Ecken vorkommen. Aus diesen 2(m—1) Gleichungen werden also dann die 2(m—1) Konstanten P_1, P_2, ꝛc. und Q_1, Q_2, ꝛc. vollends bestimmt.

Bezeichnet man nämlich die Anfangs-Werthe von y und u durch Y und U, so werden die letztgedachten Gleichungen die nachstehenden, nämlich:

$$46)\qquad Y_\mu = \frac{2}{m}\cdot S\left[P_\alpha\cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right]$$

und

$$47)\qquad U_\mu = \frac{2}{m}\cdot S\left[Q_\alpha\cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right].$$

Nimmt man aber die Relationen (41. und 42.) zu Hülfe, nach welchen, wenn dort μ statt α, dagegen α statt μ, und ν statt s gesetzt wird,

$$48)\quad S\left[\sin\frac{\mu\alpha\pi}{m}\cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] \left\{\begin{matrix} = 0 \text{ oder} \\ = \tfrac{1}{2}m \end{matrix}\right\} \text{ ist, je nachdem}$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha \text{ verschieden von } \nu \\ \text{oder} \\ \alpha = \nu \end{matrix}\right\}$$

gedacht wird, so lange nur α und ν positive ganze Zahlen sind, und das Summen-Zeichen S sich auf alle für μ = 1, 2, 3, ⋯ m—1 hervorgehenden Glieder erstreckt, — so kann man diese

Gleichungen (46. und 47.) nach den 2(m—1) Unbekannten P_α und Q_α leicht auflösen. Man multiplicirt nämlich die m—1 Gleichungen (46.) bezüglich mit $\sin\frac{\nu\pi}{m}$, $\sin\frac{2\nu\pi}{m}$, ꝛc. $\sin\frac{\mu\nu\pi}{m}$, ... $\sin\frac{(m-1)\nu\pi}{m}$, wo ν irgend eine positive ganze Zahl seyn mag, und addirt alle Resultate; dann erhält man

$$S\left[Y_\mu \cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] = \frac{2}{m} \cdot S\left[P_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m} \cdot \sin\frac{\nu\mu\pi}{m}\right],$$

wo sich das Summen-Zeichen S zur Linken auf alle für $\mu = 1$, 2, 3, ... m—1 hervorgehenden Glieder bezieht, während zur Rechten statt α nach und nach 1, 2, 3, 4, ... m—1 und für jeden einzelnen dieser Werthe auch noch statt μ die Werthe 1, 2, 3, ... m—1 gesetzt, zuletzt aber alle m—1 mal m—1 Glieder addirt gedacht werden müssen. Nun sind aber rechts die einzelnen Koefficienten von P_α für jeden bestimmten Werth von α, $= S\left[\sin\frac{\mu\alpha\pi}{m} \cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right]$, wo sich das Summen-Zeichen S auf alle für $\mu = 1, 2, 3, \ldots m-1$ hervorgehenden Glieder bezieht; folglich (nach 48.) allemal der Null gleich, so oft α von ν verschieden ist, und $= \frac{m}{2}$, so oft $\alpha = \nu$ ist. Also hat man

$$49)\quad S\left[Y_\mu \cdot \sin\frac{\mu\nu\pi}{m}\right] = P_\nu \quad \text{oder} \quad S\left[Y_\mu \cdot \sin\frac{\mu\alpha\pi}{m}\right] = P_\alpha,$$

wenn die Summen-Zeichen S sich auf alle für $\mu = 1, 2, 3, \ldots m-1$ hervorgehenden Glieder beziehen. Ganz auf demselben Wege findet man

$$50)\quad S\left[U_\mu \cdot \sin\frac{\mu\alpha\pi}{m}\right] = Q_\alpha$$

für jeden bestimmten Werth von α und wenn links das Summen-Zeichen S sich über alle Glieder erstreckt, welche für $\mu = 1$, 2, 3, ... m—1 hervorgehen.

IX. Hat aber Lagrange auf diese Weise das Anfangs sich gegebene Problem, in welchem nur m — 1 Ecken der Saite beweglich sind, vollständig gelöst, so kommt jetzt alles darauf an, den Uebergang für den Fall nachzuweisen, wo m unendlich groß gedacht wird, weil nur dieser Fall derjenige der schwingenden Saite ist. Wir theilen das diesem Zwecke entsprechende Verfahren des Lagrange hier folgend mit, ohne jedoch solches vertreten zu wollen. Auch sind ihm deshalb Einwendungen gleich nach dem Erscheinen seiner Abhandlung gemacht worden, so daß er sich veranlaßt gesehen hat, theils sein Verfahren zu rechtfertigen, theils aber diesen Uebergang selbst zurückzunehmen, und dieselbe Aufgabe gleich von vorne herein so zu behandeln, wie wenn m unendlich groß ist. Dieses letztere Verfahren findet sich in Anmerk. 1. noch etwas näher beschrieben. Hier der Uebergang, wenn m = ∞ gedacht wird.

Zuvörderst bemerkt Lagrange, daß man, wenn m unendlich groß ist, $sin\frac{\alpha\pi}{2m} = \frac{\alpha\pi}{2m}$ nehmen könne, weil die Bogen $\frac{\alpha\pi}{2m}$ nun unendlich klein seyen*). Aus (44. u. 45.) erhält man daher nun, wenn m = ∞,

$$y_\mu = \frac{2}{m}\cdot S\left[P_\alpha\cdot cos\frac{\alpha c\pi t}{m}\cdot sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right] + \frac{2}{c\pi}\cdot S\left[\frac{1}{\alpha}\cdot Q_\alpha\cdot sin\frac{\alpha c\pi t}{m}\cdot sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right]$$

*) In den Formeln (44. u. 45.) muß statt α nach und nach 1, 2, 3, ... bis m — 1 gesetzt werden, also wird auch α unendlich groß. Daher ist zuletzt $\frac{\alpha\pi}{2m}$ nicht immer unendlich klein. Dies ist der erste Einwand, den man machen kann, und welchen d'Alembert gemacht hat. Lagrange hat jedoch darauf geantwortet und nachgewiesen, daß wenn man von einer frühern Stelle (23.) ab, wo $R = 2c\cdot i\cdot sin\frac{\nu\pi}{2m}$ gefunden worden ist, sich m bereits unendlich groß denkt, und unter dieser Voraussetzung die folgenden Rechnungen durchführt, dann statt $sin\frac{\alpha\pi}{2m}$ sogleich nur der Bogen $\frac{\alpha\pi}{2m}$ erscheint. Dadurch ist wenigstens die Richtigkeit des obigen Resultats, wenn auch nicht die, des dabei gemachten Schlusses außer Zweifel gestellt.

und

$$u_\mu = -\frac{2c\pi}{m^2}\cdot S\left[\alpha\cdot P_\alpha\cdot \sin\frac{\alpha c\pi t}{m}\cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right]$$
$$+\frac{2}{m}\cdot S\left[Q_\alpha\cdot \cos\frac{\alpha c\pi t}{m}\cdot \sin\frac{\alpha\mu\pi}{m}\right],$$

wo statt α nach und nach alle ganzen Zahlen bis $m-1$, d. h. bis in's Unendliche gesetzt werden müssen, so daß man zur Rechten, in jeder dieser Formeln, zwei unendliche Reihen hat.

Nun setzt Lagrange die Länge $AB = a$, die Masse der ganzen Saite $= p$ (durch das Gewicht gegeben), während früher die Masse an einer Ecke $= M$ (ebenfalls durch das Gewicht gegeben) gesetzt worden war, und hat nun

$$m = \frac{p}{M} \text{ und auch } m = \frac{a}{r}.$$

Weil aber (in 5.) $c^2 = \frac{g\Pi}{Mr}$ gesetzt worden ist, so wird, wenn man statt r seinen jetzigen Werth $\frac{aM}{p}$ substituirt,

$$c^2 = \frac{g\Pi p}{M^2 a}.$$

Folglich wird nun auch

$$\frac{c}{m} = \frac{1}{Mm}\cdot\sqrt{\left(\frac{g\Pi p}{a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{g\Pi}{ap}\right)} = H,$$

wenn man diesen Ausdruck $\sqrt{\left(\frac{g\Pi}{ap}\right)}$ berechnet, und das was herauskommt, durch H bezeichnet.

Man denke sich nun x so, daß

$$x:a = \mu:m, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{mx}{a}$$

ist. Ferner setze man dX statt r, so daß $m = \frac{a}{dX}$ gesetzt werden kann. Dann gehen die für y_μ und u_μ zuletzt erhaltenen Resultate, wenn man unter y und u bezüglich die zur Abscisse x gehörige Ordinate und Geschwindigkeit sich denkt, — über in

$$y = \frac{2 \cdot dX}{a} \cdot S\left[P_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \cos\alpha\pi Ht\right]$$
$$+ \frac{2 \cdot dX}{\pi a H} \cdot S\left[\frac{1}{\alpha} \cdot Q_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \sin\alpha\pi Ht\right]$$

und

$$u = -\frac{2\pi H dX}{a} \cdot S\left[\alpha \cdot P_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \sin\alpha\pi Ht\right]$$
$$+ \frac{2 \cdot dX}{a} \cdot S\left[Q_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \cos\alpha\pi Ht\right],$$

wo sich die Summen-Zeichen S auf alle unendlich vielen, für $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ in inf. hervorgehenden Glieder erstrecken.

Setzt man aber in den für P_α und Q_α (in 49. u. 50.) erhaltenen Ausdrücken erstlich $X : a = \mu : m$, so daß statt μ die Abscisse X eingeführt wird, und $\frac{X}{a}$ statt $\frac{\mu}{m}$ geschrieben werden kann; bezeichnen endlich Y_x und U_x die Funktionen von x, welche dem Anfangs-Zustande angehören, so erhält man (aus 49. u. 50.)

$$P_\alpha \cdot dX = \int_{a \div 0} Y_X \cdot \sin\frac{\alpha X\pi}{a} \cdot dX$$

und

$$Q_\alpha \cdot dX = \int_{a \div 0} U_X \cdot \sin\frac{\alpha X\pi}{a} \cdot dX,$$

in so fern das Summen-Zeichen S (in 49. u. 50.) jetzt sich auf alle unendlich vielen Glieder erstreckt, welche für alle, um dX wachsenden Werthe von X (welches an die Stelle von μ getreten ist) von X = 0 an bis X = a hin hervorgehen, so daß diese Summe von dem Integrale nach X, nicht verschieden ist (nach I. Th. Anal. §. 35.). — Nach Substitution dieser Werthe der Konstanten P_α und Q_α hat man aber aus den letztern für y und u erhaltenen Ausdrücken,

$$51)\quad y = \frac{2}{a} \cdot S\left[\sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \cos\alpha\pi Ht \cdot \int_{a \div 0} Y_X \cdot \sin\frac{\alpha\pi X}{a} \cdot dX\right]$$
$$+ \frac{2}{\pi a H} \cdot S\left[\frac{1}{\alpha} \cdot \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \sin\alpha\pi Ht \cdot \int_{a \div 0} U_X \cdot \sin\frac{\alpha\pi X}{a} \cdot dX\right]$$

und

$$52)\ u = -\frac{2\pi H}{a}\cdot S\left[\alpha\cdot sin\frac{\alpha\pi x}{a}\cdot sin\,\alpha\pi Ht\cdot\int_{a\div 0} Y_X\cdot sin\frac{\alpha\pi X}{a}\cdot dX\right]$$
$$+\frac{2}{a}\cdot S\left[sin\frac{\alpha\pi x}{a}\cdot cos\,\alpha\pi Ht\cdot\int_{a\div 0} U_X\cdot sin\frac{\alpha\pi X}{a}\cdot dX\right],$$

wo die Summen-Zeichen S sich auf alle unendlich vielen Glieder erstrekken, welche für $\alpha = 1, 2, 3, 4, \cdots$ in inf. hervorgehen.

Dies ist also die vollständige Auflösung des Problems der schwingenden Saite, wenn man mit Lagrange voraussetzt, daß die Bewegung in einer und derselben Ebene statt hat*).

Anmerk. 1. Lagrange ist später noch einmal auf diese Auflösung zurückgekommen. Seine unendlich vielen totalen Differenzial-Gleichungen

$$\partial^2(y_\mu)_t = c^2\cdot(y_{\mu+1} - 2y_\mu + y_{\mu-1})$$

kann man auch so schreiben:

$$\partial^2(y_\mu)_t = c^2\cdot[(y_{\mu+1} - y_\mu) - (y_\mu - y_{\mu-1})],$$

oder auch, — wenn

$$y_{\mu+1} - y_\mu = \Delta y_\mu,\quad y_\mu - y_{\mu-1} = \Delta y_{\mu-1},$$

und

$$\Delta y_\mu - \Delta y_{\mu-1} = \Delta^2 y_\mu$$

gesetzt wird —, noch so:

$$\partial^2(y_\mu)_t = c^2\cdot\Delta^2 y_\mu.$$

Dieselbe geht dann, wenn m unendlich gedacht wird, in die Parzial-Gleichung

$$\partial^2 y_t = c^2\cdot\partial^2 y_x$$

über. Indem daher Lagrange seine frühere Ansicht festhält,

---

*) Vergleicht man dieses Resultat mit dem (§. 179. NNr. 8. 9.) erhaltenen, indem man sich dort $z = 0$ denkt für jedes t, so sieht man sogleich die völlige Uebereinstimmung beider, sobald man bedenkt, daß

$$H = \sqrt{\left(\frac{g\Pi}{ap}\right)}$$

berechnet worden ist, folglich genau mit dem dortigen $\frac{c}{a}$ zusammenfällt.

aber gleich anfänglich m unendlich groß sich denkt, bekommt er diese vorliegende Parzial-Gleichung, betrachtet sie als den Repräsentanten von unendlich vielen totalen Gleichungen, welche aus ihr für alle stetig neben einander liegenden Werthe von x (von 0 bis a hin) hervorgehen würden; wendet dasselbe Verfahren an, wie solches in dem vorliegenden (§. 180.) beschrieben steht, muß aber bei dem Addiren der Gleichungen die Summen jetzt durch bestimmte Integrale ausdrücken (nach I. Th. Analys. §. 35.), überhaupt auch die folgenden Stellen des Verfahrens nach den jetzigen Zuständen modificiren. Dadurch gelingt es ihm aber die Parzial-Gleichung zu integriren, und zu demselben vorliegenden End-Resultat zu gelangen, ohne zuletzt erst den an mehreren Stellen angefochtenen Uebergang von m endlich zu m unendlich machen zu müssen.

Anmerk. 2. Setzt man in dem von Lagrange gefundenen End-Resultate, t = 0, so gehen y und u in Y_x und U_x über, und man erhält (aus 51. u. 52.)

$$Y_x = \frac{2}{a} \cdot S\left[\sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \int_{a \div 0} Y_X \cdot \sin\frac{\alpha\pi X}{a} \cdot dX\right]$$

und

$$U_x = \frac{2}{a} \cdot S\left[\sin\frac{\alpha\pi x}{a} \cdot \int_{a \div 0} U_X \cdot \sin\frac{\alpha\pi X}{a} \cdot dX\right],$$

während Y_x und U_x ganz willkührliche Funktionen von x vorstellen, weil sie dem Anfangs-Zustande der Aufgabe entsprechen, der ganz willkührlich seyn kann. — Man sieht also auf diesem Wege bereits eine der sogenannten Fourierschen Reihen gefunden, durch welche eine ganz willkührliche Funktion Y oder U von x, in eine nach Sinus der vielfachen Bogen fortlaufende Reihe verwandelt wird. Obgleich aber Lagrange selbst diese Reihe ableitet, so scheint er doch nicht ihren ganzen Umfang gehörig erkannt zu haben. Dies letztere Verdienst hat Fourier sich erworben, indem er namentlich zuerst gezeigt hat, wie diese Reihen 1) für continuirliche, wie für discontinuirliche Funktionen gleichmäßig gelten; 2) wie sie die Werthe der beliebigen Funktion

tion Y oder U immer nur innerhalb der Grenzen x = 0 bis x = a (aber innerhalb dieser Grenzen auch alle stetig neben einander liegenden Werthe von Y oder U) ausdrücken; endlich 3) wie sie nach Verschiedenheit ihrer Form (ob man nämlich Reihen nach Sinus, oder Reihen nach Kosinus, oder beide Reihen in Verbindung nimmt) verschiedenen Grenz-Bedingungen (für x = 0 oder für x = a) entsprechen.

Da wir übrigens (am Schlusse des II. Th. d. M.) diese Reihen des Fourier bereits näher betrachtet haben, so erlauben wir uns hier nur noch die einzige Bemerkung, daß das Verfahren des (II. Th. Anhang. Kap. II. §. 6.), um die Koefficienten der nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufenden Reihen zu finden, ganz analog ist dem Verfahren, welches wir hier (im §. 179. VIII.) nach Lagrange angewandt haben, um die Koefficienten P_α und Q_α zu finden, und daß man jenes aus diesem ableiten könnte, wenn man hier sogleich m unendlich groß nehmen wollte, so daß man, statt der endlichen Reihen, unendliche hat.

Anmerk. 3. Schon vor Lagrange hat Daniel Bernoulli das Problem der schwingenden Saite so weit gelöst, daß er

$$y = S\left[\left(A_\alpha \cdot \sin\frac{\alpha c\pi t}{a} + B_\alpha \cdot \cos\frac{\alpha c\pi t}{a}\right) \cdot \sin\frac{\alpha\pi x}{a}\right]$$

herausbrachte; derselbe konnte aber die Koefficienten A_α und B_α der unendlichen Reihen, die vom Anfangs-Zustande abhängen, nicht bestimmen. Daher ist nur die vorliegende Arbeit des Lagrange als die erste vollständigere Lösung des Problems in dieser Form anzusehen. Vor Lagrange hat jedoch d'Alembert bereits die Parzial-Gleichung $\partial^2 y_t = c^2 \cdot \partial^2 y_x$ auf eine sehr sinnreiche Weise in endlicher Form integrirt, und das Integral den Anfangs-Bedingungen anzupassen gesucht; in welchem Bestreben Euler ihm nachgekommen ist. — Und weil dieses Verfahren d'Alemberts und Eulers zu eigenthümlichen analytischen Betrachtungen Veranlassung giebt, so wollen wir solches dem Haupt-Wesen nach hier sogleich noch mittheilen.

§. 181.

D'Alemberts und Eulers Auflösung des Problems, ihrem Wesen nach.

D'Alembert nimmt die Parzial-Gleichung

$$\partial^2 y_t = c^2 \cdot \partial^2 y_x, \quad \text{wo } c = \sqrt{\left(\frac{ga\Pi}{p}\right)} \text{ ist,}$$

für die Gleichung der Bewegung der schwingenden Saite, und es gelingt ihm durch sinnreiche Betrachtungen das allgemeine Integral derselben

$$1) \qquad y = f_{x+ct} + \varphi_{x-ct}$$

zu finden, welches die beiden willkührlichen Funktionen f und φ enthält, die nun dem Anfangs-Zustande gemäß bestimmt werden müssen.

Differenzirt man aber diese Gleichung (1.) nach allem t, so erhält man

$$2) \qquad \partial y_t = c \cdot [\partial f_x]_{x+ct} - c \cdot [\partial \varphi_x]_{x-ct},$$

wo $[\partial f_x]_{x+ct}$ das bedeutet, was man erhält, wenn man in f_{x+ct} bloß x statt x+ct setzt, dann ∂f_x nimmt, zuletzt aber wieder x+ct statt x schreibt, während $[\partial \varphi_x]_{x-ct}$ die ganz analoge Bedeutung hat. — Setzt man aber in diesen Gleichungen, t = 0, und bedeuten Y_x und U_x die Anfangs-Werthe von y und von ∂y_t, so gehen die Gleichungen (1. u. 2.) über in

$$3) \qquad Y_x = f_x + \varphi_x$$

und

$$U_x = c \cdot \partial f_x - c \cdot \partial \varphi_x,$$

oder, wenn man

$$4) \qquad \frac{1}{c} \cdot \int U_x \cdot dx = \psi_x$$

setzt, wo $\int U_x \cdot dx$ irgend ein besonderes Integral anzeigen mag, noch

$$5) \qquad \psi_x = f_x - \varphi_x.$$

Aus den Gleichungen (3. u. 5.) folgt dann sogleich

$$6) \qquad f_x = \tfrac{1}{2}(Y_x + \psi_x)$$

und

7) $\varphi_x = \frac{1}{2}(Y_x - \psi_x)$;

und so würde man f_x und φ_x bestimmt haben, wenn hier nicht der Umstand einträte, daß Y_x und ψ_x nur Werthe haben, so lange x zwischen 0 und a liegt, während man die Werthe von f_x zu wissen braucht für $x + ct$, d. h. für alle positiven Werthe von 0 bis ∞, welche statt x gesetzt werden können, und zugleich die von φ_x nöthig sind, für $x - ct$, d. h. für die positiven Werthe von $x = a$ bis $x = 0$ hin, und dann noch für alle negativen Werthe, von 0 bis $-\infty$ hin, welche statt x gesetzt werden könnten.

Diese weiteren Werthe von f_x und φ_x verschafft man sich nun aus der Bedingung, daß die End-Punkte A und B der Saite zu allen Zeiten unbeweglich seyn sollen. Es muß nämlich y für jedes positive t, aber für $x = 0$ und für $x = a$, der Null gleich werden. Dies giebt die zwei Gleichungen (aus 1. u. 2.)

8) $f_{ct} + \varphi_{-ct} = 0$, 9) $f_{a+ct} + \varphi_{a-ct} = 0$.

Die (8.) zeigt uns, daß die Werthe von φ_x für alle negativen Werthe $-\xi$ von x, gleich und entgegengesetzt genommen werden müssen den Werthen von f_x für dasselbe positive $x = \zeta$. Wie aber f_ζ für jedes positive ζ, welches $> a$ ist, genommen werden müsse, geht aus der (9.) hervor. Setzt man nämlich in der Gleichung (9.) $a + \zeta$ statt ct, so erhält man

10) $f_{2a+\zeta} = -\varphi_{-\zeta} = f_\zeta$ (aus 8.).

Diese Gleichung (10.) zeigt uns nun, wie alle Werthe von f_v gefunden werden, für alle positiven Werthe von v, die $> 2a$ sind, sobald alle Werthe von f_v bekannt sind, für alle Werthe von v, welche zwischen 0 und 2a liegen. Man zieht nämlich von dem Werthe v so lange 2a ab, bis ein Rest ζ bleibt, welcher kleiner als 2a ist; dann nimmt man f_ζ statt f_v. Hat man aber f_v gefunden, so hat man für denselben Werth von v auch φ_{-v}, weil (nach 8.) $\varphi_{-v} = -f_v$ ist.

Es bleibt jetzt nur noch übrig f_v zu bestimmen für alle Werthe von v, welche zwischen a und 2a liegen, weil die Werthe von f_v für Werthe von v zwischen 0 und a direkt aus (6.) schon bekannt sind. Denkt man sich aber $\zeta < a$, und setzt man in der (9.) $a - \zeta$ statt ct, so erhält man

$$11) \qquad f_{2a-\zeta} = -\varphi_\zeta.$$

Da nun ζ zwischen 0 und a liegt, so bestimmt sich $-\varphi_\zeta$ unmittelbar aus (7.) daher auch $f_{2a-\zeta}$ (aus 11.), d. h. jeder Werth von f_v, für jeden Werth von v, welcher $>a$ und $\leqq 2a$ ist.

Sind demnach die Werthe von f_v für alle positiven Werthe von v, und die von φ_v für alle negativen Werthe von v und noch für die positiven Werthe von v zwischen 0 und a, dem vorstehenden gemäß bestimmt, so läßt sich (aus der 1.) das zu jedem t und zu jedem x gehörige y ohne weiteres bestimmen.

Will man aber die Geschwindigkeit ∂y_t (aus 2.) berechnen, wie sie für jedes x und zu jeder Zeit t seyn wird, so braucht man auch noch alle Werthe von ∂f_v und $\partial \varphi_v$, die ersteren für alle positiven Werthe von v, die anderen für alle Werthe von v zwischen $-\infty$ und a. Diese erhält man aber, wenn man die Gleichung (8.) nach t, die Gleichungen (10. u. 11.) aber nach ζ differenziirt. Dies giebt nämlich

$$12) \qquad [\partial f_v]_{ct} - [\partial \varphi_v]_{-ct} = 0, \quad \text{für jedes positive } t,$$

$$13) \qquad [\partial f_v]_{2a+\zeta} = [\partial \varphi_v]_{-\zeta} = [\partial f_v]_\zeta, \ \text{(aus 12.) für jedes positive } \zeta, \text{ und}$$

$$14) \qquad [\partial f_v]_{2a-\zeta} = [\partial \varphi_v]_\zeta, \ \text{für jeden Werth von } \zeta \text{ zwischen 0 und a.}$$

Die (12.) zeigt nun, daß jeder Werth von $\partial \varphi_v$ für jeden negativen Werth von v, genau gleich genommen werden muß dem Werthe von ∂f_v für den positiven und absolut eben so großen Werth von v. — Die (13.) zeigt, wie die Werthe von ∂f_v für alle positiven Werthe w von v, die $>2a$ sind, gleich genommen werden müssen bezüglich den Werthen von ∂f_v für

den Werth von v, welcher $= w - 2a$, $w - 4a$, $w - 6a$, ꝛc. (bis einer dieser letztern Werthe noch positiv aber $< 2a$) ist. — Die (14.) endlich lehrt uns, wie die Werthe von ∂f_v für alle Werthe von v zwischen a und 2a berechnet werden, aus den Werthen von $\partial \varphi_v$ für v zwischen 0 und a. Differenziirt man endlich die Gleichungen (6. und 7.) nach allem x, so erhält man

$$15) \quad \partial f_x = \tfrac{1}{2}\left(\partial Y_x + \frac{1}{c} U_x\right)$$

und

$$16] \quad \partial \varphi_x = \tfrac{1}{2}\left(\partial Y_x - \frac{1}{c} U_x\right),$$

woraus sich alle Werthe von ∂f_v und $\partial \varphi_v$ berechnen, wenn v zwischen 0 und a liegt.

Diese Auflösung des Problems gilt übrigens nicht bloß in dem einfachern Falle der Aufgabe, in welchem man voraussetzt, daß die Kurve aus der Ebene x und y nie heraustritt, wie wir solches im (§. 180.) angenommen haben, sondern auch in dem allgemeinern Falle (der §§. 178. u. 179.). In dem letztern Falle giebt die Parzial-Gleichung $\partial^2 z_t = c^2 \cdot \partial^2 z_x$ (§. 178. IV. 7.) noch ganz ähnliche Resultate für z und ∂z_t.

Anmerk. Von dieser Auflösung hat Euler gegen d'Alembert behauptet, daß sie selbst dann noch gelte, wenn die Funktionen Y_x und U_x discontinuirlich gegeben seyn sollten. Lagrange tritt in dieser Beziehung nicht bloß dem Euler bei, sondern er wandelt auch sein eigenes Resultat (§. 180. NNr. 51. 52.) in das vorstehende des d'Alembert um, nicht ohne wegen mancher Wendungen von d'Alembert angegriffen zu werden, während er jedoch diese Angriffe selbst wiederum zu widerlegen bemüht ist. Der Uebergang des Resultats des Lagrange zu dem des d'Alembert bleibt jedoch gültig, wenn wir auch nicht mit allen Gründen einverstanden seyn können, welche Lagrange zur Vertheidigung seines Verfahrens anführt, sondern hie und da andere dafür setzen würden.

Fragt man sich aber, ob unsere Resultate des (§. 179.) oder

des (§. 180.) oder des (§. 181.) auch dann noch gelten, wenn der Anfangs-Zustand der Saite ein discontinuirlicher ist? — so findet man bald, daß alle Schlüsse des (§. 178.), welche zu dem Ansatze der Gleichungen führen, nichts voraussetzen, was nicht auch bei einem discontinuirlichen Zustande der Saite wahr bliebe, sobald man nur voraussetzt, daß für jede Stelle der Saite, und in jedem Augenblicke nicht bloß ein und dieselbe Ordinate y_x, sondern auch ein und dasselbe ∂y_x statt finde, d. h. daß an jedem Punkte der Kurve, auch wenn sie discontinuirlich ist, und auch da wo zwei Theile zusammenstoßen, doch eine gemeinschaftliche Tangente existire.

In der Wirklichkeit macht die Elasticität und die Steifigkeit der Saite, welche ganz scharfe Ecken nie zulassen, daß diese Bedingungen immer erfüllt sind, auch da wo man beabsichtigt einer Saite ein beliebiges Polygon zur Anfangs-Figur zu geben.

§. 182.

Besondere Betrachtungen über die Transversal-Schwingungen.

Betrachten wir unser Resultat (§. 179. NNr. 8. 9.) oder (§. 181.), mit welchem letzteren das erstere ganz und vollkommen übereinstimmt, so finden wir sogleich noch nachstehende Einzelnheiten.

1) Wenn ct um $2a$, also die Zeit t um $\frac{2a}{c}$ größer wird, so werden die y und die ∂y_t genau dieselben Werthe wiederum annehmen. Im leeren Raume und wenn die End-Punkte absolut fest sind, und wenn sich sonst kein Hinderniß darbietet, wird also, wie auch der Anfangs-Zustand der Saite gewesen seyn mag, selbige in gleichen Zeiten $\left(\text{von der Länge } \frac{2a}{c}\right)$ immer in denselben Zustand zurückkehren, ohne Ende fort. Der Widerstand der Luft und der Umstand, daß sich die Bewegung der Saite einigermaaßen den End-Punkten derselben mittheilt, hindern die unendliche Fortdauer, ohne jedoch den Isochro-

nismus merklich zu ändern. — Ganz analoges haben wir früher für die Pendel-Schwingungen gefunden (I. Th. Mech. §. 51.).

2) Ist T die Dauer einer dieser Schwingungen der Saite (hin und zurück in den alten Stand), und n die Anzahl derselben in der Zeit-Einheit (Sekunde), so hat man also

$$T = \frac{2a}{c} = 2\sqrt{\left(\frac{pa}{g\Pi}\right)}$$

und, weil $nT = 1$ ist,

$$n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{g\Pi}{pa}\right)}.$$

Weil aber ein Ton erfahrungsmäßig desto höher ist, je größer n, und desto tiefer je kleiner n sich herausstellt, so kann man die Zahl n als das Maaß der Höhe eines Tones ansehen. Geschieht dieß, so folgt noch:

3) Die Höhe eines Tones ist von der Weite der (sehr klein gedachten) Schwingungen unabhängig.

4) Die Höhe eines Tones ist unter übrigens gleichen Umständen mit der Quadrat-Wurzel aus der Spannung Π proportional.

5) So oft das Gewicht p der Saite mit ihrer Länge a proportional ist, so oft nimmt die Höhe des Tones im umgekehrten Verhältniß der Länge a der Saite ab.

6) Für zwei Saiten von gleicher Länge und Spannung wird dagegen der Ton im umgekehrten Verhältniß der Quadrat-Wurzel ihres Gewichtes p niedriger, also bei Saiten von derselben Materie, im umgekehrten Verhältniß der Dicke der Saite.

7) Setzt man voraus, daß die Anfangs-Geschwindigkeit U_x der Null gleich ist, so wird bloß aus (§. 179. Nr. 8. u. 9.)

$$y = \frac{2}{a}\cdot S\left[\sin\frac{(b+1)\pi x}{a}\cdot\cos\frac{(b+1)\pi ct}{a}\cdot\int_{a\div 0} Y_X\cdot\sin\frac{(b+1)\pi X}{a}\cdot dX\right]$$

und

$$\partial y_t = -\frac{2c\pi}{a^2}\cdot S\left[(b+1).\sin\frac{(b+1)\pi x}{a}\cdot\sin\frac{(b+1)\pi ct}{a}\cdot\int_{a\div 0} Y_X\cdot\sin\frac{(b+1)\pi X}{a}\cdot dX\right]$$

und man sieht, wie die Geschwindigkeit dann allemal Null ist, so oft ct = 0, a, 2a, 3a, 4a, rc., überhaupt ein Vielfaches von a wird. Zu gleicher Zeit sieht man, wie die Werthe von y für dieselben Werthe von ct, genau dieselben werden, so oft ct Null oder ein gerades Vielfaches von a wird, wie aber der Werth y der zu a — x statt x gehört, genau gleich und entgegengesetzt ist dem Werthe von y, der zu x für t = 0 gehört, so oft ct ein ungerades Vielfache von a wird. Daher hat in den nächst auf einander folgenden Zeit-Punkten, in welchen die Geschwindigkeiten Null werden, die durch y_x vorgestellte Kurve abwechselnd dieselbe Figur in derselben Lage, wie zu Anfange, oder doch dieselbe Figur, aber in umgekehrter Lage wie zu Anfange.

Dies gilt jedoch nur in dem besondern Falle, in welchem die Anfangs-Geschwindigkeit einer jeden Stelle der Saite der Null gleichgesetzt wird, und, wie sich von selbst versteht, nur von den Transversal-Schwingungen.

8) Macht man in Bezug auf die Anfangs-Figur und Anfangs-Geschwindigkeit einer jeden Stelle eine andere Voraussetzung; nimmt man nämlich an, daß

$$\int_{a \div 0} Y_X \cdot \sin \frac{(b+1)\pi X}{a} \cdot dX = 0$$

und

$$\int_{a \div 0} U_X \cdot \sin \frac{(b+1)\pi X}{a} \cdot dX = 0$$

ist, für alle Werthe von b+1, welche nicht Vielfache irgend einer gegebenen Zahl m sind, so behalten die Werthe von y und ∂y_t (§. 179. NNr. 8. 9.) nur diejenigen Glieder, in welchen (b+1) Vielfache von m sind, so daß man (b+1)m statt b+1 schreiben kann. Man hat dann (aus §. 179. NNr. 8. 9.)

$$y = \frac{2}{a} \cdot S\left[\sin\frac{(b+1)m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{(b+1)m\pi ct}{a} \cdot \int_{a \div 0} Y_X \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi X}{a} \cdot dX\right]$$

$$+ \frac{2}{c\pi} \cdot S\left[\frac{1}{b+1} \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi ct}{a} \cdot \int_{a \div 0} U_X \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi X}{a} \cdot dX\right]$$

und

$$\partial y_t =$$

$$\frac{-2c\pi}{a^2} \cdot S\left[(b+1) \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi ct}{a} \cdot \int_{a \div 0} Y_X \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi X}{a} \cdot dX\right]$$

$$+ \frac{2}{a} \cdot S\left[\sin\frac{(b+1)m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{(b+1)m\pi ct}{a} \cdot \int_{a \div 0} U_X \cdot \sin\frac{(b+1)m\pi X}{a} \cdot dX\right].$$

Deshalb wird jetzt der Zustand und die Figur der Saite dieselbe, so oft ct um ein Vielfaches von $\frac{2a}{m\pi}$ wächst. Weil aber in diesem besondern Falle die Dauer einer Schwingung nur der mte Theil von der Dauer einer Schwingung im Allgemeinen ist, so finden dasmal in einer Sekunde auch m mal so viel Schwingungen statt, als in dem (Nr. 2. betrachteten) allgemeinen Falle. Daher ist in dem jetzigen besonderen Falle, der übrigens auf unendlich verschiedene Arten eintreten kann, der Ton m mal so hoch, als im allgemeinen Fall.

Ferner geben die vorstehenden Formeln für y und für ∂y_t allemal gleichzeitig die Null, so oft $\frac{mx}{a}$ eine ganze Zahl ν, also so oft $x = \frac{\nu a}{m}$ wird, also für $x = \frac{a}{m}, \frac{2a}{m}, \frac{3a}{m}, \ldots \frac{(m-1)a}{m}$. Folglich existiren in diesem besonderen Falle zwischen den End-Punkten A und B der geraden AB noch m — 1 gleich weit von einander entfernte Punkte, N, N_1, N_2, ꝛc. (Fig. 33.) der Saite, welche, wie ihre End-Punkte A und B selbst, während der ganzen Dauer der Bewegung gänzlich unbeweglich sind. Diese Punkte werden deshalb Schwingungs-Knoten genannt. Alle durch die Schwingungs-Knoten gebildeten m gleichen Theile der zwischen A und B ausgespannten Saite schwingen daher jeder von dem andern ganz unabhängig, und so, wie wenn er eine eigene, zwischen seinen End-Punkten, als feste Punkte gedacht, ausgespannte Saite bildete*).

*) Diese für die ganze Länge der Saite unverhältnißmäßig höhern Töne, welche eine Saite zuweilen giebt, hat man lange schon wahrgenommen, ehe man noch den in der vorstehenden Rechnung offen da liegenden Grund derselben nachzuweisen vermochte.

Anmerk. Unter den unendlich vielen Arten, die es giebt, den hier so eben gedachten besondern Fall herbeizuführen, ist die einfachste die, daß man

$$Y_x = h \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{und} \quad U_x = 0$$

voraussetzt, d. h. daß man gar keine Anfangs-Geschwindigkeit nimmt, dagegen der Saite zu Anfang die durch die Gleichung

$$Y_x = h \cdot \sin\frac{m\pi x}{a}$$

bestimmte Figur ANN_1N_2B (Fig. 33.) giebt, wo h eine bestimmte Konstante ist. Jeder Theil AN, NN_1, N_1N_2, ꝛc. einer solchen Kurve heißt übrigens Trochoide. — Unter diesen Voraussetzungen wird

$$y = h \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{m\pi ct}{a},$$

so daß dasmal der Ausdruck für y aus einem einzigen Gliede besteht. Die Saite hat daher zu allen Zeiten eine Form, wie (Fig. 33.) sie zeigt, nur daß die Längen der einzelnen Trochoiden allein konstant bleiben, die Höhen derselben aber veränderlich und mit $\cos\frac{m\pi ct}{a}$ proportional werden.

Diese besondere Auflösung hat schon Taylor vor d'Alembert und Lagrange erhalten, ohne jedoch zu der allgemeinen Lösung des Problems kommen zu können. Erst nach Taylor verallgemeinerte D. Bernoulli die Auflösung, und gab die bereits oben (§. 180. Anmerk. 3.) bemerkte Form für y, ohne jedoch die Koefficienten seiner unendlich vielen Glieder den Anfangs-Zuständen gemäß bestimmen zu können, wie wir am angeführten Orte bereits bemerkt haben.

§. 183.

Von den Longitudinal-Schwingungen.

Um die Longitudinal-Schwingungen der Saite zu erhalten, muß man die erste der Gleichungen (§. 178. Nr. 7.), nämlich die Gleichung

$$\partial^2 u_t = b^2 \cdot \partial^2 u_x$$

integriren. Weil dies aber genau dieselbe Parzial-Gleichung ist, welche für die Transversal-Schwingungen statt gefunden hat, nur mit dem Unterschiede, daß hier b steht, wo dort c, — so erhält man auch für die Longitudinal-Schwingungen ganz dieselben Resultate, nur daß statt c jetzt b, und statt Y_x jetzt der Anfangs-Werth von u gesetzt werden muß, und U_x die Anfangs-Geschwindigkeit des End-Punktes M (Fig. 31.) der Abscisse x ist, in der Richtung MB oder MA genommen, je nachdem U_x sich positiv oder negativ ausweist.

Ist daher T′ die Dauer einer Longitudinal-Schwingung und n′ die Anzahl solcher Schwingungen in der Zeit-Einheit (Sekunde), so findet sich wiederum, wenn man genau so wie im (§. 182.) verfährt,

$$T' = \frac{2a}{b} = 2\sqrt{\left(\frac{pa}{gq}\right)} \quad \text{und} \quad n' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{gq}{pa}\right)} \text{ *)}.$$

Vergleicht man diese Zahl n′ mit der früher im (§. 182. Nr. 2.) gefundenen Zahl n, so erhält man

$$n' = n\sqrt{\left(\frac{q}{\Pi}\right)}.$$

Dieses Verhältniß von n′ zu n, nämlich $\sqrt{\left(\frac{q}{\Pi}\right)}$ ist aber jedesmal eine äußerst große Zahl, weil den im (§. 178.) gemachten Annahmen zufolge, und nach dem was im (II. Th. §. 146.) über die Ausdehnung der Seile gesagt sich findet, q das Gewicht vorstellt, welches statt Π angebracht werden müßte, damit die Saite gerade die doppelte Länge erhielte **). Daher

*) Diese Zahl n′, also die Höhe des von den Longitudinal-Schwingungen abhängigen Tons ist also der Rechnung nach von der Größe der Spannung Π unabhängig. In der Erfahrung aber wird auch dieser Ton etwas höher, wenn die Spannung Π vermehrt wird. Dies glaubt Poisson aus der Rechnung dadurch erklären zu können, daß er annimmt: die durch die größere Spannung hervorgebrachte größere Ausdehnung der Saite vermindere das Gewicht p des zwischen A und B befindlichen Stückes.

**) In der That; ist Δ die Spannung, welche die Länge einer Saite

ist der durch die Längen-Schwingungen hervorgebrachte Ton allemal sehr viel höher, als derjenige, der von den Transversal-Schwingungen herrührt.

Man kann dieses Verhältniß $\sqrt{\left(\frac{q}{\Pi}\right)}$, d. h. das Verhältniß von n′ zu n dadurch a priori bestimmen, daß man die durch die Spannung Π hervorgebrachte Verlängerung γ der Saite geradezu mißt; denn man hat dann, wenn Δ die in der Note so eben erhaltene Bedeutung behält,

$$\Delta:\Pi = \delta a:\gamma,$$

weil δa die von der Spannung Δ herrührende Verlängerung vorstellt. Findet man hieraus

$$\Pi = \frac{\gamma\Delta}{\delta a},$$

und setzt man diesen Werth statt Π, und statt q den in der Note so eben gefundenen Werth $\frac{\Delta}{\delta}$ in die Gleichung

---

auf das $(1+\delta)$fache derselben bringt, so werden die Spannungen Π und T (des §. 178.), welche abwechselnd auf die im Gleichgewichte und in Bewegung sich befindende Saite wirken, das unmittelbar an x anliegende Element abwechselnd auf die $1+\frac{\delta\Pi}{\Delta}$ und $1+\frac{\delta T}{\Delta}$fache Länge bringen; die Längen dx und ds stehen also zu einander in demselben Zahlen-Verhältnisse, so daß man hat

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\Delta+\delta T}{\Delta+\delta\Pi} \text{ und } \frac{ds-dx}{dx} = \frac{\delta(T-\Pi)}{\Delta},$$

indem man die zweiten und höhern Potenzen des sehr kleinen δ außer Acht läßt. Weil aber (nach §. 178. Nr. 5.)

$$T-\Pi = q\cdot\frac{du}{dx} = q\cdot\frac{ds-dx}{dx}$$

gesetzt worden ist, so folgt hieraus

$$q = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Also ist $q = \Delta$ für $\delta = 1$, d. h. q ist die Spannung Δ für den Fall, daß solche die $1+\delta$fache für $\delta = 1$, d. h. die doppelte Länge hervorbringen soll.

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\left(\frac{q}{\Pi}\right)},$$

so erhält man

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\left(\frac{a}{\gamma}\right)}\,*).$$

Umgekehrt findet sich aus dieser Gleichung auch noch

$$\gamma = a \cdot \left(\frac{n}{n'}\right)^2.$$

Schluß-Anmerkung.

Wir haben uns bei diesem Beispiele der schwingenden Saite etwas lange verweilt, weil wir hier Gelegenheit hatten, die geschichtliche Entstehung derjenigen Rechnungen nachzuweisen, welche bei der Bewegung aller elastischen Körper (auch der sogenannten Imponderabilien) bald mehr bald weniger modificirt, immer wiederkehren, und welche Fourier in seiner Wärme-Lehre auf einen so hohen Grad der Ausbildung gebracht hat.

D'Alembert's, Euler's, D. Bernoulli's und Lagrange's Arbeiten findet man in nachstehenden Schriften:

Mémoires de l'Académie de Berlin. 1749—53.

Miscellanea Taurinensia. T. I.—T. III. (1759—66.)

Opuscules math. p. D'Alembert. T. I.

Außerdem empfehlen wir aber noch das im (II. Th.) schon mehrmals angeführte Memoire von Poisson „De l'équilibre et du mouvement des corps élastiques", so wie auch noch Poisson's Traité de mécanique. 2de édit. T. II. (1833). — Was endlich die analogen Rechnungen bei der Bewegung der Imponderabilien betrifft, so findet man sie in's Besondere in folgenden Schriften:

*) Diese Formel ist, wie Poisson behauptet, durch einen von Cogniard-Latour angestellten Versuch bestätigt worden. Es wurde dazu eine sehr lange Saite genommen, so daß ihre Transversal-Schwingungen sichtbar und langsam genug waren, um gezählt werden zu können.

Théorie de la chaleur p. Fourier, à Paris 1822.
Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet vom Dr. G. S. Ohm. Berlin 1827.
Théorie mathematiquc de la chaleur p. Poisson à Paris 1834.
Sur la propagation de la lumière p. Cauchy à Prague 1835.

Berichtigungen.

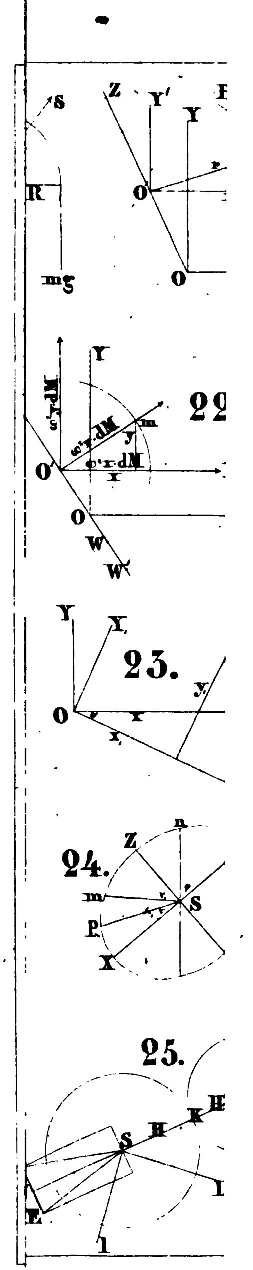
Bei einer wiederholten genauen Durchsicht des ganzen nun beendigten Werkes sind noch einige kleine Redaktions-Fehler aufgefunden worden, deren Berichtigung hier folgt.

Im I. Th. pag. 263. ist statt des dortigen Satzes Nr. 1. zu setzen: „Die Schnitte können nach allen drei Richtungen OX, OY und OZ zugleich, Parabeln seyn." — Aus $A \cdot B = 0$ und $A \cdot C = 0$ folgt nämlich nicht, daß gleichzeitig $A = B = C = 0$ seyn müsse.

Im II. Th. sind nicht nur, wie bereits in der Vorrede daselbst bemerkt worden ist, die Zeilen 7—10. pag. 5., sondern auch, wegen desselben Grundes, noch die Zeilen 12—15. pag. 21. zu streichen.

Statt Dove's „Archiv" muß Dove's „Repertorium" gesetzt werden.

Gedruckt bei A. W. Schade.



S
R
mg
Z
Y'
Y
O
O
22
Y
m
y
x
O'
O
W
W'
Y
Y,
23.
y,
O
x
x,
24.
n
Z
m
S
P
X
25.
S
H
K
H
I
E
I

